14

Chapitre

Espaces vectoriels

Résumé

Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile. Il sera enrichi dans un prochain chapitre, et approfondi l'année prochaine.
Il doit être maitrisé dans son ensemble.

Plan du cours

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :

- Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel . □
- Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs . . . . □

② Maitriser la notion de base :

- Savoir montrer qu'une famille est libre . . . . □
- Savoir montrer qu'une famille est génératrice . . . . □
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . □
- Connaître les bases canoniques des espaces usuels . . . . □
- Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . □

I. Espaces vectoriels

1. Généralités

Définition 14.1.

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si $\forall\,(x,y)\in E^2, x+y\in E$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si $\forall\, x\in E, \forall\,\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\cdot x\in E$.

Exemple 14.1

L'exemple le plus classique est l'ensemble des matrices $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La loi d'addition de matrices est une loi de composition interne, et la multiplication par un réel est une loi de composition externe.

Définition 14.2.

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi interne, noté $+$, et d'une loi externe, noté $\cdot$. On dit que E est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ si les lois vérifient les propriétés suivantes :

- (commutativité de $+$) : $\forall\,(x,y)\in E^2, x+y=y+x$.
- (associativité de $+$) : $\forall\,(x,y,z)\in E^3, (x+y)+z=x+(y+z)$
- (neutre pour $+$) : il existe un élément, noté 0_E, tel que $\forall\, x\in E, x+0_E=0_E+x=x$.
- (inverse pour $+$) : pour tout $x\in E$, il existe un élément $y\in E$, tel que $x+y=y+x=0_E$. Cet élément est appelé *opposé* de x, et est noté $-x$.
- (neutre pour $\cdot$) $\forall\, x\in E, 1.x=x$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}, \forall\,(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\, x\in E, (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$
- $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\, x\in E, \lambda.(\mu.x)=(\lambda\times\mu).x$.

Remarque

Si E est un espace vectoriel, les éléments de E sont alors appelés les **vecteurs**, et les réels sont appelés les **scalaires**. L'élément 0_E est appelé vecteur nul.

Remarque

Les quatre premières propriétés font de $(E,+)$ ce qu'on appelle un **groupe abélien** ou groupe commutatif.

Remarque

Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe est très souvent omis. On notera plus souvent $2x$ plutôt que $2\cdot x$.

Proposition 14.1. Exemple fondamental

Les ensembles $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $n\geqslant 1$, munis de l'addition de matrices, et de la multiplication par un réel, sont des espaces vectoriels.

Démonstration

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alors

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ \vdots \\ b_n+a_n \end{pmatrix} = B+A$$

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix} = A+(B+C)$$

$$A+0_{n,1} = \begin{pmatrix} a_1+0 \\ \vdots \\ a_n+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_1 \\ \vdots \\ 0+a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A$$

$$A+(-A) = \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) \\ \vdots \\ a_n+(-a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1}$$

$$1.A = \begin{pmatrix} 1.a_1 \\ \vdots \\ 1.a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A$$

$$\lambda.(A+B) = \lambda.\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1+b_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n+b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n+\lambda b_n \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda.A+\lambda.B$$

$$(\lambda+\mu).A = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)a_1 \\ \vdots \\ (\lambda+\mu)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n+\mu a_n \end{pmatrix} = \lambda.A+\mu.A$$

$$\lambda.(\mu.A) = \lambda.\begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \vdots \\ \mu a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda\mu a_n \end{pmatrix} = (\lambda\times\mu).A$$

En première année, nous n'utiliserons que ces espaces vectoriels, dans le cas où $n = 1, 2, 3$ ou 4.

2. Règles de calculs

On se place ici dans un espace vectoriel E.

Proposition 14.2.

Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a

- $\lambda.0_E = 0_E$ et $0.x = 0_E$
- $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.
- $x + (-y) = x - y$.

Théorème 14.3.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in E$. Alors
$$\lambda . x = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E \quad \text{ou} \quad \lambda = 0$$

3. Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel.

Définition 14.3.

On appelle **famille de vecteurs** de E une n-liste $(e_1, \cdots, e_n)$ d'éléments de E.

Exemple 14.2

Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors (A, B) désigne une famille de deux vecteurs de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition 14.4.

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. Soit x un vecteur de E. On dit que x est une **combinaison linéaire** de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ s'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ tels que
$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$
Les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont alors les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque

Il n'y a pas forcément unicité de la combinaison linéaire.

Exemple 14.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, $2.A - 3.B = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de A et B.

Méthode

Pour montrer qu'un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on résout un système pour déterminer (ou non) les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.

Exercice 14.4

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que X est combinaison linéaire de A et B.

Solution

On écrit $X = \lambda A + \mu B$. On a alors
$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3\mu \\ 2\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

On résout alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda & - & 3\mu & = & -5 \\ 2\lambda & + & \mu & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda & - & 3\mu & = & -5 \\ & & 7\mu & = & 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi, $X = A + 2B$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Définition

Définition 14.5.

Soit E un espace vectoriel. Soit F un sous ensemble de E non vide. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si les restrictions des lois $+$ et $\cdot$ à F font de F un espace vectoriel.

Exemple 14.5

Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 14.4.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Alors $0_E \in F$ et F est un espace vectoriel.

Démonstration

Par définition, F est un espace vectoriel. Par propriété, si $x \in F$ (puisque F est non vide), alors $0.x \in F$ c'est-à-dire $0_E \in F$.

Proposition 14.5.

Soit F un sous ensemble d'un espace vectoriel E. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$ (F est stable par addition)
- $\forall x \in F, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire)

Remarque

- La première propriété se vérifie en général en montrant que le neutre 0_E est dans F.
- Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en une seule :

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x + y \in F$$

Méthode

On utilise la proposition précédente pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exercice 14.6

Montrer que $F = \left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution

En effet,

- $0_{2,1} \in F$: il suffit de prendre $t = 0$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda.A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

en prenant $t = \lambda a + b$.

Théorème 14.6.

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire homogène de n équations à n inconnues. L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Démonstration

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée au système $\mathscr{S}$. Alors l'ensemble des solutions F du système $(\mathscr{S})$ s'écrit également

$$F = \left\{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0_{n,1}\right\}$$

avec $0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $F \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $0_{n,1} \in F$. En effet, $M.0_{n,1} = 0_{n,1}$ par définition de la matrice nulle.
- Soient X et Y dans F, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$M.(\lambda X + Y) = \lambda M.X + M.Y = 0_{n,1} + 0_{n,1} = 0_{n,1}$$

puisque $MX = MY = 0_{n,1}$. Donc $\lambda X + Y \in F$.

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4*

2. Sous-espaces engendrés

On se donne un espace vectoriel E.

Définition 14.6.

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(e_1, \cdots, e_p)$, et on note $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi,

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \Leftrightarrow \exists\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\quad x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

Exemple 14.7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda.A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Vect(A) est appelée **droite vectorielle**.

Théorème 14.7.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 14.8.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors

- $\forall\, k \in [\![1, p]\!], e_k \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$
- $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel contenant $e_1, \cdots, e_p$, nécessairement, $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \subset \text{F}$.
- Si $\text{F} = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_p$, alors $\text{F} = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- Si $(a_1, \cdots, a_p)$ sont des réels tous non nuls, et si $\text{F} = \text{Vect}(a_1 e_1, \cdots, a_p e_p)$, alors $\text{F} = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.

Exemple 14.8

- Soit $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Vect(A)} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
- Soient $\text{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Vect(A, B, C)} = \text{Vect(A, B)}$ puisque $\text{C} = \text{A} + \text{B}$.
- Soit F un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs A et B précédents. Alors, nécessairement, $\text{Vect(A, B)} \subset \text{F}$.

☞ *Exercices 5 et 6*

III. Base d'un espace vectoriel

1. Définition

Définition 14.7.

Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** de E si, pour tout vecteur x de E, il existe une *unique* n-liste $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ de réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$

Exemple 14.9

Si $\text{F} = \left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\}$, alors tout élément de F s'écrit de manière unique sous la forme $t.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la famille composée du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de F.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base d'un espace vectoriel E, on prend $x \in \mathrm{E}$ et on résout $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = x$. S'il existe une unique solution, alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est bien une base de E.

Exemple 14.10

Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche a et b tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ 2a & + & 3b & = & y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ & & b & = & y-2x \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer, donc il possède une unique solution.

Bilan : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Exercices 9 et 10*

2. Famille libre, famille génératrice

Dans la définition d'une base, il y a deux éléments importants : l'existence d'une combinaison linéaire, et l'unicité de celle-ci. Cela nous amène à définir deux concepts :

Définition 14.8.

Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_{\mathrm{E}} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

  Si elle n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.
- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **génératrice** si $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = \mathrm{E}$.

Remarque

Lorsqu'une famille est libre, cela implique que s'il y a une combinaison linéaire de ses éléments, celle-ci est forcément unique.

En effet, supposons que l'on puisse écrire

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{k=1}^{p} \mu_i e_i$$

Alors, en soustrayant les deux expressions de x, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p}(\lambda_i - \mu_i)e_i = 0$$

Par définition de la liberté, cela implique que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$: il y a bien unicité de la décomposition.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = 0_E$ et on résout le système. S'il admet comme seule solution $(0, \cdots, 0)$ alors elle est libre, sinon elle est liée.

Exemple 14.11

Montrer que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre.

Solution

On cherche a et b deux réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a+2b \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors $a = 0$ puis $b = 0$. Ainsi, la famille est libre.

Remarque (Cas d'une famille de deux vecteurs)

Lorsqu'une famille est composée de deux vecteurs (u, v), celle-ci est liée si et seulement si il existe (α, β) tels que $\alpha u + \beta v = 0$, c'est-à-dire si un des vecteurs s'exprime comme un multiple de l'autre. Ainsi, si on voit rapidement que ce n'est pas le cas, on peut conclure : on signalera que les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par exemple, dans l'exercice 14.11, les deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires (par exemple, en regardant le 0 en 3^{e} position). Ainsi, la famille est libre.

☞ *Exercices 7 et 8*

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = x$ avec $x \in E$ et on résout le système. S'il admet au moins une solution alors elle est génératrice, sinon elle ne l'est pas et on exhibe alors un contre-exemple.

Remarque

- Une famille libre est une famille dans laquelle aucun vecteur ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Ainsi, tout vecteur est « utile » dans la famille.

- Une famille génératrice est une famille qui permet de récupérer, par combinaison linéaire, tout vecteur de E ; en revanche, plusieurs combinaisons linéaires peuvent mener au même vecteur : il n'y a pas forcément unicité de la décomposition.

Théorème 14.9. Lien entre famille libre, génératrice et base

Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1,\cdots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. $(e_1,\cdots,e_p)$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

3. Base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Remarque

On s'intéresse à $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$A=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, les trois matrices $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ permettent de décrire toutes les matrices de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: (e_1,e_2,e_3) représente une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Définition 14.9.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $e_1=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ des matrices de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$a_1.e_1+\cdots+a_n.e_n$$

où $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. La famille de vecteurs $(e_1,\cdots,e_n)$ forme une **base**, appelée **base canonique** de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 14.12 (Cas $n=2,3,4$)

- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

Il n'y a pas unicité de la base. Par exemple, dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment également une base.

Définition 14.10.

Vous verrez l'année prochaine que toute base d'un espace vectoriel possède le même nombre d'éléments : ainsi, dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les bases possèdent 2 vecteurs. On appelle ce nombre la **dimension** de l'espace vectoriel, et on le notera $\dim(E)$.

Exemple 14.13

$\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 2, et plus généralement $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension n.

Méthode

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on détermine d'abord une base, et on conclut. Pour cela, on essaie de l'expliciter comme un espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs. On vérifie ensuite si celle-ci est libre.

Exemple 14.14

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x+y=0 \right\}$. Déterminer la dimension de F.

Solution

Remarquons qu'on peut écrire

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ y=-x \right\}$$

soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R} \right\}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R} \right\}$$

et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de F :

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\dim(F) = 1$.

☞ *Exercices 11 et 12*

Exercices

14

Exercices

Sous-espaces vectoriels

●○○ **Exercice 1 Sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$** (20 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x+3y=0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2+y=0 \right\}$

●○○ **Exercice 2 Sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$** (10 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x+y=0 \text{ et } x-y-2z=0 \right\}$

●○○ **Exercice 3 Des sous-espaces et des matrices** (10 min.)

On se donne $A \in \mathfrak{M}_3$. On note

$$E = \left\{M \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad AM = 0\right\} \text{ et } F = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad AM = MA\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et que F un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 4 Des sous-espaces en tout genre** (20 min.)

Déterminer si les sous-ensembles suivant sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels usuels.

- $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+y+z=0,\ x-y+z=0\right\}$.
- $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad 2x+z=0,\ x-y-2z=0,\ y+2z=0 \right\}$.
- $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Espace vectoriel engendré

●○○ **Exercice 5 Combinaisons linéaires** (10 min.)

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2. Déterminer $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

●○○ **Exercice 6 Egalité de sous-espaces vectoriels** (10 min.)

On note $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, x)$.

▶ ***Méthode***

Pour montrer une égalité d'espace avec des sous-espaces vectoriels, on procède par double inclusion : si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.
Enfin, rappelons que si $(e_1, \cdots e_n) \in F^n$, alors $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n) \subset F$, qui va nous servir ici.

Famille libre, base

●○○ **Exercice 7 Libérééééé, ...** (10 min.)

La famille (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-elle libre, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

●○○ **Exercice 8 Liberté chérie** (20 min.)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Si elles sont liées, donner une relation de dépendance.

1. $(2,2,1), (1,3,1), (-2,1,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 9 Une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$** (10 min.)

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 10 Retour à la base** (20 min.)

Déterminer si les familles suivantes forment des bases des espaces vectoriels indiqués.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 11 Systèmes de générateurs** (20 min.)

Pour chacun des espaces suivants, déterminer un système de générateurs, et en déduire que ce sont des sous-espaces vectoriels.

- $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x - y + 2z = 0 \right\}$.
- $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x + y + 2z = 0,\ 2x - y - z = 0 \right\}$.
- $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad x + t = 0,\ x + y - z = 0 \right\}$.

●○○ Exercice 12 Base de sous-espaces vectoriels (10 min.)

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels des exercices 1, 2 et 4, ainsi que leur dimension.