13

Chapitre

Calcul différentiel

Résumé

Dans ce chapitre, on (re)définit rigoureusement la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. On utilise ensuite celle-ci pour l'étude de fonctions (variation, convexité), et pour obtenir de jolis résultats (inégalité des accroissements finis, inégalité de convexité).

Plan du cours

Chapitre 13. **Calcul différentiel**

I. Dérivabilité en un point 3
II. Dérivabilité sur un intervalle 8
III. Application de la dérivation 13
IV. Convexité 16
V. Exercices bilans 21
Exercices 25

> *« Sans doute les infinis et les infiniment petits que nous concevons sont-ils imaginaires, mais aptes à déterminer des choses réelles, comme le font généralement du reste les racines imaginaires. Ils se trouvent dans les régions idéales, dont les choses sont régies comme par des lois, même si elles ne se trouvent pas dans les parties de la matière. »*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – *Lettre à Jean Bernoulli (1698)*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dérivabilité :

- Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement . . . . . . ☐
- Savoir utiliser la dérivabilité à droite et à gauche pour démontrer une dérivabilité . . . . ☐
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point . . . . . . ☐

② Savoir utiliser les formules de dérivation :

- connaître les dérivées des fonctions usuelles . . . . . . ☐
- savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une composée . . . . . . ☐
- savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque . . . . . . ☐

③ Savoir utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point . . . . . . ☐

④ Concernant les applications :

- savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis . . . . . . ☐
- connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction . . . . . . ☐
- savoir déterminer la convexité d'une application . . . . . . ☐
- savoir utiliser la convexité pour en déduire des inégalités . . . . . . ☐

⑤ Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) . . . . . . ☐

I. Dérivabilité en un point

1. Définition

Définition 13.1.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **dérivable** en x_0 si la fonction

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

appelée **taux d'accroissement** de f en x_0, admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Remarque

En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, on détermine le taux d'accroissement

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

et on cherche sa limite en x_0. Si la limite est finie et vaut a, la fonction f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = a$.

Exemple 13.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en 1.

Solution

Déterminer le taux d'accroissement :

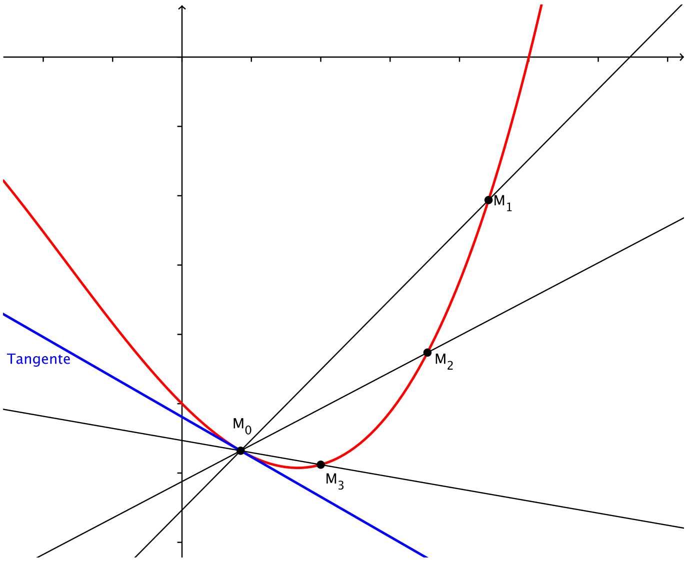
$$\tau_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \xrightarrow[x \to 1]{} 2$$

Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

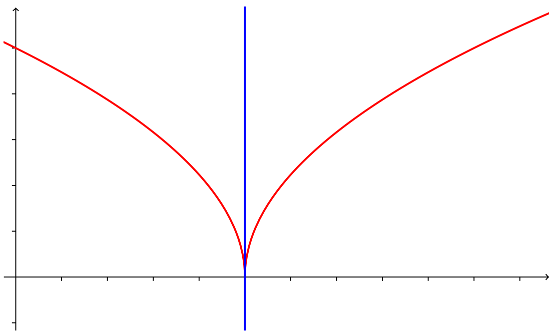
2. Interprétation géométrique

Si on note M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$, alors le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite (M_0M). Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, la famille de droites (M_0M) admet une position limite lorsque x tend vers x_0 : la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite est appelée **tangente** en M_0 à la courbe de f.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, la courbe de f possède en x_0 une **tangente verticale** au point M_0, d'équation $x = x_0$.



Remarque
Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet donc une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple 13.2
Puisque la fonction carrée est dérivable en $x_0 = 1$, alors sa courbe représentative admet au point $M_0(1,1)$ une tangente, d'équation $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

☞ *Exercices 1 et 2*

3. Développement limité d'ordre 1

Supposons la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable au point d'abscisse $x_0 \in I$. Alors, la fonction ε, définie par

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)}{x - x_0}$$

est bien définie au voisinage de x_0, et est de limite nulle.

Définition 13.2.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Alors, au voisinage de x_0, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où ε est de limite 0 en x_0.
Cette écriture est appelé **développement limité** à l'ordre 1 en x_0 de la fonction f.

Remarque

Si f est dérivable en x_0, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.
Réciproquement, si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de la forme

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec ε de limite nulle en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$.

Exemple 13.3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ admet un développement limité en 1 et

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)\varepsilon(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) = \underbrace{2x-1}_{\text{eq. de la tangente}} + (x-1)\varepsilon(x)$$

4. Dérivabilité et continuité

La notion de dérivabilité en un point est plus forte que la continuité. En effet :

Théorème 13.1.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration

Si f est dérivable en x_0, on peut donc écrire, au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0)$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f est bien continue en x_0.

⚠ **Attention**

Une fonction peut être continue en un point, sans être dérivable. Par exemple, la fonction racine est continue en 0. Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\tau_0(x) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

5. Dérivabilité à droite et à gauche

Puisqu'on dispose de limites à droite et à gauche, on peut également s'intéresser à la dérivabilité à droite et à gauche en un point.

Définition 13.3.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière (*pour pouvoir parler de limite à droite et à gauche*).

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à droite* en x_0. Dans ce cas, on note

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à gauche* en x_0. Dans ce cas, on note

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

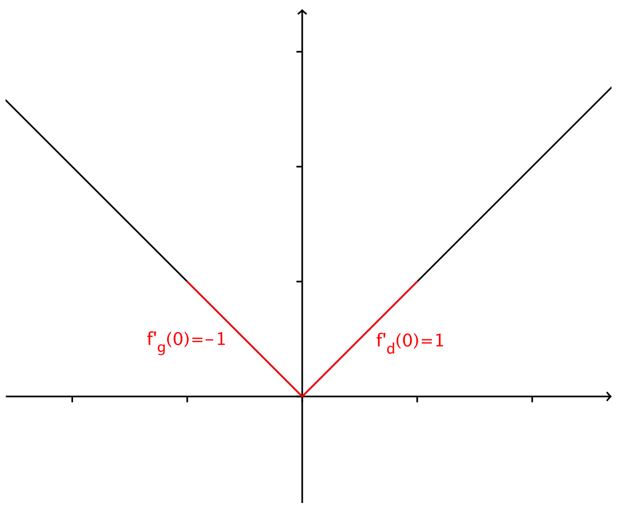
On dispose du même théorème que pour les limites :

Théorème 13.2.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **et** $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque

Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche en un point, sans que $f'_d(x_0)$ soit égal à $f'_g(x_0)$. Dans ce cas, la courbe admet des **demi-tangentes**. Par exemple, si $f : x \mapsto |x|$, f admet une dérivée à droite en 0 (qui vaut $f'_d(0) = 1$) et une dérivée à gauche en 0 (qui vaut $f'_g(0) = -1$).



Les nombres dérivés à droite et à gauche étant distincts, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque

Si la fonction f n'admet ni dérivée à droite ni à gauche en x_0, mais que

$$\lim_{x \to (x_0)^{-/+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$

alors la courbe de f admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0.

Exemple 13.4
La fonction racine admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

6. Nombre dérivé et extremum

Théorème 13.3.
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière de I. On suppose que f est dérivable en x_0. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration
Supposons que f admette un maximum en x_0. Alors, sur un intervalle J autour de x_0, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$. Mais alors :

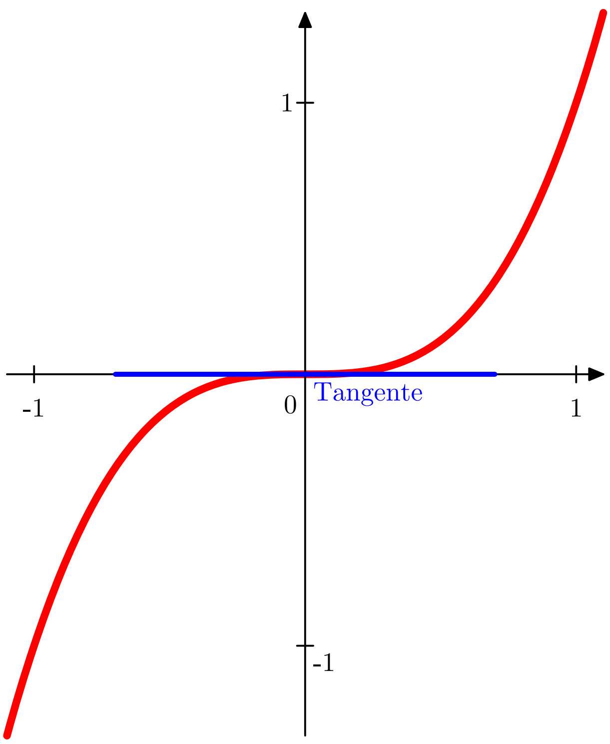
- Pour $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f_g'(x_0) \geqslant 0$.
- Pour $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f_d'(x_0) \leqslant 0$.

Et donc $f'(x_0) = 0$.

Remarque
Ainsi, si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local, alors la tangente y est **horizontale**.

⚠ **Attention**

- La réciproque n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas nécessairement que f admet un extremum local en x_0. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.



- Le théorème précédent n'est valable que pour tout point en dehors de la frontière de I. Ainsi, une fonction peut admettre un extremum local sans pour autant que la dérivée en ce point soit nulle : dans ce cas, elle admet son extremum local en une borne de l'intervalle.

II. Dérivabilité sur un intervalle

1. Fonction dérivée

Définition 13.4.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est alors notée $f' : x \mapsto f'(x)$ ou $\frac{df}{dx} : x \mapsto \frac{df}{dx}(x)$.

Notation

On dit que f est de classe $\mathscr{D}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I, et si sa **dérivée** f' est **continue** sur I.

2. Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 13.4.

On dispose des dérivées usuelles suivantes :

$\mathscr{D}_f$	$f(x) =$	dérivable sur	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	x^n $(n < 0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^{+*}$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$

Démonstration

Démontrons la première ligne du tableau. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto x^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Notons T le taux d'accroissement en x_0. On a donc

$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

- Premier cas : $x_0 = 0$. Dans ce cas $\mathrm{T}(x) = x^{n-1} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 = n \times 0^{n-1}$.

- Deuxième cas : $x_0 \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire :
$$\mathrm{T}(x) = \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0} = x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1}$$
Il y a n termes dans la somme, et chaque terme tend vers x_0^{n-1} lorsque x tend vers x_0. Donc
$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{T}(x) = n\times x_0^{n-1}$$

3. Opérations sur les dérivées

Théorème 13.5.

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

1. $f+g$ et λf sont dérivables en x_0, et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$ et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ (*linéarité de la dérivation*)
2. $f\times g$ est dérivable en x_0, et on a
$$(f\times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$
3. Si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Remarque

Ainsi, si f et g sont dérivables sur I, on a $(f+g)' = f'+g', (\lambda f)' = \lambda f', (f\times g)' = f'g+fg'$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Démonstration

Montrons le deuxième point. Notons T le taux d'accroissement de $f\times g$ en x_0. On a donc
$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
et donc
$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
Puisque f est dérivable en x_0
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$
Puisque g est dérivable en x_0, g est continue en x_0. On a donc
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$$
Par somme et produit des limites, on a donc
$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{T}(x) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$
Les autres se font de la même manière.

Théorème 13.6.

Soient $f : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J}\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathrm{I})\subset \mathrm{J}$ (pour pouvoir composer les …

fonctions). Si f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0, et on a

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$$

Remarque

Ainsi, si f et g sont dérivables respectivement sur I et J, alors $g\circ f$ est dérivable sur I, et on a $(g\circ f)'=g'\circ f\times f'$.

⚠ **Attention**

On fera attention à bien justifier la dérivabilité d'une fonction composée

Exemple 13.5

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par $f(x)=\ln(x^2+1)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Solution

La fonction $x\mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1;+\infty[\subset\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

Proposition 13.7. Composées particulières

Soit u une fonction dérivable sur I.

- Pour tout entier $n>0$, la fonction u^n est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^n)'=n\,u'\,u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est $(e^u)'=u'e^u$.
- Si u est strictement positive sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si u est strictement positive sur I, u^α est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^\alpha)'=\alpha\,u'\,u^{\alpha-1}$.
- Si u est strictement positive sur I, $\ln u$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

Exemple 13.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^{-x^2}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Solution

Puisque $x\mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

☞ *Exercice 3.*

4. Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 13.8.

Soit $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ une fonction bijective, et soit $f^{-1}:f(\mathrm{I})\to\mathrm{I}$ sa fonction réciproque. Soit $x_0\in\mathrm{I}$. On …

suppose que f est dérivable en x_0.

- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

- Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.

Méthode

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en réel y_0 :

- On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$) et on montre que f est dérivable en x_0.
- On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$.

On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en y_0, et que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exercice 13.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1[$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer sa fonction dérivée.

Solution

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout réel x,

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par composée,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) =]0;1[$.

2. Remarquons que

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(2)} \text{ car x>0}$$

Or f est dérivable en $\sqrt{\ln(2)}$ et

$$f'\left(\sqrt{\ln(2)}\right) = -2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-(\sqrt{\ln(2)})} = -2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-\ln(2)} \neq 0$$

Ainsi, f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-\ln(2)}}$$

3. Soit $y \in]0;1[$. De la même manière,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2} = y \Leftrightarrow -x^2 = \ln(y) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(y)}$$

(qui a bien un sens car $y\in]0;1[$ donc $-\ln(y)>0$). Or, f est dérivable en $\sqrt{-\ln(y)}$ et

$$f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right)=-2\sqrt{-\ln(y)}\mathrm{e}^{-(\sqrt{-\ln(y)})}=-2\sqrt{-\ln(y)}\mathrm{e}^{\ln(y)}=-2y\sqrt{-\ln(y)}\neq 0$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et

$$f'(y)=\frac{1}{f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right)}=\frac{1}{-2y\sqrt{-\ln(y)}}$$

Remarque

- Dans l'exercice précédent, on a en réalité montré que
$$f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{-\ln(y)}$$
Ainsi $f^{-1}:]0;1[\to\mathbb{R}$ est définie par,
$$\forall\ y\in]0;1[,f^{-1}(y)=\sqrt{-\ln(y)}$$
On peut donc remarquer que f^{-1} est bien dérivable sur $]0;1[$ par composée, et
$$(f^{-1})'(y)=\frac{-\frac{1}{y}}{2\sqrt{-\ln(y)}}$$
- Si la dérivée f' ne s'annule jamais, la fonction f^{-1} est donc toujours dérivable. Dans l'exercice précédent, f' était toujours strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Théorème 13.9. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Soit I un intervalle, et $x_0\in\mathrm{I}$. Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I}\backslash\{x_0\}$.
- f' admet une limite finie l lorsque x tend vers x_0.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a $f'(x_0)=l$.

Remarque

Ce théorème est très fort, puisqu'il permet de conclure que f est dérivable en x_0 sans avoir à étudier la dérivabilité en tant que telle. Il suffit d'étudier la limite de la dérivée.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est de classe $\mathscr{C}^1$, on utilisera très souvent le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$:

- on montre que f est continue sur I.
- on montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I sauf en un (ou plusieurs) points.
- on montre que f' admet des limites finies aux points où elle n'apparait pas dérivable.

On conclut alors qu'elle est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exemple 13.8

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x\neq 0$, et $f(0)=0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution
f est bien continue sur $\mathbb{R}$. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de deux fonctions continues), et par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée pour tout $x \neq 0$ par

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}^*$: f est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin, en posant $X = \frac{1}{x^2}$, on a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{X\to+\infty} 2X^{3/2} e^{-X} = 0$$

par croissance comparée.
Bilan : d'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(0) = 0$.

6. Dérivées successives

Définition 13.5.
Soit I un intervalle.
- On dit que f est **deux fois dérivables** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivables** ($n \geqslant 1$) si, pour tout entier $p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 13.6.
Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable, et si pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est continue.

Remarque
D'après un théorème précédent, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$, il suffit de montrer que f est n fois dérivable, et que sa dérivée n-ième est continue.

Définition 13.7.
Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable, et si toutes ses dérivées sont continues.

Remarque
Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, ln, polynômes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

☞ *Exercices 5, 7 et 8.*

III. Application de la dérivation

1. Dérivée nulle sur un intervalle

Théorème 13.10.

Soit I un intervalle fermé, ouvert, ou semi-ouvert de bornes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et dérivable sur $]a;b[$. Alors

$$f \text{ est constante sur I} \Leftrightarrow \forall\, x \in]a;b[,\ f'(x)=0$$

Attention

Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux ! Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x)=-\pi$ sur $]-\infty;0[$, et $f(x)=\sqrt{2}$ si $x>0$, alors f vérifie les conditions de l'hypothèse, sans pour autant que f soit constante.

Conséquence 13.11.

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$. On suppose que $f(a)=g(a)$. Alors

$$f'=g' \text{ sur I} \Leftrightarrow f=g \text{ sur I}$$

2. Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 13.12.

Soit I un intervalle de bornes a et b. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $]a;b[$.

- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si pour tout x de $]a;b[$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive sur $]a;b[$ (resp. strictement négative) **sauf éventuellement en un nombre fini de réels** où f' s'annule.

Exemple 13.9

L'exemple classique est celui de la fonction cube : soit $f : x \mapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=3x^2$. f' est strictement positive sauf pour $x=0$. D'après le théorème, la fonction f est tout de même strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction (quand ce n'est pas une fonction classique) :

- on justifie que la fonction est bien dérivable,
- on déterminer la dérivée de la fonction,
- on détermine le signe de la dérivée, avant de conclure.

Exemple 13.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a pour tout réel x, $f'(x)=3x^2+3$. Or, pour tout réel x, $f'(x)>0$: ainsi la fonction f est strictement croissante.

☞ *Exercices 14 et 15*

3. Inégalité des accroissements finis

Théorème 13.13. Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que,

$$\forall\ x \in]a;b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$$

Alors on a

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \mathrm{M}$$

Démonstration

Démontrons l'une des inégalités, par exemple $f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$. Pour cela, on introduit la fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$, définie pour tout x de $[a;b]$ par $g(x) = f(b) - f(x) - \mathrm{M}(b-x)$. g est dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables, et on a

$$\forall\ x \in]a;b[, g'(x) = -f'(x) + \mathrm{M} \geqslant 0$$

Donc g est croissante sur $[a;b]$. Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$, $g(x) \leqslant g(b) = 0$. On a donc bien, en particuler $g(a) \leqslant 0$.

Conséquence 13.14.

Soit f est une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\forall\ x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leqslant \mathrm{C}$$

Alors

$$\forall\ (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \ |f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{C}|b-a|$$

Méthode

L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir des inégalités intéressantes, en introduisant la bonne fonction.

Exemple 13.11

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [n; n+1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \in [n; n+1]$ par $f(x) = \ln(x)$. Alors f est dérivable sur $[n; n+1]$, et on a

$$\frac{1}{n+1} \leqslant f'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}$$

☞ *Exercices 8 et 9.*

4. Nombre dérivé et extrema locaux

Nous avons vu que si $f'(x)=0$, cela n'implique pas forcément qu'il y ait un extremum local en x. On dispose cependant du théorème suivant :

Théorème 13.15.

Soit I un intervalle, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

Exemple 13.12

Dans le cas de la fonction cube, $f'(0)=0$ mais la dérivée reste positive.

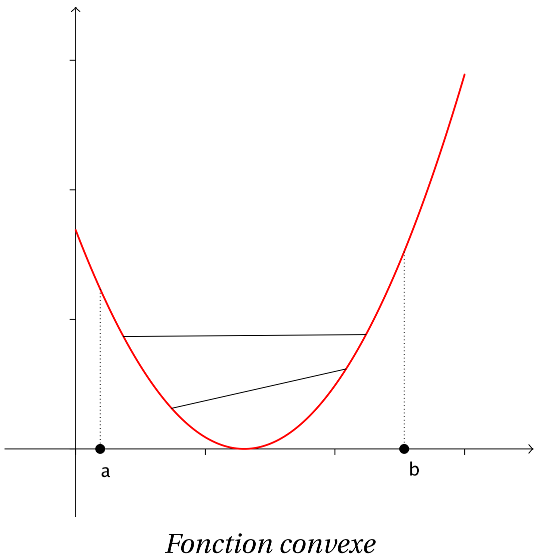
IV. Convexité

1. Définition

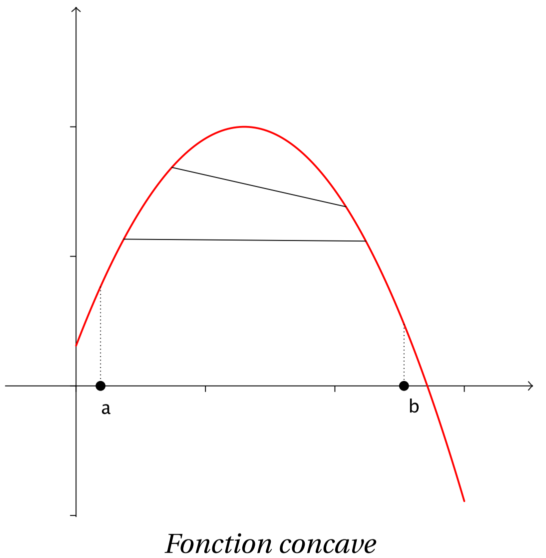
Définition 13.8.

Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- On dit que f est **convexe** si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en dessous de chacune de ses cordes.
- On dit que f est **concave** si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe

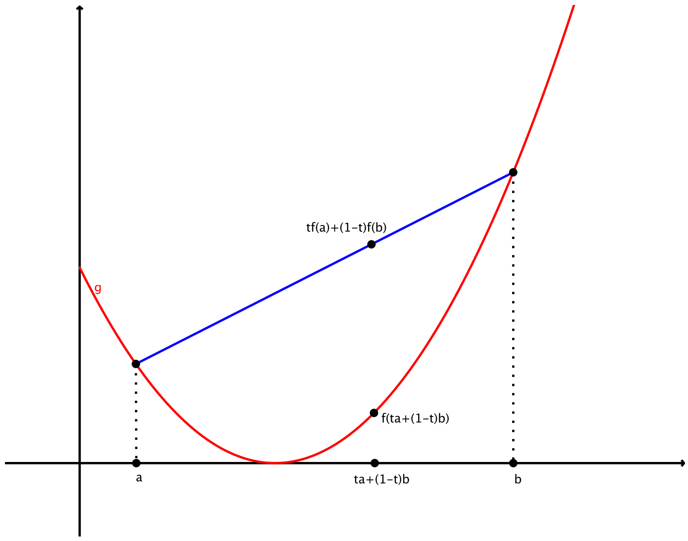


Fonction concave

Remarque

Si $\mathrm{I}=[a;b]$, on peut constater que $g(t)=ta+(1-t)b$ parcourt le segment $[a;b]$ si t parcourt

$[0;1]$.
De même, $tf(a)+(1-t)f(b)$ parcourt la corde liant $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. Ainsi, cette définition peut également s'écrire, en traduisant mathématiquement :



Définition 13.9.

Soit I un intervalle, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est convexe sur I, si, pour tout $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$ on a
$$\forall\, t \in [0;1],\ f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$
- La fonction f est concave sur I, si, pour tout $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$ on a
$$\forall\, t \in [0;1],\ f(ta+(1-t)b) \geqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$

Exemple 13.13

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $t \in [0;1]$. On a
$$f(ta+(1-t)b) = (ta+(1-t)b)^2 = t^2a^2+2t(1-t)ab+(1-t)^2b^2$$
On a alors
$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = t(t-1)a^2+t(1-t)2ab+(1-t)tb^2 = t(t-1)(a-b)^2 \leqslant 0 \text{ puisque } t \in [0;1]$$

2. Convexité, continuité et dérivabilité

Théorème 13.16.

Une fonction convexe sur un intervalle ouvert I est continue, et admet des dérivées à droite et à gauche en tout point.

Démonstration

Résultat admis.

Remarque

Ainsi, par contraposée du théorème précédent, si une fonction n'est pas continue sur un intervalle I, elle ne peut *a fortiori* pas être convexe sur cet intervalle

3. Convexité et dérivée

Théorème 13.17.

Soit I un intervalle ouvert, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Alors f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si, f' est croissante (resp. décroissante).

Démonstration

Résultat admis.

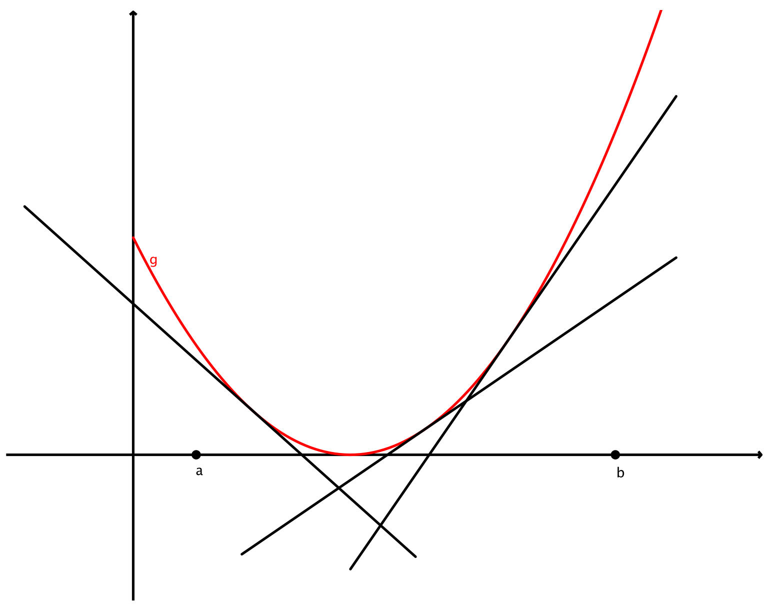
Exemple 13.14

- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, $\exp' = \exp$ qui est bien une fonction croissante.
- La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_*^+$. En effet, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Inégalité de convexité

Théorème 13.18.

Une fonction dérivable est convexe si et seulement si elle est au dessus de chacune de ses tangentes. Elle est concave si et seulement si elle est en dessous de chacune ses tangentes.



Application 13.15

Comme la fonction exp est convexe, la courbe de la fonction exp est toujours au dessus de ses tangentes. En particulier, elle est au-dessus de la tangente en 0, d'équation $y = x + 1$. Ainsi,

$$\forall\, x,\ e^x \geqslant 1 + x$$

De même, la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1;+\infty[$, donc la courbe de f est toujours en dessous de ses tangentes, et en particulier sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Ainsi,

$$\forall\, x \in]-1;+\infty[,\ \ln(x+1) \leqslant x$$

5. Convexité et signe de f''

Théorème 13.19.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors f est convexe (respectivement concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Démonstration

Supposons la fonction f deux fois dérivable sur I et convexe. D'après le théorème précédent, la fonction f' est donc croissante. Puisque f' est elle-même dérivable, f' est croissante si et seulement si f'' est positive.

Exemple 13.16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - \ln(x)$. Alors, f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

La dérivée seconde étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est convexe, ou concave, tout dépend de sa régularité :

- si elle est de classe $\mathscr{C}^2$ (ou, au moins, deux fois dérivable), on calcule sa dérivée seconde, et on s'intéresse à son signe.
- si elle n'est pas deux fois dérivable, mais au moins dérivable, on la dérive et on vérifie le sens de variation de sa dérivée.
- si elle n'est pas dérivable, on part sur la définition de base, ou on se ramène à des fonctions connues.

☞ *Exercices 10 et 11.*

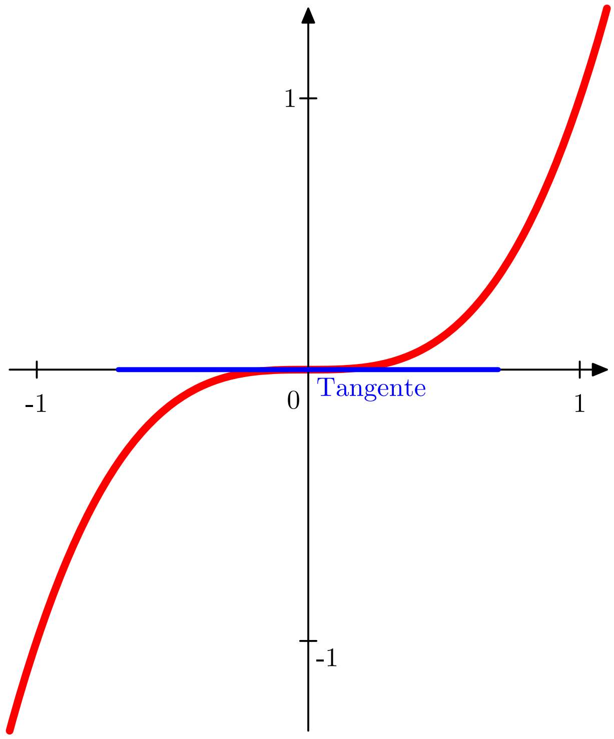
6. Point d'inflexion

Définition 13.10.

Un **point d'inflexion** de la courbe $\mathscr{C}$ est un point où la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en ce point. Lorsque sa courbe franchit un point d'inflexion, la convexité change de sens.

Exemple 13.17

Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors la tangente au point d'abscisse 0 coupe la courbe donc 0 est un point d'inflexion.



Théorème 13.20.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0, alors le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

Attention

Le point d'inflexion peut exister sans que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^2$: c'est donc une condition suffisante, mais pas nécessaire.

Méthode

Pour déterminer l'existence potentielle d'un point d'inflexion, si la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$:

- on détermine la dérivée seconde de la fonction,
- on dresse le tableau de signe de la dérivée seconde
- on conclut, en cherchant les réels pour lesquels la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Exemple 13.18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2$. Déterminer les éventuels points d'inflexion de f.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$$

En dressant le tableau de signe de f'', on constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -1 et en 1. Ainsi, la courbe de f admet deux points d'inflexion.

☞ *Exercice 12* .

V. Exercices bilans

Exercice 13.19 (Ecricome 2014)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x\in]0;+\infty[\end{array}\right.$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=e \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, (u_n) existe.
2. Ecrire une fonction Scilab qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Etablir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.
5. Montrer que, pour $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$ peut s'écrire
$$\forall\, x>0,\ f'(x)=\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ que l'on admettra, montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et déterminer $f'(0)$.
7. Etablir que
$$\forall\, x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f(x)\leqslant x \text{ et } (x+1)\ln(x+1)\geqslant x+1$$
En déduire que
$$\forall\, x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x)\geqslant 0$$
8. Démontrer que
$$\forall\, n,\ \mathrm{e}-1\leqslant u_n$$
9. Etablir que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Solution

1. Pour tout réel $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>\ln(1)=0$ par stricte croissance de la fonction ln. Par quotient, $f(x)>0$ si $x>0$. Ainsi, on a $f(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$.
Montrons alors, par récurrence, la proposition P définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n>0$".
    - Pour $n=0$, u_0 est bien défini, et $u_0=1>0$. P_0 est donc vraie.
    - Supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n>0$. Mais alors, d'après ce qui précède, $f(u_n)$ existe (car $u_n>0$) et $f(u_n)>0$ puisque la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1}>0$: P_{n+1} est également vraie.

    D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien définie.
2. La suite étant définie par une relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut utiliser une boucle *for* pour calculer u_N.


```
// Résumé : calcul de u_N dans le cas d'une suite u_(n+1)=f(u_n)
//          avec f:x -> x/ln(1+x)

// Rang voulu :
N = 5

// Valeur de u_0 :
U = exp(1)

// Boucle pour calculer u_N
for i=1:N
    U= U / log(1+U) // Rappel : la fonction ln s'écrit log en Scilab
end

// Affichage de la valeur de u_N
disp("U␣=␣", U)
```

3. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient d'un polynôme par une fonction logarithme, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, on a, par quotient,
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1=f(0)$$
La fonction f est donc continue en 0.
Bilan : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. De même, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient d'un polynôme par une fonction logarithme, dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, pour tout réel $x>0$
$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)-x\frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$$
5. Remarquons que, pour tout réel $x>0$
$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x(x+1)+x^2}{x^2(1+x)}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2(x+1)}$$
et donc,
$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)}{(\ln(1+x))^2}=\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat admis, par somme,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$
et puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, par quotient
$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\frac{1}{2}$$
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)$ admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $f'(0)=\frac{1}{2}$.
7. Si $x\geqslant \mathrm{e}-1$, alors $1+x\geqslant \mathrm{e}$ et donc, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x)\geqslant \ln(\mathrm{e})=1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $\frac{1}{\ln(1+x)}\leqslant 1$, et puisque $x>0$,
$$f(x)\leqslant x$$
Enfin, puisque $\ln(x+1)\geqslant 1$ et que $x+1>0$, par produit
$$(x+1)\ln(x+1)\geqslant x+1$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que, si $x \geqslant \mathrm{e}-1$,

$$(x+1)\ln(x+1) - x \geqslant 1 > 0$$

Puisque $x^2(x+1) > 0$, par quotient :

$$\forall\, x \geqslant e-1,\ f'(x) > 0$$

8. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n \geqslant e-1$".
   - Pour $n=0$, $u_0 = \mathrm{e} \geqslant \mathrm{e}-1$. Donc P_0 est vraie.
   - Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \mathrm{e}-1$. D'après la question précédente, puisque $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e}-1;+\infty[$, f est croissante sur $[\mathrm{e}-1;+\infty[$. Ainsi,

   $$f(\mathrm{e}-1) \leqslant f(u_n)$$

   c'est-à-dire $f(\mathrm{e}-1) \leqslant u_{n+1}$. Or, $f(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}-1$. Donc $\mathrm{e}-1 \leqslant u_{n+1}$ et P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien minorée par $\mathrm{e}-1$.
9. Pour tout entier n, $u_n \geqslant \mathrm{e}-1$. D'après la question 7, on a alors

   $$f(u_n) \leqslant u_n$$

   puisque $f(x) \leqslant x$ si $x \geqslant \mathrm{e}-1$. On obtient donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante, et puisqu'elle minorée (question précédente), elle converge.
   Notons ℓ sa limite. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est un point fixe de f, et puisque 0 n'est pas un point fixe (car $f(0)=1$), ℓ vérifie donc

   $$\frac{\ell}{\ln(\ell+1)} = \ell$$

   soit $\frac{1}{\ln(\ell+1)} = 1$ (car $\ell \neq 0$), c'est-à-dire $\ell = \mathrm{e}-1$.
   Bilan : la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.

☞ *Exercices 13, 16, 17, 18, 19 et 20*

Exercices

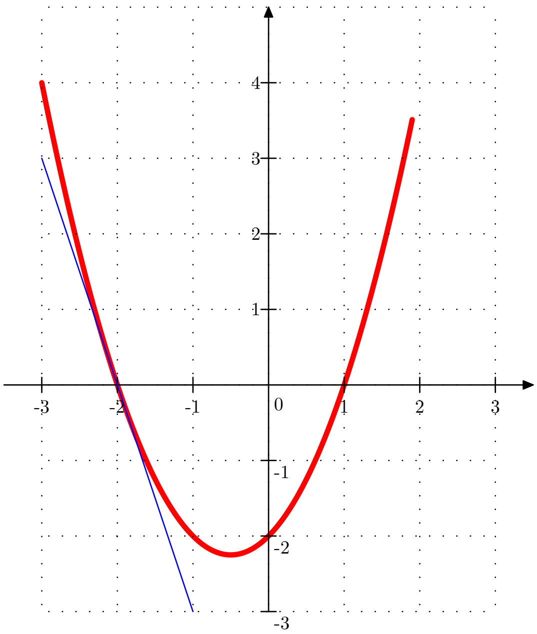
13

Exercices

Exercices de base

●○○ Exercice 1 Dérivée et représentation graphique (10 min.)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x + 5$. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1, puis son équation. Tracer la courbe représentative de g et cette tangente.
2. On considère la fonction f dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Sur ce même dessin est tracée la tangente T à la courbe au point d'abscisse -2 (elle passe par les points $(-2;0)$ et $(-3;3)$). Déterminer $f(-2)$ et $f'(-2)$ à partir du graphique.

●○○ Exercice 2 Limite et dérivabilité (10 min.)

En reconnaissant le calcul d'un nombre dérivée, déterminer :

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1} \qquad \lim_{x\to a} \frac{e^{x^2} - e^{a^2}}{x-a}.$$

●○○ Exercice 3 Dérivée - I (10 min.)

Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur le domaine I donné, et déterminer la fonction dérivée.

$f(x)=x\sqrt{x}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$
$g(x)=(x^2+x+1)e^x$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
$h_1(x)=\ln(1+x^2)$ et $h(x)=\frac{1}{\ln(1+x^2)}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
$i(x)=\ln(\ln(x))$, $\mathrm{I}=]1;+\infty[$
$j(x)=2^x$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
$k(x)=x^{2,3}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$
$l(x)=x^x$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

●○○ **Exercice 4 Parité et dérivée** (5 min.)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.

Dérivabilité

●○○ **Exercice 5 Dérivées et récurrence** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et montrer que pour tout $x\neq -1$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

●○○ **Exercice 6 Dérivées n-ième** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall x\mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\quad f(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}.$$
2. En déduire la dérivée n-ième de f.

●○○ **Exercice 7 Deux, mais pas trois** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$ si $x\geqslant 0$, et $f(x)=e^x$ si $x<0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas 3 fois dérivable.

Accroissements finis

●●○ **Exercice 8 Inégalité des accroissements finis et suite** (20 min.)

Soit k un entier $k\geqslant 2$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1;k]$ à la fonction $f:x\mapsto\frac{-1}{x}$, démontrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ converge.

●●○ **Exercice 9 Inégalité des accroissements finis et suite - II** (20 min.)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{-x}+1$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=1 \quad \text{et } \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=h(u_n).$$

1. Étudier les variations de h et montrer que $h([1,2])\subset[1,2]$ (on pourra utiliser $h(1)\approx 1,4$ et $h(2)\approx 1,1$).
2. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1,2]$ notée α.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant u_n\leqslant 2$.
4. Montrer que, pour tout réel $x\in[1,2]$, $|h'(x)|\leqslant\dfrac{1}{e}$.
5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{e}|u_n-\alpha|$.
6. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|u_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{e^n}.$$
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Convexité

●○○ Exercice 10 Convexité (5 min.)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe.

●○○ Exercice 11 Inégalité de convexité (10 min.)

Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe$.

●○○ Exercice 12 Convexité et représentation graphique (15 min.)

Soit $f : x \mapsto -x^2 + 3x - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Etudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion.
Déterminer les tangentes horizontales de la courbe représentative de f.

Etude de fonctions

●○○ Exercice 13 Etude de fonctions - I (20 min.)

Soit

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Etudier la convexité, concavité et points d'inflexion de f.
4. Tracer dans un repère orthonormé de la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

●○○ Exercice 14 Étude de fonctions - II (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et expliciter sa dérivée.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$
   On pourra admettre que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Etudier la fonction g définie par $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ sur $]-1;+\infty[$, et étudier ensuite l'existence de tangente horizontale pour f.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1;+\infty[$.
7. Déterminer la nature des branches asymptotiques de f en -1 et en $+\infty$, puis tracer la courbe de f.

●○○ Exercice 15 Étude de fonctions - III (20 min.)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.

5. Déterminer les branches asymptotiques.

●●○ Exercice 16 Suite, IAF et fonction (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4}.$$

1. Soit $f(x) = 4 + \dfrac{\ln x}{4}$. Étudier la fonction f et montrer que $f([1, e^2]) \subset [1, e^2]$.
2. Étudier les variations de $h(x) = f(x) - x$ sur $[1, e^2]$. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution dans $[1, e^2]$ que l'on notera α.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à l'intervalle $[1, e^2]$.
4. (a) Montrer que $u_1 \geqslant u_0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   (b) En déduire que (u_n) converge vers α.
5. (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1, e^2]$, $|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|$.
   (b) En déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   (c) Donner une majoration de $|u_n - \alpha|$ en fonction de n.
6. Déterminer un entier N tel que $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-9}$.

Sujets de concours

●○○ Exercice 17 Sujet de concours - I (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ ainsi que celle de $\frac{\varphi(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variation de φ.
6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

●○○ Exercice 18 Sujet de concours - II (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que
$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$
6. Proposer un programme en Scilab permettant d'encadrer dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

●○○ Exercice 19 Sujet de concours - III (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2 \approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

$$\text{avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

●○○ Exercice 20 Sujet de concours - IV (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifier que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Etudier la convexité de f, et montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion.
6. On définit la fonction $g : \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par $\forall\, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right],\ g(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est bijective de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ dans un intervalle à considérer.
7. Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}
8. Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$. Est-elle dérivable aux bornes ?
9. Tracer l'allure des fonctions g et g^{-1}.

