Chapitre 12

Continuité

Résumé

On définit rigoureusement la notion déjà vue l'année dernière de continuité. C'est l'occasion de revoir le théorème des valeurs intermédiaires, et un corollaire important - le théorème de la bijection.

Plan du cours

> « *Une certaine continuité dans le désespoir peut engendrer la joie.* »
>
> Albert Camus (1913 – 1960). *Noces*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant la continuité :

- Savoir montrer qu'une fonction est continue en un point . . . . ☐
- Savoir prolonger de manière continue une fonction en un point . . . . ☐
- Savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente . . . . ☐

② Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ . . . . ☐

③ Savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque . . . . ☐

I. Généralités

1. Continuité en un point, sur un intervalle

Définition 12.1. Continuité en un point

Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.

- On dit que la fonction f est **continue à droite en un point** a de I si f admet une limite à droite en a, qui est égale à $f(a)$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

- On dit que la fonction f est **continue à gauche en un point** a de I si f admet une limite à gauche en a, qui est égale à $f(a)$:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

- On dit que la fonction f est **continue en un point** a de I si f admet une limite en a, qui est égale à $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Ainsi, f est continue en a si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Définition 12.2. Continuité sur un intervalle

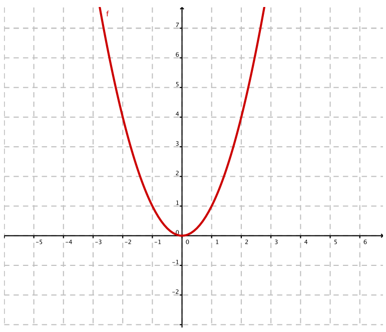
Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.
On dit que f est **continue sur l'intervalle I** si elle est continue en tout point de I.

Remarque (Somme, produit, quotient, composée)

Il résulte des théorèmes sur les limites que la **somme**, le **produit**, le **quotient** (là où il est défini) et la **composée** de deux fonctions continues est continue.

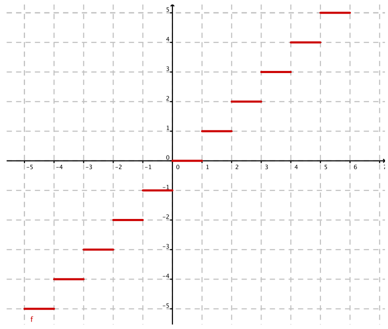
Exemple 12.1

La fonction carré est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



Exemple 12.2

La fonction **partie entière** n'est pas continue en $0, 1, 2, \dots$:



2. Continuité à droite et à gauche, et continuité

Un résultat vu sur les limites nous permet d'en déduire une propriété importante :

Propriété 12.1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un point intérieur à I (c'est-à-dire que a n'est pas une borne de I).
f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est continue en un réel a, on calcule les limites à droite et à gauche en ce réel, et on montre que les deux limites valent $f(a)$.

Exemple 12.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Solution

On a $f(0) = 1$. Constatons alors que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = e^{-0} = 1 = f(0)$$

Ainsi, f est continue à droite et à gauche en 0. Elle est donc continue en 0.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Karl Weierstrass (encore lui) donna vers 1850 la première définition de la continuité d'une fonction. C'est également lui qui donna les définitions rigoureuses de la dérivée, que l'on verra plus tard.

3. Continuité des fonctions usuelles

Proposition 12.2.

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition.

- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carré est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions puissances $x \mapsto a^x$ $(a>0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Admis. On verra dans un chapitre ultérieure qu'une fonction dérivable est continue, ce qui nous permet de conclure rapidement.

4. Prolongement par continuité

Définition 12.3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un réel a. On suppose que f est continue sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$, et qu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.
On dit qu'on peut **prolonger par continuité** la fonction f en posant $f(a)=\ell$. On définit ainsi une nouvelle fonction, définie sur I, qui est continue sur I et coïncide avec f sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$.

Exemple 12.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=x\ln(x)$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0.

Solution

On constate que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0)=0$.

Remarque

Rigoureusement, on doit définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui est égale à f sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$, et telle que $\tilde{f}(a)=\ell$. En pratique, on confondra toujours $\tilde{f}$ et f.

☞ *Exercices 1, 2, 3, 4 et 5.*

5. Tableau de variations et convention

Remarque

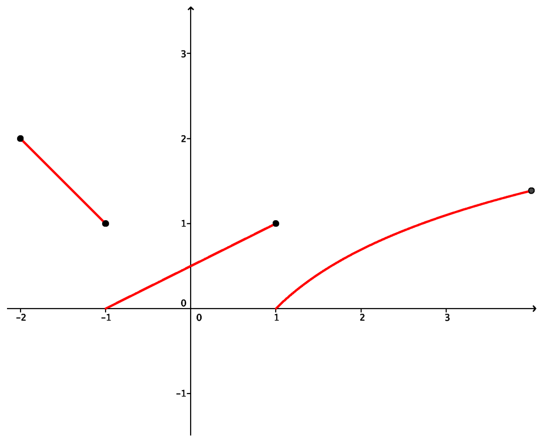
Dans un tableau de variation, on convient que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

6. Continuité par morceaux

Définition 12.4.

Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une **subdivision** $a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b$ (c'est-à-dire un découpage du segment $[a;b]$) telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i,a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle …

fermé $[a_i, a_{i+1}]$.



Exemple 12.5

La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, sur tout segment de la forme $]n; n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$) le fonction est continue (car constante), et prolongeable par continuité en n et $n+1$.

II. Fonctions continues et résolution d'équation

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 12.3. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Alors l'image $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

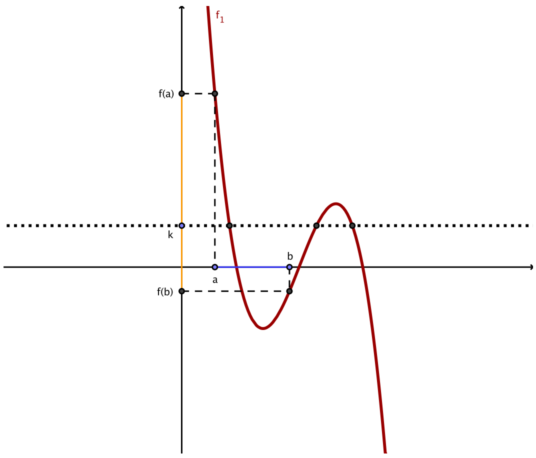
Remarque

On a mieux : si I est un segment, $f(\mathrm{I})$ est également un segment. Ainsi, si I est un segment $[a; b]$, le maximum et le minimum sont atteints : il existe deux réels u et v de I tels que $f(u) = \max\limits_{x \in \mathrm{I}} f(x)$ et $f(v) = \min\limits_{x \in \mathrm{I}} f(x)$.

On utilisera la variante plus explicite suivante :

Théorème 12.4. Théorème des valeurs intermédiaires II

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a; b]$, tel que $f(c) = k$.



Démonstration

Théorème admis.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Bernard Bolzano donna en 1817 la première démonstration analytique de ce théorème. **Weierstrass** en donna une autre plus tard, vers 1850.

2. Théorème de la bijection

Dans le cas d'une fonction continue strictement monotone sur un segment, on dispose d'un énoncé plus précis :

Théorème 12.5. Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède une **unique solution** dans $[a;b]$.

Démonstration

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. f étant une fonction continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c)=k$. Supposons la fonction strictement croissante (le cas décroissant se montre de la même manière). Alors :

- Pour tout $x>c$, on a $f(x)>f(c)=k$ donc il n'y a aucun réel $x>c$ vérifiant $f(x)=k$.
- Pour tout $x<c$, on a $f(x)<f(c)=k$ donc il n'y a aucun réel $x<c$ vérifiant $f(x)=k$.

Donc le réel c est le seul.

On dispose de la version suivante, qui sera celle là plus souvent utilisée :

Théorème 12.6. Théorème de la bijection II

Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f est bijective de I sur l'intervalle $f(\mathrm{I})$, dont les extrémités sont $f(a)$ et $f(b)$.

Méthode

On utilise le théorème de la bijection (ou *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*) pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à une équation. On vérifiera bien toutes les hypothèses : continuité, stricte monotonie, et déterminer l'intervalle image.

Exemple 12.6

On suppose que la fonction f est continue, et que ses variations sont décrites dans le tableau suivant :

x	0	5
$f(x)$	-3 $\nearrow$	4

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0;5]$.

Solution

- f est continue sur $[0, 5]$;
- f est strictement croissante sur $[0, 5]$.

D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[0, 5]$ sur $f([0, 5]) = [-3, 4]$. Or $0 \in [-3, 4]$; doncl'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0;5]$.

3. Extension à un intervalle non borné

Le théorème précédent peut être étendu dans le cas d'un intervalle I quelconque.

Théorème 12.7.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors l'image de I par f est encore un intervalle, J, et f établit une bijection de I dans J.

Exemple 12.7

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a;b]$, alors pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans $]a;b]$.

Exercice 12.8

Prouver que l'équation (E) : $x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution

On se ramène à une écriture $f(x) = k$: $x + x\sqrt{x} = 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle établit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$$f(]0, +\infty[) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty}, f(x)\right[=]0, +\infty[$$

qui contient 1.

L'équation $f(x) = 1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

4. Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Dans le cas d'une fonction continue, et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire, on peut déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=0$ par **dichotomie** : on découpe au fur et à mesure l'intervalle en 2 pour pouvoir cibler la solution.

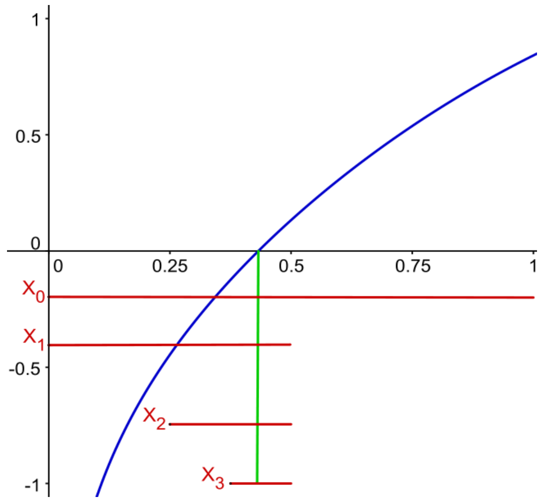


Image disponible sur Wikipédia

COMPLÉMENT CULTUREL

Le mot dichotomie vient du grec *dikha* (*en deux*), et *tomein* (*couper*), c'est à dire "couper en deux".

Algorithme 12.8.

Dans cet algorithme, e représente la précision de la valeur approchée.

Algorithme 1 : DICHOTOMIE

Entrées : Saisir a, b et e

Tant que $b-a \geqslant e$

 $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$

 si $f(a)\times f(m) \leqslant 0$ **alors**

  $b \leftarrow m$

 sinon

  $a \leftarrow m$

 fin

FinTantque

Sorties : Afficher a et b

En Scilab, cela donne (à condition que la fonction f ait été définie, dans le cas f croissante) la fonction suivante, où $[x;y]$ désigne l'intervalle de recherche de départ, et `eps` la précision :

Scilab 12.9. Algorithme de dichotomie ♡

```
// Résumé : fonction appliquant l'algorithme de dichotomie dans le cas où la fonction
// f est définie et croissante sur l'intervalle de départ [x;y].
// On cherche avec une précision eps.

function [a,b] = dicho (x,y, eps)
a=x
b=y
while(b-a>eps) do
```

```
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m) <= 0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
endfunction
```

5. Continuité et sens de variation de f^{-1}

Théorème 12.10.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ est continue sur $f(\mathrm{I})$, strictement monotone et de même monotonie que la fonction f.

Démonstration

Supposons f strictement croissante (le raisonnement est le même dans le cas décroissant). Soient x et y deux éléments de $f(\mathrm{I})$ tels que $x < y$. Puisqu'ils sont dans $f(\mathrm{I})$, il existe a et b dans I tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$.
Puisque f est strictement croissante, $x = f(a) < f(b) = y \Rightarrow a < b$. Or, $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$.
On a donc montré

$$\forall (x, y) \in (f(\mathrm{I}))^2, \quad x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

f^{-1} est donc strictement croissante.
Etant strictement monotone, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $f(\mathrm{I})$. Supposons qu'il existe $y \in f(\mathrm{I})$ tel que les limites à droite et à gauche de f^{-1} en y soient différentes. En repassant par f, par continuité de f, les limites à droite et à gauche en $f^{-1}(y)$ sont donc différentes, ce qui est absurde, puisque f est continue sur I.

☞ *Exercices 6 et 7.*

6. Suites récurrentes et continuité

La continuité va nous permettre de simplifier l'étude des suites récurrentes, mais également de pouvoir déterminer les limites des suites récurrentes convergentes.

a. Intervalle stable

Démonstration

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. On dit que J est un intervalle **stable** de f si $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad f(x) \in \mathrm{J}$$

Exemple 12.9

Par exemple, l'intervalle $[0, 1]$ est un intervalle stable de la fonction carrée. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^2 \in [0, 1]$.

Méthode

Pour démontrer qu'un intervalle I est stable, on dispose de deux méthodes classique :

1. Si I est un intervalle du type $\mathrm{I} = [a; b]$, on part de $a \leqslant x \leqslant b$ et on essaie de raisonner par implication pour démontrer que $a \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

2. Sinon, on étudie les variations de f, et en utilisant les monotonies de f et l'éventuelle continuité, on conclut.

Exercice 12.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. Montrer que $[-1;2]$ est un intervalle stable de f.

Solution

f est un trinôme du second degré. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

Sur $[-1;2]$, f est croissante. On a $f(-1) = -1$ et $f(2) = 2$. Par croissance et continuité de f, on en déduit que $f([-1;2]) = [-1;2]$.
Sans la continuité, mais uniquement avec la monotonie, on en déduit que $f([-1;2]) \subset [-1;2]$, ce qui est souvent suffisant.

Les intervalles stables sont très pratiques pour l'étude des suites récurrentes :

Théorème 12.11.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et soit u la suite définie par $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $u_0 \in \mathrm{J}$ et J est un intervalle stable de f, alors pour tout n, $u_n \in \mathrm{J}$.

Démonstration

Cela se montre rapidement par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout n par P_n : $u_n \in \mathrm{J}$.

- Pour $n = 0$, par hypothèse, $u_0 \in \mathrm{J}$ donc P_0 est vraie.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathrm{J}$. Or J est un intervalle stable de f, donc $f(u_n) \in \mathrm{J}$. Or, par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_{n+1} \in \mathrm{J}$ et donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathrm{J}$$

Remarque

Cela permet ainsi de montrer qu'une suite récurrente est bornée, en cherchant un intervalle stable de la fonction sous-jacente.

Exercice 12.11

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.
Montrer que pour tout n, $u_n \in [-1;2]$.

Solution

On a montré dans l'exercice 12.10 que l'intervalle $[-1;2]$ est stable par f. Puisque $u_0 = 1 \in [-1;2]$, d'après le théorème précédent, on a bien que pour tout n, $u_n \in [-1;2]$

Remarque

En pratique, cette dernière récurrence sera systématiquement à rédiger, mais appliquée au contexte de l'exercice.

b. Théorème du point fixe

La continuité va permettre de déterminer la limite d'une suite définie sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque f est continue.

Théorème 12.12.

Soit f une fonction continue, et ℓ un réel. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Alors la suite $(f(u_n))$ converge également, et a pour limite $f(\ell)$.

Remarque

Si f n'est pas continue en x_0 mais si la fonction f a pour limite ℓ en x_0, alors quelle que soit la suite (u_n) de limite x_0, $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Théorème 12.13. Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue, et u une suite définie par u_0 donné, et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite u est convergente, alors par passage à la limite, en notant ℓ la limite de u, on en déduit que la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$: c'est donc un **point fixe** de la fonction f.

Méthode

Le théorème précédent permet souvent de déterminer la limite d'une suite définie par récurrence lorsqu'elle est convergente.

Exercice 12.12

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est croissante, et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. En déduire que la suite u converge, et déterminer sa limite.

Solution

1. Méthode classique : on montre par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Pour tout entier n, soit P_n la proposition définie par "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 1$$
     et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: P_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :
$$\forall\, n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Pour tout entier n, soit Q_n la proposition définie par "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
Remarque : on aurait pu, aussi, montrer que $[0;1]$ est un intervalle stable de la fonction racine, puis de démontrer rapidement par récurrence que pour tout $n,\ u_n \in [0;1]$.

- Initialisation : pour $n=0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > u_0$. $u_0 \leqslant u_1$: Q_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
  On a $u_n \leqslant u_{n+1}$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
$$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}}$$
  et donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$: Q_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n :
$$\forall\, n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$$
  La suite u est donc croissante.

Remarque : on aurait également pu démontrer, par récurrence, les deux propositions en une seule, en démontrant "$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$".

2. La suite u est donc croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, celle-ci converge. Notons ℓ sa limite. Puisque la fonction racine est continue sur $]0;+\infty[$, on en déduit par passage à la limite que que $\ell = \sqrt{\ell}$, c'est à dire $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or, puisqu'elle est croissante,
$$\text{Pour tout } n, u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{2}$$
La limite est donc 1.

☞ *Exercice 9*

Exercices 12

Exercices

Continuité

●○○ **Exercice 1 Continuité - I** (10 min.)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x)$ pour $x > 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

●○○ **Exercice 2 Continuité - II** (10 min.)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = e^x$ pour $x \geqslant 0$. La fonction f est-elle continue ?

●○○ **Exercice 3 Continuité - III** (10 min.)
Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ en 0.

●○○ **Exercice 4 Continuité - IV** (10 min.)
Peut-on prolonger la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en 0 ? en 1 ?

●○○ **Exercice 5 Prlongement par continuité II** (10 min.)
On considère la fonction f définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[-1, +\infty[$.

TVI

●○○ **Exercice 6 Théorème de la bijection** (10 min.)
Montrer que la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]-2, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ établit une bijection de I sur un intervalle à déterminer. En déduire le tableau de variations, puis préciser sa réciproque.

●○○ **Exercice 7 TVI, fonction réciproque et suite** (30 min.)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.
3. Établir le tableau de variations de la fonction réciproque f^{-1} de f.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
5. Étudier les variations et la limite de (u_n).

Continuité et suites récurrentes

●○○ Exercice 8 Intervalle stable et suite (15 min.)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{x^2+5}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'intervalle $[0;2]$ est stable par f.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0;2]$.
3. (u_n) est-elle monotone ?
4. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?

●●○ Exercice 9 EDHEC (30 min.)

Soit $n \geqslant 3$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite, et v_n la plus grande, vérifier que $\forall\ n \geqslant 3, 0 < u_n < n < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite v ?
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.
5. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
6. Montrer que la suite u est convergente, puis en encadrant $\ln(u_n)$, déterminer sa limite.

●●○ Exercice 10 EML E 2015 (40 min.)

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Etude d'une fontion

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 11 Continuité et point fixe (10 min.)

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f([0;1]) \subset [0;1]$. En posant $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que la fonction f admet au moins un point fixe.

●●○ Exercice 12 Continuité et égalité (10 min.)

Soit $n > 0$ et $a_1, \cdots a_n$ des réels deux à deux distincts de $[0;1]$. Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x - a_k|$$

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$, et en déduire qu'il existe au moins un réel u de $[0;1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

