TD File d'attente 1

ENSSAT

06/01/2021

Exercice 2 - Source ON/OFF modélisée en temps continu

On modélise les arrivées à une imprimante par une seule source qui peut se trouver dans deux états différents : OFF et ON. Dans l'état ON, la source émet à débit constant D bits par seconde.
Soit X_t = état de la source à l'instant t. On suppose que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu homogène dont le graphe de transition est donné par la figure suivante.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "a"] & 1 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

1. Calculer le vecteur de probabilité stationnaire $\boldsymbol{\pi}$. On raisonnera comme d'habitude en deux temps : une analyse (prouvant l'unicité) où l'on admet l'existence de $\boldsymbol{\pi}$, suivie d'une synthèse justifiant cette existence.
2. On se place en régime stationnaire. Quel est le débit moyen de la source ?
3. Quelle est la longueur moyenne d'une requête d'impression ?

Corrigé

1. **Analyse** : soit $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de probabilité stationnaire qu'on suppose exister. Alors, d'après les équations de balance (en l'occurence ici, de l'équation de balance) :

$$\pi_0 a = \pi_1 b \Leftrightarrow \pi_1 = \frac{a}{b}\pi_0$$

   En utilisant la condition de normalisation $\pi_0 + \pi_1 = 1$, on obtient $1 - \pi_0 = \frac{a}{b}\pi_0$, c'est-à-dire

$$\pi_0 = \frac{b}{a+b} \quad \text{et} \quad \pi_1 = \frac{a}{a+b}$$

   Cette analyse montre l'unicité de la distribution stationnaire.
   Synthèse : En introduisant $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix}$ tel que précédemment, il s'agit d'une distribution, et elle vérifie les équations de balance donc c'est une distribution stationnaire.

2. Par définition, $\mathbb{E}[\pi]$ nous donne le temps moyen où la source sera ON en régime stationnaire. Ainsi,

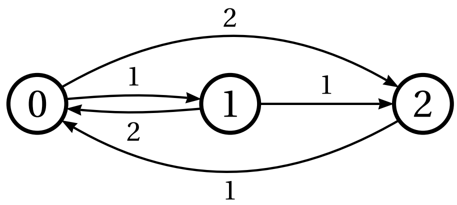
$$\mathbb{E}[\pi] = \frac{a}{a+b}$$

   Puisque la source emet D bits par seconde, le débit moyen de la source est $\frac{a}{a+b}D$.

3. Pour déterminer la longueur moyenne d'une requête, on va déterminer la loi du temps de séjour S_1 dans l'état 1. Son espérance nous donnera le durée moyenne de séjour en ON, et donc nous donnera la longueur moyenne d'une requête.
   Or (cf poly), le temps de séjour dans l'état 1 suit une loi exponentielle de paramètre $a_i = b$ ici. Ainsi, la durée moyenne de séjour en ON est $\mathbb{E}(S_1) = \frac{1}{b}$. Finalement, la longueur moyenne d'une requête est de $\frac{1}{b}D$ bits.

Exercice 3 - CMCTH

Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ une CMTC homogène de graphe de transition



1. Étudier le régime stationnaire.
2. Pour chaque état i, quelle est loi du temps de séjour dans l'état i, calculé à partir d'un instant t où la chaîne est dans l'état i ?
3. Pour chaque couple d'états (i, j) avec $j \neq i$, quelle est la probabilité $q_{i,j}$ de transiter vers j **sachant que l'on quitte** l'état i ?

Corrigé

1. **Pour justifier l'existence du régime stationnaire.** En temps continu, on dit que « j est accessible de i » si cette propriété est vrai au sens du graphe des taux de transition. Si tous les état communiquent et qu'il y a un nombre fini d'états, alors le régime stationnaire existe, *i.e.* que $p(t)$ converge quand t tend vers $+\infty$ vers un vecteur de probabilité $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ne dépendant pas de $p(0)$, qui nécessairement est solution des équations de balance. Si l'espace des états est infini dénombrable, alors sous la même hypothèse d'irréductibilité du graphe, si l'on trouve une solution vecteur de probabilité aux équations de balance, alors on a la même conclusion.
   Avec ce résultat, si l'on trouve une unique solution (et ici pas de condition car nombre fini d'états) π du système des équations de balance qui est un vecteur de probabilité, alors c'est la distribution limite. Ceci justifie le raisonnement par analyse-synthèse utilisé dans le poly pour les files d'espace des états $\mathbb{N}$ (la synthèse consistant dans ce cas essentiellement à trouver une condition de convergence de la série, et étant presque insignifiante dans le cas d'un nombre fini d'états, mais mieux vaut dire « réciproquement, ce vecteur de probabilité π est bien une solution des équations de balance »).

   Analyse : supposons l'existence d'une distribution stationnaire $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$.
   Lorsque le système est dans l'état i, le taux de transition de i vers j est $a_{i,j}$. Or, π_i peut s'interpréter comme **la proportion de temps passée dans l'état i lorsqu'on l'observe sur une longue période en régime stationnaire**. Ainsi, $\pi_i a_{i,j}$ est le taux **moyen** de passage de i vers j en régime stationnaire. En disant qu'en régime stationnaire les taux moyens de départ et d'arrivée dans chaque état s'équilibrent, on obtient la formule générale (2.30) du poly,
   On écrit les équations de balance :

$$\begin{cases} (1+2)\pi_1 = 2\pi_2 + \pi_3 \\ (1+2)\pi_2 = \phantom{2\pi_2 + {}} \pi_1 \\ \pi_3 = \pi_2 + 2\pi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\pi_1 = 2\pi_2 + \pi_3 \\ 3\pi_2 = \phantom{2\pi_2 + {}} \pi_1 \\ \pi_3 = \pi_2 + 2\pi_1 \end{cases}$$

   ce qui donne

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 \quad \text{et} \quad \pi_3 = \frac{7}{3}\pi_2$$

Avec la condition de normalisation $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, on obtient $\pi_1 = \frac{3}{11}$ et finalement

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$$

On vient ainsi de montrer l'unicité de la distribution stationnaire.
Synthèse : la distribution π définie précédemment vérifie les équations de balance, et est donc une distribution stationnaire.

$$p(t) \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathbb{P}(X_t = 1), \mathbb{P}(X_t = 2), \mathbb{P}(X_t = 3)\big) \text{ tend vers } \pi \text{ quand } t \to +\infty$$

Cette convergence a lieu quelle que soit la distribution de probabilité $p(0)$ sur $\{1, 2, 3\}$.

Bilan : il y a une unique distribution stationnaire.

2. La chaîne étant dans l'état 1 à l'instant t (*i.e.* $X_t = 1$), son temps de séjour S_1 dans cet état suit la loi $\mathscr{E}(a_{1,2} + a_{1,3}) = \mathscr{E}(3)$ (voir poly pages 32 et 33, c'est la loi du min de v.a. indépendantes exponentielles de paramètre $a_{1,2}$ et $a_{1,3}$). De même, S_2 suit, conditionnellement à $X_t = 2$, la loi $\mathscr{E}(3)$, et S_3 suit, conditionnellement à $X_t = 3$, la loi $\mathscr{E}(1)$.
   On peut l'écrire aussi : pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on note $S_{k,t} = \inf\{s > 0, X(t+s) \neq k\}$. Alors, on a :

$$\mathbb{P}(S_{k,t} > s | X(t) = i) = e^{-a_k t}$$

   Pour $k = 1$ ou 2 : $\mathbb{P}(S_{k,t} > s) = e^{-3s}$ et pour $k = 3$, $\mathbb{P}(S_{k,t} > s) = e^{-s}$. Ainsi, le temps de séjour dans l'état 1 (ou 2), compté à partir de l'instant t suit une loi exponentielle de paramètre 3 et celui de l'état 3 suit une loi exponentielle de paramètre 1.

3. On utilise la résultat du poly page 33, formule (2.24). Ce résultat est très naturel : il exprime que **lorsque la chaîne quitte l'état *i***, c'est pour transiter vers un état j avec une probabilité proportionnelle au taux de transition $a_{i,j}$. On définit ainsi une matrice $Q = (q_{i,j})$ stochastique à diagonale nulle, qui ici est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Remarque. En prenant comme instant discrets les instants (aléatoires) des transitions, on peut ainsi associer une CMTD de matrice Q à une CMTC, mais rendre cela rigoureux nécessiterait plus de travail (pour la question 2 aussi d'ailleurs), on se contente ici d'une compréhension intuitive du phénomène et des calculs pratiques.

Exercice 4 - File M/M/1 à taux d'activité 0.95

On considère une file M/M/1 telle qu'une arrivée a lieu en moyenne toutes les 10 minutes et telle que le taux d'activité du serveur est 0.95.

1. Quel est la durée moyenne du temps de service ?
2. Donner l'expression de la probabilité stationnaire $\boldsymbol{\pi}$.
3. Quel est le nombre moyen de clients en attente ? Quel est le temps de séjour moyen dans la file ? Quel est le temps d'attente moyen dans la file ?
4. Conclusion ?
5. Pour le même flux de clients, on arrive à diminuer la durée moyenne de service de façon à obtenir un taux d'activité $\rho = 0.9$. Refaire les calculs et commenter les résultats.

Corrigé

1. On nous donne $\rho = 0,95$ et $\lambda = \frac{1}{10}$. Ainsi, $\frac{\lambda}{\mu} = 0,95$ soit $\mu = \frac{1}{9,5}$. Ainsi, la durée moyenne est de

$$\overline{\mu} = \frac{1}{\mu} = 9,5 \text{ mn}$$

2. Puisque $\rho < 1$, la distribution stationnaire existe. On a alors $\pi_j = \rho\pi_{j-1}$ et donc $\pi_j = \rho^j\pi_0$, avec $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ ce qui nous donne

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j} = 1 - \rho$$

et donc

$$\pi = (\pi_j) \text{ avec } \pi_j = (1-\rho)\rho^j$$

3. Par définition :

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \sum_{j=0}^{\infty} j\mathbb{P}(N = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j \\ &= (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j \\ &= (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} = 19\end{aligned}$$

Il y a en moyenne 19 clients en attente.
De même, le temps de séjour moyen vaut $\overline{R}$. Comme il y a ergodicité, on va appliquer la formule de Little. Il nous faut $\overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda\pi_j = \lambda$$

et donc $\overline{R} = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 190$ mn.
Enfin, le temps d'attente moyen vaut $\overline{R_q} = \overline{R} - \frac{1}{\mu} = 180,5$ minutes.

4. Avec un taux d'activité du serveur de $0,95$ (soit proche de 1), le temps d'attente moyen est de 3 h, ce qui est non négligeable.
5. Les résultats théoriques sont les mêmes. On obtient alors

$$\overline{N} = 9, \quad \overline{R} = 90 \text{ mn} \quad \text{et} \quad \overline{R_q} = 81 \text{ mn}$$

On diminue ainsi drastiquement les temps d'attente en obtenant un taux d'activité de $0,9$ au lieu de $0,95$.

Exercice 6

Cet exercice relève du cours mais la question 2 n'a pas été traitée en CM. À faire, si nécessaire avec l'aide du polycopié, pour vérifier qu'on maitrise le cours.

Soit $N(t)$ le nombre de clients présents à l'instant t dans une file d'attente comportant n serveurs indépendants, chacun ayant un temps de service exponentiel de paramètre μ et telle que les arrivées se font selon un processus de Poisson de taux λ. On suppose que la zone d'attente est de capacité infinie.

1. Quelle est cette file ? Pourquoi est-elle markovienne ?
2. Calculer les taux de transition (non fait en CM) et dessiner le graphe des transitions.
3. Calculer le vecteur de probabilité stationnaire $\boldsymbol{\pi}$. L'exprimer en fonction de n et $\rho = \dfrac{\lambda}{n\mu}$.
4. Démontrer que le nombre moyen de clients dans la zone d'attente en régime stationnaire est

$$\mathbb{E}(N_q) = \overline{N_q} = \pi_0 \frac{(n\rho)^n}{n!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

5. Démontrer que le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est

$$\mathbb{E}(N_\infty) = \overline{N} = \overline{N_q} + n\rho$$

6. Quel est le temps moyen d'attente ? le temps moyen de service ? le temps moyen passé dans le système ?

Corrigé

Q2. On est exactement sous les hypothèses des propositions 2.3.1 et 2.3.2, on peut donc utiliser directement (2.27) et (2.28) , et surtout (2.29).

Démonstration proposition 2.3.2.

Prenons $i \leqslant n$ et $k \leqslant i$. L'expression 2.27 nous donne

$$\mathbb{P}(E_{k,\ell}|N(t)=i) = \binom{i}{k}\left(1-e^{-\mu\delta t}\right)^k e^{-\mu(i-k)\delta t} e^{-\lambda\delta t}\frac{(\lambda\delta t)^\ell}{\ell!}$$

On ne s'intéresse qu'au terme d'ordre en δt le plus petit (qui est donc le terme prépondérant).

$$\begin{aligned} 1-e^{-\mu\delta t} &= \mu\delta t + o(\delta t) \\ \text{donc } \left(1-e^{-\mu\delta t}\right)^k &= (\mu\delta t)^k + o\Big((\delta t)^k\Big) \end{aligned}$$

Pour les deux exponentielles, on utilise le $DL_0(0)$: $e^{a\delta t} = 1 + o(1)$ (pour tout a) :

$$\mathbb{P}(E_{k,\ell}|N(t)=i) = \binom{i}{k}\Big((\mu\delta t)^k + o\Big((\delta t)^k\Big)\Big)(1+o(1))(1+o(1))\frac{(\lambda\delta t)^\ell}{\ell!} = \binom{i}{k}(\delta t)^k\frac{(\lambda\delta t)^\ell}{\ell!} + o\Big((\delta t)^k(\delta t)^\ell\Big)$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(E_{k,\ell}|N(t)=i) = \binom{i}{k}\frac{\mu^k\lambda^\ell}{\ell!}(\delta t)^{k+\ell} + o\Big((\delta t)^{k+\ell}\Big)$$

L'autre cas se traite de la même manière.

Puis on applique la proposition 2.3.3, qui permet de négliger tous les évènements « secondaires » qui provoquent une transition de i vers j pendant δt ».

Grâce à (2.29), $p_{i,j}(\delta t) = \circ(\delta t)$ pour $j \geqslant i+2$, ainsi que pour $j \leqslant i-2$ lorsque $i \geqslant 2$ (conséquence de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_{k,\ell} \,|\, \mathrm{N}(t) = i) = \circ(\delta t)$ dès que $k + \ell \geq 2$). Les taux de transitions $a_{i,j}$ sont donc tous nuls pour $|j - i| \geq 2$. Reste juste à calculer :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad p_{i,i+1}(\delta t) = \mathbb{P}(\mathrm{E}_{0,1} \,|\, \mathrm{N}(t) = i) + \circ(\delta t) = \lambda \delta t + \circ(\delta t), \quad \text{donc } a_{i,i+1} = \lambda$$

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n \quad p_{i,i-1}(\delta t) = \mathbb{P}(\mathrm{E}_{1,0} \,|\, \mathrm{N}(t) = i) + \circ(\delta t) = i\mu \delta t + \circ(\delta t), \quad \text{donc } a_{i,i-1} = i\mu$$

$$\forall i \geqslant n \quad p_{i,i-1}(\delta t) = \mathbb{P}(\mathrm{E}_{1,0} \,|\, \mathrm{N}(t) = i) + \circ(\delta t) = n\mu \delta t + \circ(\delta t), \quad \text{donc } a_{i,i-1} = n\mu$$

Le processus stochastique $\big(\mathrm{N}(t)\big)_{t \geqslant 0}$ est donc un PNM dont les taux de transition sont :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lambda(i) = \lambda \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mu(i) = i\,\mu \text{ si } i \leqslant n, \quad \mu(i) = n\,\mu \text{ sinon} \tag{1}$$

Enfin, on dessine le graphe des taux de transition :