11

Chapitre

# Limites de fonctions

**Résumé**

*On étend dans ce chapitre la notion de limite de suite au cas plus général des limites de fonctions. Cela permettra de commencer les études de fonctions, en étudiant le comportement asymptotique de celles-ci.*

## Plan du cours

Chapitre 11. **Limites de fonctions**

I. Quelques définitions . . . . . . . . . . 3
II. Limites à l'infini . . . . . . . . . . 4
III. Limites en $a \in \mathbb{R}$ . . . . . . . . . . 6
IV. Théorèmes d'existence et de comparaison . . . . . . . . . . 9
V. Opérations sur les limites et limites usuelles . . . . . . . . . . 12
VI. Etude des limites d'une fonction . . . . . . . . . . 18
VII. Caractérisation séquentielle . . . . . . . . . . 19
**Exercices** . . . . . . . . . . 21

> *« Celui qui reconnaît consciemment ses limites est le plus proche de la perfection. »*
>
> Johann Wolfgang von Goethe (1749 – 1832). *Sentences en prose*

## Objectifs

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.*

① Connaître la définition des limites :

- Connaître les limites usuelles et les croissances comparées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐
- Savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites . . . . . . . . . . ☐
- Savoir calculer la limite d'une composée de fonction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐
- Reconnaître les limites liées au taux d'accroissement . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐

② Savoir lever les indéterminations classiques :

- polynômes et fractions rationnelles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐
- fonctions avec des radicaux . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐
- les cas "$\infty/\infty$" ou "0/0" . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐

③ Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ☐

④ Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) . . . ☐

# I. Quelques définitions

Avant de commencer ce chapitre, nous allons introduire deux objets que l'on utilisera naturellement : la notion de voisinage, et de restriction d'une fonction.

## 1. Voisinage

**Définition 11.1. Voisinage**

Soit $a$ un élément de $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. On dit que I est un **voisinage** de $a$ dans $\mathbb{R}$ si :

- Cas $a\in\mathbb{R}$ : il existe $\varepsilon>0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$.
- Cas $a=+\infty$ : il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que $]A,+\infty[\subset I$.
- Cas $a=-\infty$ : il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que $]-\infty,A[\subset I$.

Ainsi, un voisinage de $a$ est un domaine qui contient un intervalle ouvert autour de $a$.

**Exemple 11.1**

Notons $I=]1,2]$. Alors I est un voisinage de $1,5$ et $1,25$. En revanche, il n'est pas un voisinage de 3, ni de 2.

**Solution**

En effet, $]1,25;1,75[\subset I$ et $]1,1;1,35[\subset I$. En revanche, quel que soit $\varepsilon>0$, $]3-\varepsilon,3+\varepsilon[\cap I=\varnothing$ donc il ne peut pas être un voisinage de 3. De même, $]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\cap I=]2-\varepsilon,2]$ et donc $]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\not\subset I$.

**Remarque**

Par abus de langage, dans la suite du cours, lorsqu'on dit qu'une propriété est vraie « au voisinage de $a$ », cela signifiera qu'elle est vraie sur un intervalle qui est un voisinage de $a$.

## 2. Restriction

**Définition 11.2. Restiction**

Soit $f: E\longrightarrow F$ une fonction et $A\subset E$. On appelle **restriction** de $f$ à A la fonction, notée $f_{|A}$, définie par :

$$\begin{aligned} f_{|A}: A &\longrightarrow F\\ x &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

**Exemple 11.2**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-1$. La restriction de $f$ à $\mathbb{R}^+$ est la fonction :

$$\begin{aligned} f_{|\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x^2-1\end{aligned}$$

**Remarque**

Restreindre une fonction permet de ne l'étudier que sur un sous-ensemble de son domaine de définition (par exemple, parce qu'elle est paire ou impaire).

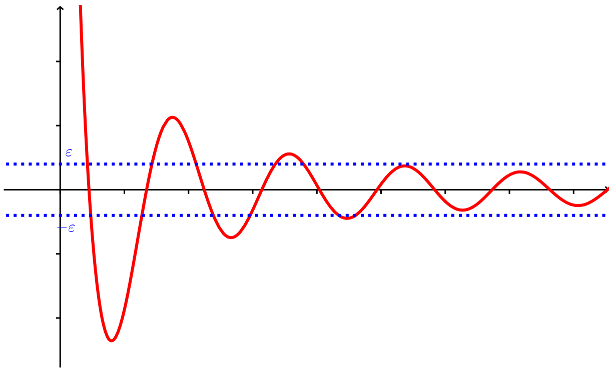
## II. Limites à l'infini

### 1. Limites nulles

**Définition 11.3.**

Si, pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut), la fonction $f$ est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (c'est-à-dire $|f(x)| \leqslant \varepsilon$) lorsque $x$ est suffisamment grand , on dit que $f$ **a pour limite** 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = 0 \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$




**Remarque**

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{M},\ \forall\, x, x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

**Remarque**

On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{M},\ \forall\, x, x < \mathrm{M} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

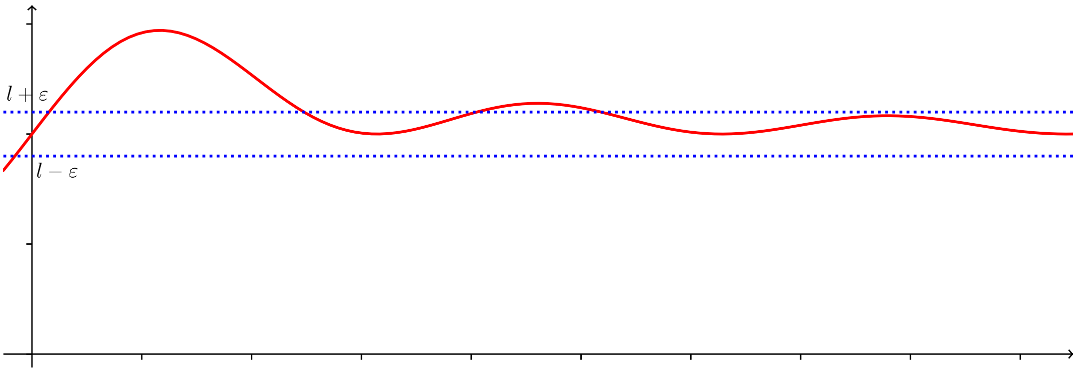
**Exemple 11.3**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

### 2. Limites finies : $\ell \in \mathbb{R}$

**Définition 11.4.**

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f$ **a pour limite** $\ell$ quand $x$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).




**Remarque**

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{M},\ \forall\, x, x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

**RÉFÉRENCE HISTORIQUE**

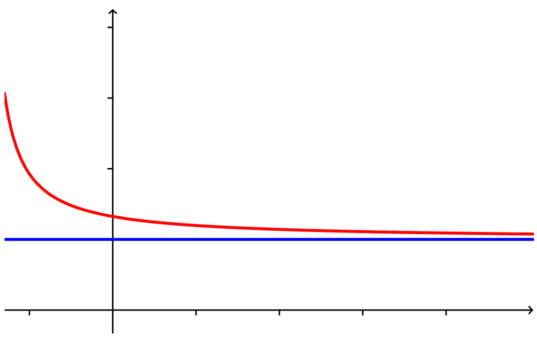
Cette définition rigoureuse est due à **Karl Weierstrass**, considéré comme le « père de l'analyse moderne », même si **Bernard Bolzano** avait déjà défini la notion de limite, certes de manière moins rigoureuse..

**Exemple 11.4**

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

**Définition 11.5. Asymptote horizontale**

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (où $\ell \in \mathbb{R}$). Alors, la droite d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de $f$ au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.

**Remarque**

Pour étudier la position de la courbe de $f$ par rapport à l'asymptote $y = \ell$, on étudie le signe de $f(x) - \ell$.

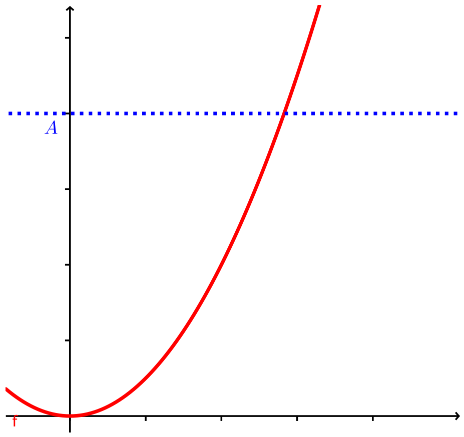
- Si $f(x) - \ell \geqslant 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - \ell \leqslant 0$, la courbe est en dessous de son asymptote.

### 3. Limites infinies

**Définition 11.6.**

Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut), $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à A dès que $x$ est suffisamment grand, on dit que $f$ **a pour limite** $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$




**Remarque**
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall A > 0,\ \exists M,\ \forall x, x > M \Rightarrow f(x) > A$$

**Remarque**
On définit de même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

## III. Limites en $a \in \mathbb{R}$

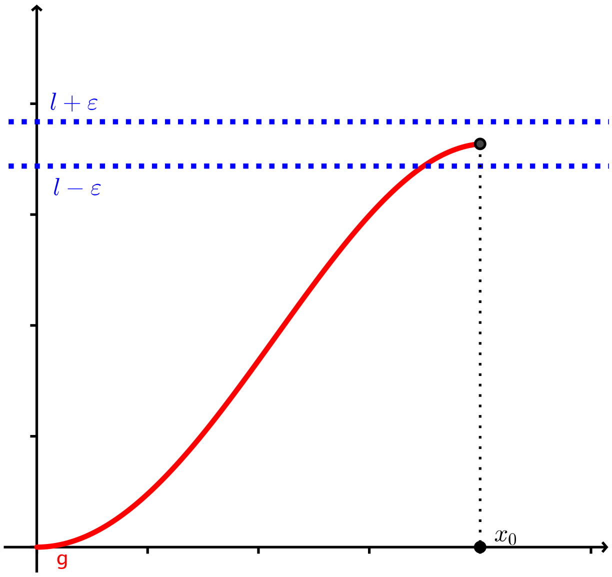
Ici, on s'intéresse au comportement d'une fonction $f$ quand $x$ tend vers $a \in \mathbb{R}$.

### 1. Limite réelle en un point

**Définition 11.7.**

Soient $x_0$ et $\ell$ deux réels.
Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $\ell$ dès lors que $x$ est proche de $x_0$, on dit que $f$ **a pour limite** $\ell$ quand $x$ tend vers $x_0$. On note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$$




**Remarque**
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

**Remarque**
Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en $x_0$.

**Exemple 11.5**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$. Soit $x_0 = 2$. Montrer que, quand $x$ tend vers $x_0$, $f(x)$ va tendre vers $5 = f(2)$.

**Solution**
On peut le démontrer rigoureusement :

$$|f(x)-5| = |2x+1-5| = |2x-4| = 2|x-2|$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $|f(x)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

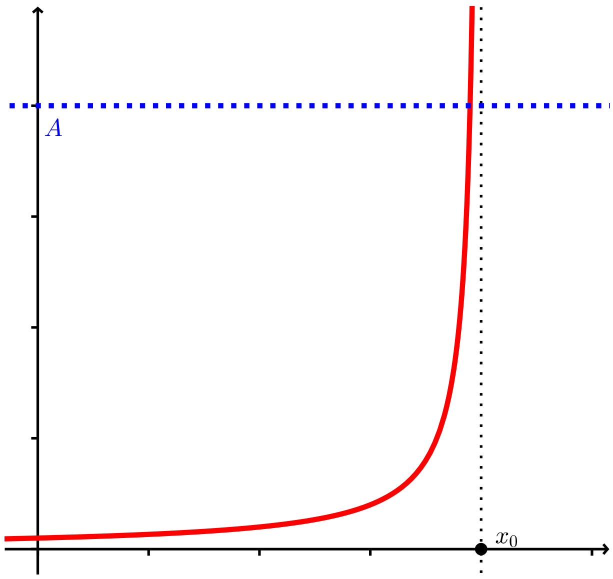
## 2. Limite infinie en un point

**Définition 11.8.**

Soit $x_0$ un réel.
Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que $x$ est proche de $x_0$, on dit que $f$ **a pour limite** $+\infty$ quand $x$ tend vers $x_0$. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$




**Remarque**
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall A>0,\ \exists \alpha>0,\ \forall x, |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>A$$

**Remarque**
Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en $x_0$.
On définit également $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ de la même manière.

## 3. Limite à gauche et à droite

**Définition 11.9.**

Soit $x_0$ un réel.

- Si on s'intéresse à la limite en $x_0$ de $f$, en imposant $x<x_0$, on parle de la **limite à gauche** en $x_0$, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$.
- Si on s'intéresse à la limite en $x_0$ de $f$, en imposant $x>x_0$, on parle de la **limite à droite** en $x_0$, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

**Remarque**
Une fonction peut avoir des limites à gauche et à droite en $x_0$ différentes ! Par exemple

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

**Proposition 11.1.**

Soit $f$ une fonction et $x_0$ un réel. Alors $f$ admet une limite en $x_0$ si et seulement si $f$ admet des limites à gauche et à droite en $x_0$ et que ces limites sont les mêmes.
Dans ce cas,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

**Exemple 11.6**

Ainsi, la fonction inverse n'admet pas de limite en 0, puisque ses limites à droite et à gauche en 0 sont différentes.

***Méthode***

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque la fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

**Exemple 11.7**

Etudier la limite en 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

**Solution**

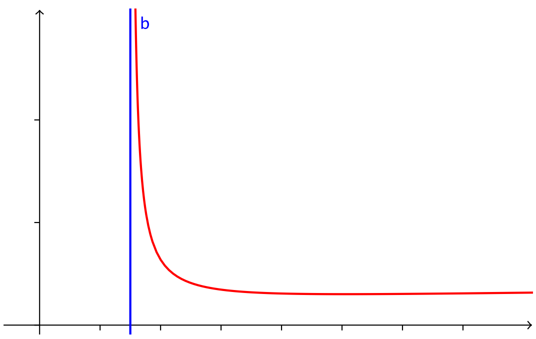
On remarque que :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 = f(0)$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$

Puisque les limites à droite et à gauche sont égales, on en déduit que $f$ admet une limite en 0, et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

**Définition 11.10. Asymptote verticale**

Si $\lim\limits_{x \to a^+ (\text{ou } a^-)} f(x) = +\infty$ ( ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de $f$.




## IV. Théorèmes d'existence et de comparaison

### 1. Fonctions monotones

Les fonctions monotones possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

**Théorème 11.2.**

Soit $f$ une fonction monotone sur un segment $[a, b]$. Alors $f$ admet des limites à gauche et à droite en tout point.

**Théorème 11.3.**

Soit $f$ une fonction monotone sur $\mathrm{I} = ]a, b[$.

- Si $f$ est croissante et majorée sur I, alors $f$ admet une limite finie en $b^-$.
- Si $f$ est croissante et minorée sur I, alors $f$ admet une limite finie en $a^+$.
- Si $f$ est décroissante et minorée sur I, alors $f$ admet une limite finie en $b^-$.
- Si $f$ est décroissante et majorée sur I, alors $f$ admet une limite finie en $a^+$.

**Remarque**

Si $f$ est croissante sur $\mathrm{I} = ]a, b[$ mais non majorée sur I, alors $f$ admet une limite en $b^-$ qui vaut $+\infty$.

De manière générale, une fonction monotone sur $]a, b[$ admet toujours des limites en $a^+$ et en $b^-$, finie ou infinie.

## 2. Limites et inégalités

**Théorème 11.4.**

Soit I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en $x_0$, mais possédant une limite en $x_0$. Alors, si pour tout $x$ de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, $f(x) \geqslant g(x)$, on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

**Remarque**

⚠ Attention : le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Par exemple, pour tout $x$, $1 + \frac{1}{x} > 1$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

## 3. Théorème d'encadrement

**Théorème 11.5. Théorème d'encadrement ou théorème « des gendarmes »**

Soit I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soient $f, g, h$ trois fonctions définies sur I sauf éventuellement en $x_0$. Si, pour tout $x$ de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $f$ et $h$ ont la même limite $\ell$ en $x_0$, alors la limite de $g$ en $x_0$ existe, et

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

**Démonstration**

Admis. Idée de démonstration dans le chapitre sur les suites.

**Exemple 11.8**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{[x]}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

**Solution**

On a, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, $x-1 \leqslant [x] \leqslant x$, donc, en divisant par $x>0$,

$$\frac{x-1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit donc, par encadrement, que la limite de $g$ en $+\infty$ existe, et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

**Théorème 11.6. Conséquence du théorème d'encadrement**

Soit I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\ell$ un réel. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur I sauf éventuellement en $x_0$. Si, pour tout réel $x \in \mathrm{I}\backslash\{x_0\}$ on a $|f(x)-\ell| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

**Démonstration**

C'est une conséquence directe du théorème d'encadrement, puisque $|f(x)-\ell| \leqslant g(x)$ est équivalent à $\ell - g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell + g(x)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement.

## 4. Comparaison à l'infini

**Théorème 11.7. Théorème de comparaison**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathrm{I} = ]a,+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$). Si pour tout $x$ de I :

- $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**Démonstration**

Soit M un réel. Par définition, à partir d'un certain réel $b$, on a $g(x) > \mathrm{M}$. Or $f(x) \geqslant g(x)$, donc $f(x) > \mathrm{M}$ pour tout $x \geqslant b$ : par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Exemple 11.9**

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$.

**Solution**

Pour tout réel $x$, on a $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$. Ainsi, pour tout réel $x>0$ (puisque $\sqrt{x}>0$) on a

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

soit

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]+1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

### 5. Asymptote oblique

**Définition 11.11. Asymptote oblique**

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$ dans un repère donné. Soit $(d)$ une droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. On dit que la droite $(d)$ est une **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

**Exemple 11.10**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de $f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

**Solution**

En effet, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x)-x=\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{1}{x}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Ainsi la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote oblique à la courbe de $f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

## V. Opérations sur les limites et limites usuelles

### 1. Opérations sur les limites

On suppose connues les limites de deux fonctions $f$ et $g$.

#### a. Limite de $f+g$

| $\lim g$ / $\lim f$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell'$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | IND |
| $-\infty$ | $-\infty$ | IND | $-\infty$ |

**Exemple 11.11**

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$$

**Solution**

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$.

#### b. Limite de $f\times g$

| $\lim g$ / $\lim f$ | $\ell\neq0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell'\neq0$ | $\ell.\ell'$ | signe$(\ell').\infty$ | -signe$(\ell').\infty$ |
| $+\infty$ | signe$(\ell).\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | -signe$(\ell).\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Remarque**

Si $\ell = 0$ (et/ou $\ell' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = \ell.\ell' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0 \times \infty$") sont **indéterminées**.

**Exemple 11.12**

$$\lim_{x \to +\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} 3x\mathrm{e}^x = 0$$

**Solution**

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0} 3x\mathrm{e}^x = 0$.

### c. Limite de $\frac{f}{g}$

| $\lim g$ / $\lim f$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell' \neq 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | signe$(\ell').\infty$ | -signe$(\ell').\infty$ |
| $+\infty$ | 0 | IND | IND |
| $-\infty$ | 0 | IND | IND |

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ ($g$ tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

| $\lim g$ / $\lim f$ | 0 | $\ell \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $0^+$ | IND | signe$(\ell).\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $0^-$ | IND | -signe$(\ell).\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Exemple 11.13**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$$

**Solution**

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.

De même, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + 1 = 1$ par somme et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 1}{x} = +\infty$.

☞ *Exercice 1.*

## 2. Limite d'une fonction composée

**Théorème 11.8.**

Soient $f, g, h$ trois fonctions telles que $f = g \circ h$ sur un intervalle I. Soient $a, b, c$ des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

...

Si $\lim_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

**Démonstration**

Admis.

***Méthode***

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en $x_0$ :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite $b$ de X en $x_0$.
- On détermine la limite $c$ de $g$ en $b$, et on conclut : la limite de $f$ en $x_0$ vaut $c$.

**Exemple 11.14**

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$.

**Solution**

- On pose $X = x^2 - x + 1$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

- On a

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

**Exercice 11.15**

Montrer que $\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

**Solution**

Posons $X = 3x - 1$. Alors :

- On a $\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x - 1 = 0^+$.
- De plus, $\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

☞ *Exercice 2.*

## 3. Limites usuelles

### a. Limites classiques

On dispose d'un ensemble de limites usuelles.

**Proposition 11.9. Fonctions usuelles**

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair, } -\infty \text{ sinon.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} [x] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$$

**Proposition 11.10. Fonctions puissances**

$$\text{Pour tout } \alpha > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0} x^\alpha = 0$$

$$\text{Pour tout } \alpha < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0} x^\alpha = +\infty$$

$$\text{Pour tout } a > 1, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$$\text{Pour tout } a \text{ tel que } 0 < a < 1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = -\infty$$

## b. Croissances comparées

**Théorème 11.11. Croissances comparées**

Pour tout $\alpha > 0$, et $q > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^q(x)} = +\infty$$

**Conséquence 11.12.**

Par passage à l'inverse,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^q(x)}{x^\alpha} = 0$$

**Théorème 11.13. Conséquence des croissances comparées**

Pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

**Démonstration**

Posons $\mathrm{X} = \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x\to0^+} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} -\dfrac{\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}^\alpha} = 0$ d'après ce qui précède.

**Théorème 11.14.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

**Démonstration**

Se démontre de la même manière que précédemment (en posant $X = -x$).

***Méthode***

Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

**Exemple 11.16**

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$.

**Solution**

On pose $X = 2x$. Alors
$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{(X/2)^3} = \lim_{X \to +\infty} 2^3 \frac{e^X}{X^3} = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

☞ *Exercice 4.*

## 4. Autres limites

**Théorème 11.15. Taux d'accroissement**

On dispose des limites suivantes :
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

**Démonstration**

Nous verrons la démonstration de ces limites dans le chapitre dédié à la Dérivation.

**Exemple 11.17**

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$.

**Solution**

On remarque que, pour tout réel $x > 0$ :
$$\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x^2}$$
Or
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Par produit,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = +\infty$$

## 5. Quelques indéterminations classiques

### a. Polynômes et fractions rationnelles

***Méthode (Règle du plus haut degré)***

En $+\infty$ ou en $-\infty$, il y a une méthode classique dite du terme du plus haut degré.

- Si $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$.
- Si $g : x \mapsto \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} \cdots + b_0}$ est une fraction rationnelle, alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

**Exemple 11.18**

Soient $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ et $g : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

**Solution**

D'après la règle du terme du plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Remarque**

⚠ Cette méthode ne s'applique qu'aux limites en $+\infty$ et $-\infty$.

### b. Racines

***Méthode (Quantité conjuguée)***

Lorsqu'une fonction contient des radicaux, on utilise la quantité conjuguée.

**Exemple 11.19**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**Solution**

On constate que la limite en $+\infty$ de $f$ est indéterminée. Alors,

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

et donc, par composée et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

### c. « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ »

***Méthode***

Dans les cas « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », on commence par mettre au numérateur et au dénominateur le terme prépondérant (en utilisant les croissances comparées).

**Exemple 11.20**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{e^x-1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**Solution**

Alors

$$\frac{x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x}\,\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

☞ *Exercice 3.*

## VI. Etude des limites d'une fonction

### 1. 1ère étape : limites

Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites au borne de l'intervalle de définition :

- Si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f$.
- Si $f$ est définie sur $]-\infty; a[\cup]a;+\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, $a^+$ et $a^-$.

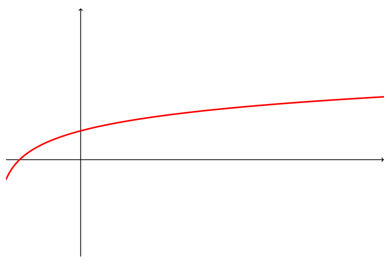
On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en $a^+$ ou $a^-$).

### 2. 2ème étape : branches infinies

Si les limites en $+\infty$ et/ou $-\infty$ sont infinies, on cherche une éventuelle asymptote oblique. Pour cela on détermine

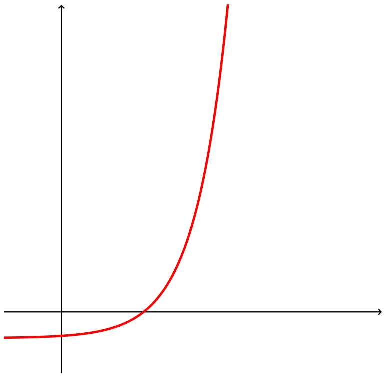
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- Si cette limite est nulle, on dit que la courbe de $f$ possède une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** en $+\infty$.



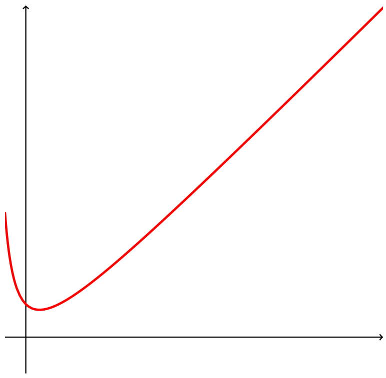
L'exemple classique est la fonction logarithme népérien.

- Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de $f$ possède une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $+\infty$.

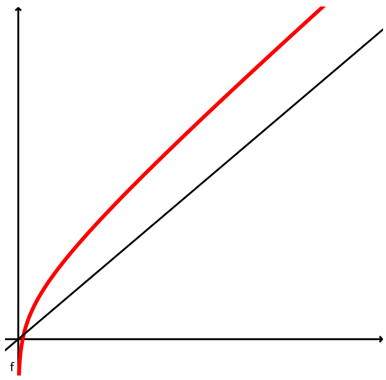


L'exemple classique est la fonction exponentielle.

- Si cette limite est un nombre réel $a$, on dit que la courbe de $f$ admet une direction asymptotique d'équation $y = ax$. Il reste alors à calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.
  - Si cette limite est un réel $b$, la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de $f$ en $+\infty$.



  - Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de $f$ possède une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.




(bien sûr, tout ceci est valable en $-\infty$.)

☞ *Exercice 7.*

## VII. Caractérisation séquentielle

Connaître la limite d'une fonction peut permettre, dans certains cas, de déterminer la limite d'une suite.

**Théorème 11.16. Caractérisation séquentielle de la limite**

Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $(u_n)$ une suite. On suppose que $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathrm{I}$ ou à une extrémité de I, et que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = a$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$$

**Exemple 11.21**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u$ la suite définie pour tout $n$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} = 1$$

**Exercice 11.22**

Déterminer, de la même manière,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

**Solution**

On pose $f : x \mapsto \ln(x)$ et pour tout $n$, $u_n = \frac{n}{n^2+1}$. On a rapidement

$$u_n \sim \frac{n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. On en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = -\infty$$

# Exercices 11

## Exercices

### Limites simples

●○○ **Exercice 1 Limites de somme, produit, quotient** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+\dfrac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5-2x^{-3}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\times(2+x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\times\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{\frac{1}{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1}{x^{-2}+1}$

●○○ **Exercice 2 Limites de composée** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-7x+1}{-2x+4}\right)^3$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{2x^2-x-1}{-x^2+1}\right|$

●○○ **Exercice 3 *Melting pot*** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\dfrac{1}{2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+1}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{2x+1}{x}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}$

●○○ **Exercice 4 Croissances comparées et encadrement** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$
4. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+x^2}{2^x}$
6. $\lim\limits_{x\to0^+} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$
11. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x^2 \ln(x)}$
12. $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\ln(x)}$

## Limites de fonctions

### ●○○ Exercice 5 Fonction (5 min.)

Déterminer la limite en 0 de la fonction $f$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

### ●●○ Exercice 6 Fonctions et partie entière (10 min.)

1. Montrer que, pour tout réel $x$,
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2-(x-[x])} \leqslant 1$$
2. Déterminer alors
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2-(x-[x])}$$

## Comportement asymptotique

### ●○○ Exercice 7 Fonctions (20 min.)

Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes et le comportement asymptotique aux bornes des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 14$ $\qquad g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad h : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $\qquad i : x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x-1}$