Chapitre 16

Espaces probabilisés infinis

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de généraliser la notion d'espace probabilisé, que nous avons vu dans le chapitre 6, à des espaces infinis.

Plan du cours

> *« Et l'espace devenait une simple écume probabiliste en effervescence piquetée de trous de ver. »*

Arthur C. Clarke (1917 – 2008). *Lumière des jours enfuis*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de tribu . . . . □
② Connaître la notion de système complet d'évènements dans le cas général . . . . □
③ Connaître les propriétés d'une probabilité . . . . □
④ Savoir utiliser la propriété de la limite monotone . . . . □
⑤ Savoir démontrer qu'un évènement est négligeable et presque sûr . . . . □
⑥ Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle . . . . □
⑦ Savoir utiliser la formule des probabilités composées . . . . □
⑧ Savoir utiliser la formule des probabilités totales . . . . □
⑨ Connaître la formule de Bayes . . . . □
⑩ Savoir manipuler des évènements mutuellement indépendants . . . . □
⑪ Connaître la définition d'une variable aléatoire . . . . □
⑫ Savoir déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire . . . . □
⑬ Connaître la définition et les propriétés de la fonction de répartition . . . . □

I. Espace probabilisable

1. Tribu

Pour un espace probabilisé fini, si on note Ω l'univers, on utilisait comme ensemble des événements $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. Pour un ensemble Ω infini, il est peu judicieux de prendre toutes les parties comme ensemble des événements. On va prendre certains ensembles seulement, en imposant des propriétés essentielles pour pouvoir parler d'événements, puis plus tard, de probabilité.

Définition 16.1.

Soit Ω un ensemble quelconque. Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de sous-ensembles de Ω ($\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$). On dit que $\mathscr{A}$ est une **tribu** (ou une σ**-algèbre**) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathscr{A}, \overline{A} \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathscr{A}$, alors

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathscr{A}$$

Exemple 16.1

La tribu $\{\varnothing; \Omega\}$ est une tribu, appelée **tribu grossière**. La tribu $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, appelée **tribu discrète**.

Proposition 16.1.

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- $\varnothing \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par union et intersection finie;
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathscr{A}$, alors

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathscr{A}$$

Démonstration

Si $\Omega \in \mathscr{A}$, alors $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathscr{A}$. La troisième propriété découle de la stabilité par passage au complémentaire, et les lois de de Morgan.

Remarque

Lorsque l'ensemble Ω est fini, on prendra toujours comme tribu $\mathscr{P}(\Omega)$, puisque (en prenant de l'avance) on sait calculer la probabilité d'un ensemble fini.

☞ *Exercice 1.*

2. Espace probabilisable

Définition 16.2.

Soit Ω un ensemble, et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. L'ensemble $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Exemple 16.2
L'ensemble $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

Remarque
Puisqu'on est dans le cadre des probabilités, si $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable, tout ensemble $A \in \mathscr{A}$ est appelé **événement**. Ainsi, la tribu $\mathscr{A}$ contient l'ensemble des événements auxquels on va s'intéresser.

3. Système complet d'évènements

Définition 16.3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des événements de $\mathscr{A}$. On dit que (A_i) est un **système complet d'événements** si

- Les A_i sont deux à deux disjoints :
$$\forall\, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$$
- La réunion des A_i est égale à Ω :
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$$

Remarque
On dit que deux événements A_i et A_j sont **incompatibles** lorsqu'ils sont disjoints.

Exemple 16.3
Si $\Omega = \mathbb{N}$, et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors les ensembles $A_i = \{i\}$, pour tout entier i, forment un système complet d'événements.

☞ *Exercice 2.*

II. Probabilité et espace probabilisé

1. Probabilité

Définition 16.4.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0;1]$ vérifiant

- (*probabilité de l'événement certain*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (σ-*additivité*) Pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ **deux à deux incompatibles**, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque
On utilisera souvent la σ-additivité sur des unions finies, plutôt qu'infinies.

2. Propriétés

Propriété 16.2.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
- Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- Si $A, B \in \mathscr{A}^2$ avec $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Démonstration

Les preuves reposent systématiquement sur l'additivité ou σ-additivité des probabilités :

- Ω et $\varnothing$ sont incompatibles ; par additivité de $\mathbb{P}$, on a
$$\mathbb{P}(\varnothing \cup \Omega) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\varnothing) + 1$$
Or $\varnothing \cup \Omega = \Omega$, donc $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\varnothing) + 1$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- A et $\overline{A}$ sont incompatibles par définition, et $A \cup \overline{A} = \Omega$. Donc, par additivité de $\mathbb{P}$:
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
- Si $A \subset B$, notons $C = B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathscr{A}$. Par construction, A et C sont incompatibles, et $A \cup C = B$. Par additivité de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$$
Puisque $\mathbb{P}(C) \geqslant 0$, on en déduit le résultat.

Théorème 16.3.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. Soient A et B deux événements de $\mathscr{A}$. Alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration

Par construction, $A \cap B$ et $A \backslash B$ sont incompatibles, et $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$. Par additivité de $\mathbb{P}$,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \backslash B)$$
Or $\mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B)$ à nouveau par additivité de $\mathbb{P}$ (B et $A \backslash B$ sont incompatibles). Donc
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$$

3. Espace probabilisé

Définition 16.5.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. L'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

La plupart du temps, on ne cherchera pas l'espace probabilisé ; Il sera fixé une fois pour toute, sans être forcément explicitement donné.

III. Propriétés des probabilités

Dans cette section, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Propriété de la limite monotone

Définition 16.6.

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que la suite (A_i) est **croissante** si, pour tout entier i,
$$A_i \subset A_{i+1}$$
- On dit que la suite (A_i) est **décroissante** si, pour tout entier i,
$$A_i \supset A_{i+1}$$

Théorème 16.4. Propriété de la limite monotone

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

- Si la suite (A_i) est croissante, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
- Si la suite (A_i) est décroissante, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple 16.4

On possède une pièce bien équilibrée qu'on lance une infinité de fois. Déterminer la probabilité de n'obtenir jamais pile.

Solution

On note A_n l'événement "n'obtenir aucun pile jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer". Alors, par construction $A_{n+1} \subset A_n$ (puisque si on n'a pas obtenu pile jusqu'au $n+1^{\text{ième}}$ lancer, c'est qu'on n'a pas obtenu pile jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer). Puisque $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$
Ainsi, la probabilité de n'obtenir jamais pile est nulle.

La propriété de la limite monotone se généralise à des événements quelconques :

Proposition 16.5.

Soit (A_i) une suite d'événements de $\mathscr{A}$.Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$$

Démonstration

Il suffit de constater que $\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et $\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

☞ *Exercices 3 et 4.*

2. Evénement vrai presque sûrement

L'exemple précédent nous a donné un événement de probabilité nulle, mais qui n'est pas l'événement impossible : en effet, on peut théoriquement n'obtenir jamais pile, en faisant systématiquement face.

Définition 16.7.

Soit A un événement de $\mathscr{A}$.

- On dit que A est **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A est **presque sûr** (ou **vrai presque sûrement**) si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple 16.5

Dans l'exemple précédent, l'événement "obtenir au moins une fois pile" est presque sûr, et l'événement "n'obtenir jamais pile" est négligeable.

Remarque

Ce cas n'arrivait jamais dans un espace probabilisé fini. En effet, dans ce cas, $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$. C'est une particularité des espaces probabilisés infinis, dont il faut se méfier.

3. Probabilités conditionnelles

La définition de probabilités conditionnelles, vue dans le cas des probabilités finies, se généralise aux espaces probabilisés quelconques.

Définition 16.8.

Soient A et B deux événements, tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de** B **sachant** A, et on note $\mathbb{P}_A(B)$ le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

La fonction $\mathbb{P}_A : \mathscr{A} \to [0;1]$ est également une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Théorème 16.6. Probabilités composées

Pour tous événements $A_1, \cdots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Définition 16.9. Système complet d'évènements

Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un **système complet d'évènements** si :

- Pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$,

...

- $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$

On dit que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements si :

- Pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\displaystyle\mathbb{P}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 1$

Remarque

Un système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements. En revanche, la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 16.7. Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de Ω. Alors, pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Si, de plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$$

Le resultat est vraie si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements.

Démonstration

Par définition,

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} (A_k \cap B) = \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \cap B = \Omega \cap B = B$$

De plus, puisque les (A_i) sont deux à deux disjoints, les $(A_i \cap B)$ le sont également. Par σ-additivité, on en déduit alors que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap B)$$

De plus, puisque $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ pour tout k, on peut conclure que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Exemple 16.6 (Exemple fondamental)

Si $A \in \mathscr{A}$ est un évènement, alors $(A, \bar{A})$ forme un système complet d'évènements. Ainsi, pour tout évènement B, on aura

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

Théorème 16.8. Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de $\mathscr{A}$ de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)$$

Démonstration

Puisque A et B sont de probabilités non nulles, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)\end{aligned}$$

4. Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements

La notion d'indépendance mutuelle se généralise à une suite infinie d'événements :

Définition 16.10.

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements de $\mathscr{A}$. On dit que la suite (A_i) est **mutuellement indépendante** si pour tout sous ensemble fini $J\subset\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i)$$

☞ *Exercices 5, 6 et 7.*

IV. Variables aléatoires

Dans cette section, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Définition

Définition 16.11.

Une **variable aléatoire** X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$\{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{A}$$

On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque

La condition imposée à X permet simplement de pouvoir calculer la probabilité de plusieurs ensembles, du type $\{\omega\in\Omega, X(\omega)=x\}$, ... Sans cette condition, les ensembles qu'on manipule ne sont *a priori* pas dans la tribu $\mathscr{A}$, et on ne peut donc pas *a priori* calculer leur probabilité.

Exemple 16.7

On lance un dé bien équilibré et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}$, et $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

Remarque

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, alors $X+Y$, $\min(X,Y) : \omega \mapsto \min(X(\omega), Y(\omega))$ et $\max(X,Y) : \omega \mapsto \max(X(\omega), Y(\omega))$ sont également des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

Définition 16.12.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la fonction

$$g(X) : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto g(X(\omega)) \end{array}$$

est également une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Exemple 16.8

En prenant pour g la fonction carrée, on peut définir la variable aléatoire $X^2 : \omega \mapsto X(\omega)^2$.

2. Propriétés

Définition 16.13.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}$$

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}$$

Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on note également

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note

$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega, x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

Remarque

Ces différents ensembles sont dans la tribu $\mathscr{A}$ par construction de X. Ainsi, on pourra calculer leur probabilité, et on notera par exemple

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}([X = x]) \text{ et } \mathbb{P}(x \leqslant X \leqslant y) = \mathbb{P}([x \leqslant X \leqslant y])$$

Exercice 16.9

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

Solution

$[X = 1]$ correspond à l'ensemble des tirages ayant un 6 au premier lancer ; $[X \leqslant 2]$ correspond à l'ensemble des tirages ayant un 6 au premier lancer, ou alors un 6 au deuxième lancer mais pas au premier. Par construction, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

Théorème 16.9.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors, la suite des $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ ...

(ou $([X=i])_{i\in\mathbb{Z}}$) est un système complet d'événement associé à la variable aléatoire X.

Démonstration

Les ensembles $[X=i]$, par construction, sont deux à deux disjoints, et puisque la variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$), la réunion des $[X=i]$ recouvre bien Ω.

Exemple 16.10

Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire étant à valeur dans $\mathbb{N}^*$, la suite $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ représente un système complet d'événements de Ω.

3. Loi d'une variable aléatoire

Définition 16.14.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $\mathbb{P}(X=x)$ pour tout réel x.

Remarque

Contrairement aux variables aléatoires finies, où on donnait la loi de probabilités sous forme de tableau, il faudra ici donner une formule plus générale.

Exemple 16.11

Dans le cas de notre lancer de dé, où X désigne le premier lancer où on obtient 6. Alors $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{6}.\frac{1}{6}$, et plus généralement

$$\mathbb{P}(X=i)=\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}$$

Remarque

Cette loi s'appelle loi géométrique. Nous y reviendrons plus tard.

Théorème 16.10.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i)=1$$

Démonstration

En effet, dans ce cas, la suite $([X=i])$ forme un système complet d'événements.

Exemple 16.12

Dans notre exemple, en utilisant la série géométrique (avec $-1\leqslant \frac{5}{6}<1$) :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=1$$

Remarque

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on dit que la variable aléatoire est **discrète**.

☞ *Exercice 8.*

4. Fonction de répartition

Définition 16.15.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On appelle **fonction de répartition** de X, et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriété 16.11.

La fonction de répartition F_X de X est une fonction croissante, continue à droite en tout point, et telle que

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

Démonstration

Si $x \leqslant y$, alors

$$F_X(y) = \mathbb{P}(X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant x) + \mathbb{P}(x < X \leqslant y) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x)$$

donc F_X est bien croissante.

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

On admettra la continuité à droite en tout point.

Théorème 16.12.

Pour connaitre la loi de probabilité de X, il faut et il suffit de connaitre la fonction de répartition de X.

Démonstration

Dans le cas où X est à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on constate par exemple que

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X \leqslant i) - \mathbb{P}(X \leqslant i-1) = F_X(i) - F_X(i-1)$$

Le cas où X est à valeur dans $\mathbb{R}$ quelconque est admis.

Exercices 16

Exercices

Généralités

●○○ **Exercice 1 Une tribu** (5 min.)

Soit $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Montrer que $\mathscr{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω. Montrer que $\mathscr{A}$ n'est pas égale à $\mathscr{P}(\Omega)$.

●○○ **Exercice 2 Des évènements** (10 min.)

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k-ième lancer donne pile ».

1. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants :
$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k, \qquad E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} \bar{A}_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k\right), \qquad E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_k.$$
2. Écrire à l'aide des A_k l'évènement B_n « on obtient au moins une fois pile après le n-ième lancer ».
3. Écrire à l'aide des A_k les évènements :
   (a) C_n : « on n'obtient plus que des piles à partir du n-ième lancer ».
   (b) C : « on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer ».

Limite monotone

●○○ **Exercice 3 Une chaîne de Markov** (30 min.)

Une araignée se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC. A l'instant 0, elle est en A. Puis, à chaque instant instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace :

- si elle est en A, elle va en B ;
- si elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- si elle est en C, elle y reste.

On note E l'évènement « la puce arrive en C ». On cherche à montrer que E a lieu presque sûrement.

1. Représenter la situation avec un graphe.
2. Montrer que l'araignée ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D_n que l'araignée arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Que dire de D_p et D_q si $p \neq q$?
5. En déduire que $\mathbb{P}(E) = 1$.

●○○ **Exercice 4 Et la formule des probabilités totales** (30 min.)

Un joueur lance une pièce non truquée, équilibrée, jusqu'à l'obtention d'un premier pile. S'il lui a fallu n (n entier naturel non nul) lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi $n!$ billets dont un seul gagnant.

On définit, pour tout entier naturel non nul, les évènements :

- E_n : « le joueur obtient le premier pile au lancer n »
- P_n : « le joueur obtient pile au n-ième lancer »
- F_n : « le joueur obtient face au n-ième lancer »
- F : « le joueur n'obtient jamais pile »

1. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$. Exprimer $\overline{F}$ en fonction des E_n, puis en déduire $\mathbb{P}(\overline{F})$ et $\mathbb{P}(F)$.
2. On définit l'évènement G : « le joueur obtient le billet gagnant ». Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $\mathbb{P}_{E_n}(G)$, puis en déduire $\mathbb{P}(G)$.
3. Le jeu est-il équilibré (on donne $\sqrt{e} \approx 1,65$) ?

Autres exercices

●○○ Exercice 5 Une autre chaîne de Markov (20 min.)

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle selon le procédé suivant :

- si la particule se trouve en B, elle y reste.
- si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
- à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : "à la n^{ieme} seconde, la particule se trouve en A (resp. B, C)". On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. Que valent a_1, b_1, c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$$
(*On pourra d'abord montrer que* (c_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2).
En déduire a_n et b_n en fonction de n.
4. Etudier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Intérpréter.

●○○ Exercice 6 Un jeu (20 min.)

On dispose de deux pièces identiques d'apparence, la pièce A donnant Pile avec une probabilité a, et la pièce B donnant Pile avec une probabilité b.
Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce pour le lancer suivant.
On note, pour tout $k \geqslant 1$, A_k l'événement "le k-ième lancer se fait avec la pièce A", $B_k = \overline{A_k}$ et E_k l'événement "le k-ième lancer amène Pile".

1. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E_k)$ et $\mathbb{P}(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(A_{k+1})$ et $\mathbb{P}(A_k)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(E_k)$.

●○○ Exercice 7 Un autre jeu (30 min.)

Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7, et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (si nécessaire), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminer la probabilité des événements G_A (resp G_B) : "le joueur A obtient 7" (resp "le joueur B obtient 6")

2. On introduit les événements B_n (resp. A_n) : “le joueur B (resp A) gagne à son n-ième lancer”. Déterminer la probabilité de ces événements.
3. On note V_A (resp. V_B) l'événement “le jouer A (resp. B) gagne”. Décrire ces deux événements en fonction des événements précédents. En déduire la probabilité de V_A et V_B. Le jeu est-il équilibré ?

●●○ Exercice 8 Des boules (20 min.)

Soit $n > 0$. On dispose d'une boite A contenant n boules numérotées de 1 à n, et de n boîtes $A_1 \cdots A_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boite A_k contient k boules numérotées de 1 à k.
On tire au hasard une boule de A. En désignant k le numéro obtenu, on tire alors au hasard une boule dans la boite A_k. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue du 2e tirage. Déterminer la loi de X.

Sur les chaînes de Markov

●●○ Exercice 9 Présentation des chaînes de Markov (45 min.)

Calcul matriciel

On définit les matrices A, B par $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{12}A$.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & -11 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer $P^{-1}BP$. En déduire une matrice diagonale D telle que $B = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0$, $B^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) Déterminer l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

Application à un processus aléatoire

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;

M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;

S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noel choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;
(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
(iii) Le client qui a acheté un jouet scientifique optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Le volume des ventes de ce commerçant vient de se composer d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S.

On désigne par p_n, q_n, r_n, les probabilités respectives des jouets T, M, S dans les ventes du distributeur le n-ième Noël suivant.

1. Montrer que le triplet $(p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1})$ s'exprime en fonction du triplet (p_n, q_n, r_n).
2. Déterminer une matrice C telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{C} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \mathrm{C}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer (p_n, q_n, r_n) en fonction de n.
5. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente si l'attitude des consommateurs reste constante ?

Résumé

Le processus décrit dans cet exercice est un exemple de chaîne de Markov. Pour simplifier les notations, nous allons coder les catégories T, M et S par les nombres 0, 1 et 2 et introduire la suite de variables aléatoires (X_n), où X_n vaut 0, 1 ou 2 selon que le client choisit la n-ème année un jouets de la catégorie T, M et S. On a ainsi $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0)\dots$

La caractéristique d'une chaîne de Markov est que la valeur de X_n (plus exactement la probabilité qu'elle prenne chaque valeur) ne dépend que de celle de X_{n-1} et non de ce qui s'est passé avant. C'est bien le cas dans notre exemple. La matrice C est appelée **matrice de transition** de la chaîne.

1. Quelle propriété possède C ?
2. Représenter les probabilités de passage de X_n d'une valeur à une autre sur un graphe.
3. Notons p_∞, q_∞, r_∞ les limites de (p_n), (q_n), (r_n) ; et $\pi_\infty = \begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \\ r_\infty \end{pmatrix}$? Que vaut $\mathrm{C}\pi_\infty$?

   Cette convergence des probabilités vers l'état stable, indépendemment de l'état initial, est une propriété importante des chaînes de Markov : on dit qu'elle est **ergodique**.

   Pour des renseignements supplémentaires sur les chaînes de markov :