10

Chapitre

Matrices

Résumé

On introduit la notion de matrices, qui nous servira plus tard dans l'année. On voit également le lien avec les systèmes linéaires. On étudiera enfin la méthode de Gauss-Jordan pour l'inversibilité d'une matrice.

Plan du cours

> *« Il y a des temps pour toutes choses ; et les temps sont les matrices de toutes choses. Ils ne suivent donc pas une seule voie, mais empruntent des milliers de chemins. »*

Paracelse (1493 – 1541)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) . . . . □

② Connaître définition et propriétés des matrices inversibles . . . . □

③ Savoir déterminer le rang d'une matrice . . . . □

④ Savoir faire le lien entre système et matrice associée . . . . □

⑤ Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice...

- par récurrence, en conjecturant l'allure générale . . . . □
- par la formule du binôme de Newton . . . . □
- par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée . . . . □

 cc by nc sa

I. Matrices

1. Définition

Définition 10.1.

Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients réels un tableau rectangulaire de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

En général, lorsque A est une matrice à n lignes et p colonnes, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$. On écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Notation

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est noté $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition 10.2.

- On appelle **matrice ligne** $\begin{pmatrix} . & . & . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
- On appelle **matrice colonne** $\begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On appelle **matrice nulle** de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $0_{n,p}$ (ou 0 quand il n'y a pas d'ambiguïté), la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.

2. L'algèbre des matrices

a. Addition de matrices

Définition 10.3.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **somme** de la matrice A et de la matrice B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A+B$ définie par

$$A+B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \forall\ j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple 10.1

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

CC BY-NC-SA

b. Multiplication par un réel

Définition 10.4.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel. On appelle **produit** de la matrice A par le réel λ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée λA, définie par

$$\lambda A = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ \forall\, j\in[\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Exemple 10.2

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4\\ 4 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

c. Premières propriétés

Propriété 10.1.

Soient A, B et C trois éléments de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et λ,μ deux nombres réels.

- $A+B = B+A$ (commutativité de l'addition).
- $0+A = A+0 = A$ (0 est le neutre de l'addition)
- $A+(-A) = (-A)+A = A-A = 0$ ($-A$ est l'opposé de la matrice A.)
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$, $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$ et $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$ (distributivités)

Remarque

Les différentes propriétés précédentes font de l'ensemble $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.

Remarque

On peut manipuler, pour ces opérations, ainsi les matrices comme les nombres réels. Par exemple, l'équation $X+A = B$ d'inconnue la matrice X, admet comme unique solution $X = B-A$. De même, l'équation $2X = A$ d'inconnue la matrice X admet comme unique solution $X = \frac{1}{2}A$.

d. Produit matriciel

Définition 10.5.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{R})$. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, notée $A\times B$ ou AB, définie par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} \text{ où } \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ \forall\, j\in[\![1,m]\!],\ c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Par exemple :

 CC BY-NC-SA

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque

⚠ • Pour multiplier deux matrices, il faut qu'elles soient compatibles : lorsque l'on calcule AB il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

⚠ • La multiplication des matrices n'est pas **commutative** : en général, $AB \neq BA$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⚠ • Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, on peut avoir $AB = 0$ sans pour autant que A et B soient nuls. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ n'est pas **intègre**.

Exemple 10.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 10.2.

Soient A, B, C trois matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées), et λ un réel.

- $A(BC) = (AB)C = ABC$ (associativité de la multiplication)
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$
-] $(A+B)C = AC + BC$ et $C(A+B) = CA + CB$ (distributivités)

☞ *Exercice 1.*

e. Transposition

Définition 10.6.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de la matrice A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^tA$ ou A^T, définie par

$${}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ c_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, la matrice ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A par symétrie, en échangeant les lignes et les colonnes.

CC BY-NC-SA

Exemple 10.4
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 10.3.
Soient A et B deux matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées) et λ un réel.
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.
- ${}^t({}^tA) = A$ et ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

II. Matrices carrées

1. Définitions

a. Matrices carrées

Définition 10.7.
Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, plutôt que $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. De même, on notera 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 10.5
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 10.8.
Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, on appelle **diagonale** de A les coefficients $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exemple 10.6
Dans l'exemple précédent, la diagonale est $(1,-3)$.

b. Matrices diagonales et triangulaires

Définition 10.9.
- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n où tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
- La **matrice identité** de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, notée I_n, est la matrice diagonale avec des 1 sur la diago- ...

CC BY-NC-SA

nale :

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire supérieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire inférieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i < j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice identité I_n est **neutre** pour la multiplication : quelle que soit la matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{AI}_n = \mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

c. Matrices symétriques

Définition 10.10.

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée.

- A est dite **symétrique** si

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, une matrice est symétrique si et seulement si ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

- A est dite **antisymétrique** si ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n symétriques, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n antisymétiques.

Exemple 10.7

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

2. Puissances d'une matrice carrée

a. Définition de la puissance d'une matrice

Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on peut alors calculer AB et BA (elles sont compatibles) et le produit est encore dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On peut alors définir la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

Définition 10.11.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit k un entier. On définit A^k de la manière suivante :

- Si $k=0$, $A^0 = I_n$.
- Si $k>0$, $A^k = \underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 10.4.

Par définition, pour tout matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tous entiers p et q, $A^p\times A^q = A^{p+q}$.

Remarque

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n diagonales, alors le produit AB est facile à calculer ;

en effet, si $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n}\end{pmatrix}$, alors

$$AB=\begin{pmatrix} a_{1,1}\times b_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\times b_{n,n}\end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est une matrice diagonale $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$, alors pour tout entier p, on a

$$A^p=\begin{pmatrix} a_{1,1}^p & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^p\end{pmatrix}$$

b. Formule du binôme de Newton

Attention

Puisque la multiplication des matrices n'est pas commutative, on n'a pas $(AB)^k = A^kB^k$. En effet, $(AB)^k = (AB)(AB)\cdots(AB)$ et il faut que $AB=BA$ pour pouvoir obtenir A^kB^k.

Cela arrive cependant dans certains cas, ce qui permet de simplifier certains calculs :

Définition 10.12.

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB=BA$.

Exemple 10.8

La matrice I_n commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, $AI_n = I_n A = A$.

Théorème 10.5. Formule du binôme de Newton

Soient deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui <u>commutent</u>. Alors, pour tout entier n, on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

L'utilité principale de la formule du binôme des matrices est de pouvoir calculer la puissance de certaines matrices de manière « rapide ».

c. Méthodes de calculs

Méthode (Calcul de puissance avec la formule du binôme)

Pour calculer A^p, on peut parfois utiliser la formule du binôme de Newton, en décomposant A sous la forme $I_n + B$ avec B une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

Exemple 10.9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution

On constate que $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^2 = 0$. Puisque I_3 et B commutent (*car* I_3 *commute avec toutes les matrices*), on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$A^n = (I_3+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \underbrace{\binom{n}{2} B^2 + \cdots + \binom{n}{n} B^n}_{=0}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = I_3 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

résultat qui est également vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

☞ *Exercice 4.*

Méthode (Calcul de puissance par récurrence)

Pour calculer A^p, on peut également essayer de calculer les premières puissances, puis en déduire le résultat par récurrence sur p.

Exemple 10.10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution

On constate que

$$A^0 = I_2 \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors P_n la proposition définie pour tout entier n par

$$P_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on démontre par récurrence sur n :

- Initialisation : puisque $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixé. Montrons alors P_{n+1} :

$$A^{n+1} = A^n \times A \underbrace{=}_{\text{par H.R.}} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  La proposition P_{n+1} est donc vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 0,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Exercices 2 et 3.*

III. Matrices inversibles

1. Définition

Définition 10.13.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, B est appelée **matrice inverse** de A, et est notée $B = A^{-1}$.

Notation

On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrée d'ordre n inversibles.

Exemple 10.11

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2$$

 cc by nc sa

Remarque
La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet, $I_n I_n = I_n I_n = I_n$.

2. Propriétés

Propriété 10.6.
Soient A et B deux matrices carrées de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est également inversible, et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration
Pour le premier point, on a en effet $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ donc A^{-1} est inversible et son inverse est A.
Pour le second point, on a $AB(B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.
Donc AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.

Pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 10.7.
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. S'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$ alors A n'est pas inversible.

Démonstration
Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons que A soit inversible, d'inverse A^{-1}. Alors

$$AB = 0_n \Rightarrow A^{-1}(AB) = O_n \Rightarrow B = 0_n$$

ce qui est absurde, puisque B n'est pas nulle.

Remarque
Si A et B sont toutes les deux non nulles, telles que $AB = 0_n$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

3. Règles de calcul

Propriété 10.8.
Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $C \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors

$$AC = B \Leftrightarrow A = BC^{-1} \qquad CA = B \Leftrightarrow A = C^{-1}B$$
$$AC = BC \Leftrightarrow A = B \qquad CA = CB \Leftrightarrow A = B$$

⚠ **Attention**
Cela n'est valable que si C est inversible ! Ce n'est pas forcément vrai si C n'est pas inversible. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AC = BC$ et pourtant $A \neq B$.

Pour démontrer qu'une matrice est inversible, il est suffisant de démontrer qu'elle est inversible d'un seul côté :

Théorème 10.9.

- Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$, alors A est inversible, d'inverse B.
- Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$, alors A est inversible, d'inverse B.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ ET $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$. Seul un des sens est nécessaire.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

Exemple 10.12

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note également $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{A}(\mathrm{I}_2 + \mathrm{B})$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Solution

1. On constate que
$$\mathrm{A}(\mathrm{I}_2 + \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$$
2. D'après ce qui précède, A est inversible, et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_2 + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ *Exercices 5, 6 et 7.*

4. Ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

L'inverse d'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est facile à obtenir :

♡ **Théorème 10.10.**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a alors
$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté det(A).

Démonstration

Notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On suppose que $\mathrm{A} \neq 0$ et donc $\mathrm{B} \neq 0$. Alors
$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)\mathrm{I}_2$$

- Si $ad - bc = 0$, alors $\mathrm{AB} = 0_2$. Puisque $\mathrm{B} \neq 0$, d'après un résultat précédent, A ne peut pas être inversible.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors $\mathrm{A} \times \left(\frac{1}{ad-bc}\mathrm{B}\right) = \mathrm{I}_2$. D'après un résultat précédent, A est donc inversible,

CC BY NC SA

et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 10.13

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et inversible et déterminer son inverse.

Solution

Son déterminant vaut $\det(A) = 1 - 2 = -1$. Il est non nul, donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices

1. Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 10.14

On s'intéresse au système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Notons alors $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$(S) \Leftrightarrow AX = Y$$

La matrice A est appelée **matrice associée** au système (S). Résoudre le système (S), c'est donc trouver le vecteur colonne X.

Définition 10.14. Matrice associée à un système

Soit (S) un système $n \times p$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On appelle **matrice associée** à (S) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors $AX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. Inverse d'une matrice et système

Théorème 10.11.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Le système (S) $AX = B$ admet une unique solution si, et seulement si, la matrice A est inversible.
Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Remarque

Ainsi, pour résoudre un système (S), on peut introduire la matrice associée et résoudre une équation matricielle $AX = B$. Cela permet en général de simplifier les notations.

☞ *Exercice 11.*

Conséquence 10.12.

Une matrice triangulaire supérieure A est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale sont non nuls.

Démonstration

En effet, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses pivots sont non nuls.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice A est, ou n'est pas inversible, sans calculer son inverse, on résout matriciellement l'équation $AX = 0$ en appliquant la méthode du pivot de Gauss. Si on obtient une diagonale sans terme nul, la matrice sera inversible. On peut simplifier les écritures en écrivant $(A|0)$ pour ne pas s'encombrer des inconnues.

Exemple 10.15

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Solution

On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \text{ligne pivot} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}$$

Puisqu'un des termes sur la diagonale est nul, la matrice A n'est pas inversible.
Pour B :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Les termes sur la diagonale étant non nuls, la matrice B est bien inversible.

cc by-nc-sa

Méthode

Pour déterminer l'inverse d'une matrice, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss, mais en simplifiant les écritures. On écrit $(M|I_n)$ et on cherche à remplacer, par des opérations sur les lignes, M par I_n. A la place du I_n de départ, on aura alors M^{-1}.

Exemple 10.16

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution

On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Exercices 8, 9 et 10.*

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette méthode de détermination de l'inverse d'une matrice est appelée **réduction de Gauss-Jordan**, en hommage à *Carl Friedrich Gauss* et *Wilhelm Jordan*, mais était connue des Chinois au 1^{er} siècle de notre ère, sous le nom *Fang cheng* dans *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*.

Définition 10.15.

On appelle **rang** d'une matrice A, et on note rg(A) le rang du système associée $AX = 0$, où X représente le vecteur colonne des inconnues, c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles après réduction de Gauss-Jordan.

Propriété 10.13.

On dispose des propriétés suivantes :

- $\text{rg}(A) = 0$ si et seulement si la la matrice est nulle.
- $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si toutes les colonnes de A sont colinéaires.
- Si la matrice A est carrée d'ordre n, $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si la matrice est inversible.

Exercices 10

Exercices

Calcul matriciel

●○○ **Exercice 1 Produit matriciel** (10 min.)

Calculer les produits suivants :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\-1 & 1\\1 & -2\\-1 & -3\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}$$

Puissances

●○○ **Exercice 2 Puissances et récurrence** (20 min.)

Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$.
2. $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

▶ ***Méthode***

Pour déterminer A^n, on peut chercher une périodicité des puissances, c'est-à-dire un entier p tel que $A^p = A$ ou $A^p = I_n$.

●○○ **Exercice 3 Puissances et nilpotence** (15 min.)

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $I_3 + J$ où J est une matrice à déterminer.
2. Calculer J^2 et J^3. En déduire l'expression pour tout entier n de A^n en fonction de I_3, J et n.

●●○ **Exercice 4 Puissances et binôme de Newton** (15 min.)

Soient $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\3 & 1 & 3\\3 & 3 & 1\end{pmatrix}$, et $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Exprimer A sous la forme $\alpha I_3 + \beta J$, où α et β sont deux réels.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Inversibilité

●○○ Exercice 5 Inversibilité et polynôme annulateur (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire $-A^3 + 2A^2 + 4A - 8I_3$.
3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

●○○ Exercice 6 Inversibilité et polynôme annulateur II (10 min.)

Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

●○○ Exercice 7 Inversibilité et polynôme annulateur III (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$. En déduire que $I_3 - A$ est inversible, et déterminer son inverse.
4. De la même manière, montrer que $I_3 + A$ est inversible, et déterminer son inverse.

●○○ Exercice 8 Inversibilité par calcul (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

●○○ Exercice 9 Inversibilité par calcul II (20 min.)

Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

●○○ Exercice 10 Inversibilité par calcul III (10 min.)

Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Systèmes et matrice

●○○ Exercice 11 Système et matrice (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système linéaire :

$$(S)\ \begin{cases} \quad\ \ y + z = 1 \\ x \quad\ \ + z = 2 \\ x + y \quad\ \ = 3 \end{cases}$$

Suites et matrices

●●○ Exercice 12 Suites et puissances (20 min.)

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2=A+2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que pour tout n, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n=u_nA+v_nI_3$. On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1} et u_n, et entre v_{n+1} et v_n.
3. On pose $\alpha_n=2u_n+v_n$ et $\beta_n=u_n-v_n$. Reconnaître les suites α et β. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, puis A^n pour tout n.

●○○ Exercice 13 Suite et matrice - I (30 min.)

On considère les deux suites réels (u_n) et (v_n) définie par u_0, v_0 et pour tout n,

$$u_{n+1}=6u_n-v_n \text{ et } v_{n+1}=u_n+4v_n$$

En introduisant une matrice A bien choisie vérifiant

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

démontrer successivement que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis $A=5I_2+J$ avec $J^2=0$. Déterminer alors A^n, puis l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

●●○ Exercice 14 Suite et matrice - II (20 min.)

On considère la suite u définie par $u_0=2$, $u_1=1$, $u_2=-1$ et pour tout n,

$$u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n$$

On définit les matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $D=P^{-1}AP$? En déduire D^n.
2. Montrer que pour tout n, $D^n=P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de A^n.
3. Pour tout n, on pose $X_n=\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que pour tout n, $X_{n+1}=AX_n$. En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   (b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Pour aller plus loin

cc by nc sa

●○○ Exercice 15 Exercice ouvert (10 min.)

Trouver toutes les matrices M diagonales d'ordre 3 telles que

$$\mathrm{M}^3+2\mathrm{M}^2-\mathrm{M}-2=0$$

●○○ Exercice 16 Valeurs propres (15 min.)

Soit A la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_2$ n'est elle pas inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices colonnes X telles que $\mathrm{AX}=\lambda \mathrm{X}$ lorsque λ prend les valeurs trouvées au 1.

Remarque : les λ trouvés s'appellent les valeurs propres de la matrice, et les vecteurs colonnes trouvés au 2 les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.