Chapitre 9

Dénombrement

Résumé

On introduit des notions de base sur le dénombrement : cardinal, liste, combinaison et nombres combinatoires.

Plan du cours

> *« Il n'y a donc qu'à débrouiller le revenu de chacun, et le mettre en évidence, afin de voir comment il doit être taxé.*
> *Ce que je dois dire à cet égard suppose un dénombrement exact de toutes les personnes qui habitent le royaume. »*

Sébastien Le Prestre de Vauban (1633 – 1707). *Les Oisivetés de Monsieur de Vauban*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître les formules liées au cardinal d'un ensemble . . . . □

② Connaître la différence entre une permutation, une liste sans répétition et une liste avec répétition . . . . □

③ Savoir dénombrer les différents ensembles précédents . . . . □

④ Connaître la définition d'une combinaison . . . . □

⑤ Savoir l'expression du nombre de combinaison $\binom{n}{p}$ . . . . □

⑥ Connaître les formules liées aux nombres de combinaisons . . . . □

⑦ Connaître la formule du binôme de Newton et savoir la démontrer . . . . □

I. Cardinaux

Définition 9.1.

Un ensemble E est dit **fini** s'il est soit vide, soit composé d'un nombre fini d'éléments distincts $e_1, \cdots, e_n$. Dans ce cas, on appelle n son **cardinal** (i.e. son nombre d'éléments), que l'on note $|\mathrm{E}|$ ou $\mathrm{card}(\mathrm{E})$.
Par convention, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.

Remarque

Faire du dénombrement, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans avoir à connaître la liste des éléments de E.

Propriété 9.1.

Soient E et A deux ensembles, tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et E est un ensemble fini. Alors

- A est également fini ;
- $\mathrm{card}(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{card}(\mathrm{E})$.

Si, de plus, $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{card}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{E}$

Remarque

⚠ Si $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{card}(\mathrm{E})$ sans avoir $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ on ne peut pas conclure ! Par exemple $\mathrm{A} = \{1, 2\}$, $\mathrm{E} = \{2, 3\}$. Alors $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{card}(\mathrm{E})$ mais $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$

Théorème 9.2. Formule du Crible de Poincaré

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{B}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{C}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$

- Soient $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E deux à deux disjoints. Alors

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(\mathrm{A}_k)$$

Proposition 9.3.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. On note $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$ l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.
Alors

$$\mathrm{card}(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Démonstration

Remarquons que les ensembles $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ sont disjoints, de réunion A. D'après le théorème précédent

$$\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{card}\left((\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \backslash \mathrm{B})\right) = \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B})$$

Proposition 9.4.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

$$\mathrm{card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{E})\times\mathrm{card}(\mathrm{F})$$

Démonstration

On note n le cardinal de E et p celui de F. $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ est constitué des couples $(x;y)$ avec $x\in\mathrm{E}$ et $y\in\mathrm{F}$. Pour chaque élément x de E, il y a p couples possibles (un couple par élément de F). Puisqu'il y a n éléments dans E, on a donc

$$\underbrace{p+\cdots+p}_{n \text{ fois}} = np \text{ éléments dans } \mathrm{E}\times\mathrm{F}$$

☞ *Exercices 1 et 2.*

II. Dénombrement

Dans cette partie, nous allons considérer des listes et des ensembles.

Définition 9.2.

On appelle **liste** de p éléments d'un ensemble E une suite <u>ordonnée</u> de p éléments.

Exemple 9.1

Ainsi, les listes $(1;2;3)$ et $(1;3;2)$ sont deux listes distinctes, et les ensembles $\{1;2;3\}$ et $\{1;3;2\}$ sont identiques.

1. Permutation

Définition 9.3.

Soit E un ensemble non vide à n éléments. On appelle **permutation** de E une liste des n éléments de E.

Exemple 9.2

Si $\mathrm{E}=\{a;b;c\}$, alors $(a;c;b)$ et $(b;a;c)$ sont deux permutations de E.

Définition 9.4.

On note $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. En particulier, on note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1;\cdots;n\}$.

Théorème 9.5.

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments, $n\geqslant 1$, est égal à

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$$

Démonstration

Supposons qu'on dispose de n cases, numérotées de 1 à n. Dans la case numéro 1, on peut mettre un des n éléments de E. Une fois la case 1 remplie, il ne reste que $n-1$ éléments à choisir. On en prend un qu'on met dans la case 2. Il ne reste alors que $n-2$ éléments. Et on réitère.

Exercice 9.3

On dispose de 4 personnes , à disposer sur 4 chaises. Combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

On doit placer 4 personnes sur 4 chaises. Il faut donc faire une permutation de ces 4 personnes. Il y a donc

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ possibilités}$$

2. Liste sans répétitions de p éléments de E

Définition 9.5.

Une **liste sans répétitions** (ou **arrangement**) de p éléments de E est une liste de p éléments de E deux à deux distincts ($1 \leqslant p \leqslant n$).

Théorème 9.6.

Soit E un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$ et p un entier $1 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre de listes sans répétitions de p éléments de E est égal à

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration

On utilise le même raisonnement avec les cases, sauf qu'au lieu de mettre les n éléments de E, on n'en met que p, en utilisant p cases.

Exercice 9.4

Une association ayant 20 membres souhaite élire leur bureau, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Combien de bureaux est-il possible de composer ?

Solution

Dans cet exercice, l'ordre est important (on ne choisit pas 3 personnes parmi les 20, on choisit très exactement un président, un vice-président et un trésorier parmi les 20). Quand l'ordre compte, on parle donc d'arrangement.
Ici, on veut donc des listes de 3 éléments d'un ensemble à 20 éléments. Il y en a donc

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840 \text{ bureaux possibles}$$

Exercice 9.5

Toujours dans la même association, il y a 12 hommes et 8 femmes. On impose que le trésorier soit une femme. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Solution

Le poste de trésorier est une femme. Il faut donc choisir une femme parmi les 8, soit 8 possibilités.

Pour les deux autres postes, comme ce qui précède, on a $A_{19}^2 = 19 \times 18 = 342$ bureaux possibles (sachant que la personne trésorière n'aura pas d'autres postes). Cela donne donc

$$8 \times A_{19}^2 = 2736 \text{ bureaux possibles}$$

3. Liste avec répétitions de p éléments de E

Théorème 9.7.

Soit $p \geqslant 1$. Il y a n^p listes avec répétitions de p éléments de E.

Démonstration

En effet, si on possède p cases, on peut mettre dans chacune des cases l'un des n éléments de E.

Exercice 9.6

Dans une classe de 30 élèves, on décide que chaque jour pendant 3 jours, une personne va nettoyer le tableau, sachant qu'une personne ayant déjà été de corvée peut y retourner. Combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

Il faut donc choisir 3 élèves, avec répétition. Il y a donc

$$30^3 = 27000 \text{ possibilités}$$

III. Combinaisons

1. Définition

Définition 9.6.

Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble (ou une partie) de E qui contient p éléments.

Exemple 9.7

Si $E = \{a; b; c\}$ et $p = 2$, les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a; b\}, \{a; c\}$ et $\{b; c\}$.

Notation

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et on lit "p parmi n". On note aussi C_n^p.

Exemple 9.8

D'après l'exemple précédent, $\binom{3}{2} = 3$.

Remarque

Pour tout entier n, on obtient rapidement :

$$\binom{n}{0}=1 \qquad \binom{n}{1}=n \qquad \binom{n}{n}=1$$

☞ *Exercice 3.*

2. Nombre de combinaisons

Théorème 9.8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Pour $p>n$, on a $\binom{n}{p}=0$.

Démonstration

- Pour $p=0$, il n'existe qu'une seule partie sans élément : la partie vide. Donc
$$\binom{n}{0}=1=\frac{n!}{0!(n-0)!}$$
- Supposons $p>0$. Prenons une partie F de p éléments de E. On constate qu'il y a $p!$ permutations de F, et une permutation de F est une liste sans répétition de p éléments. Si on fait de même avec toutes les parties de E à p éléments, on va décrire toutes les listes sans répétition de p éléments, et une seule fois (deux parties distinctes de E vont engendrer des listes distinctes nécessairement). On a donc
$$(\text{nb de partie à } p \text{ éléments de E}) \times p! = \text{nb de listes sans répétition de } p \text{ éléments}$$
soit
$$\binom{n}{p}\times p!=\frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 9.9

Le nombre de partie à 4 éléments d'un ensemble à 21 éléments est

$$\binom{21}{4}=\frac{21!}{4!(21-4)!}=5985$$

Exercice 9.10

Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

- Combien y a-t-il de comités possibles ?
- Combien y a-t-il de comités sachant qu'une des personnes doit être une femme ?

Solution

- Il nous faut choisir (sans ordre) 3 personnes parmi 20. Il y a donc
$$\binom{20}{3} = 1140 \text{ comités possibles}$$
- On veut au moins une femme.

⚠ Il n'y a pas $\binom{8}{1}\binom{19}{2}$ comités possibles avec au moins une femme, car en comptant ainsi, certains comités sont comptés plusieurs fois !

Notons A l'ensemble des comités ayant au moins une femme, B l'ensemble des comités n'ayant que des hommes, et C l'ensemble de tous les comités possibles. Alors $A \cup B = C$ et $A \cap B = \varnothing$. Or
$$\text{card}(B) = \binom{12}{3} = 220 \text{ comités}$$
$$\text{card}(C) = \binom{20}{3} = 1140 \text{ comités}$$
Donc
$$\text{card}(A) = \text{card}(C) - \text{card}(B) = 920 \text{ comités}$$

Méthode

Dans un exercice, il faut déterminer en premier lieu si on va devoir utiliser les listes sans répétition, avec répétition ou les combinaisons. On retiendra que :

- si on s'intéresse à un choix ordonné (par exemple, un classement à un jeu, ou bien le choix de différents postes dans une association), on utilisera les *listes*, sans répétition (cas général où une personne ne peut pas être à deux endroits en même temps), ou avec répétition (si au contraire on l'accepte).
- si on s'intéresse à la sélection **simultanée** (donc on ne tient pas compte de l'ordre), on utilisera *les combinaisons*.

☞ *Exercices 4, 5, 6 et 7.*

IV. Formules

1. Formules de base

Théorème 9.9.

Pour tous naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a
$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$
(*Formule du triangle de Pascal*) Pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ on a
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration

- En effet,
$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

- On a
$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$
En mettant au dénominateur commun $p!(n-p)!$, on a alors
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}&=\frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\&=\frac{(n-1)!\left[p+(n-p)\right]}{p!(n-p)!}\\&=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}\end{aligned}$$

Remarque

La deuxième formule nous permet d'obtenir tous les nombres combinatoires de proche en proche, dans le **Triangle de Pascal** :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 9.10.

Pour tout entier n strictement positif, et tout entier k avec $1\leqslant k\leqslant n$, on a
$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration

On a, en effet :
$$n\binom{n-1}{k-1}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$
soit
$$n\binom{n-1}{k-1}=\frac{k\times n!}{k\times(k-1)!(n-k)!}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}$$

2. Formule de Vandermonde

Une première formule intéressante liant les nombres combinatoires est la formule de Vandermonde, formule que l'on va démontrer de manière purement combinatoire.

Théorème 9.11. Formule de Vandermonde

Soient m et n deux entiers strictement positifs. Pour tout entier k tel que $k \leqslant m$ et $k \leqslant n$, on a

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Démonstration

On dispose de n jetons blancs, et m jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire simultanément k jetons et on note E l'ensemble des tirages possibles.
Par définition de E, on a

$$\operatorname{card}(\mathrm{E}) = \binom{m+n}{k}$$

Notons alors E_j (pour j entier entre 0 et k) l'ensemble des tirages de k jetons ayant j jetons noirs. Puisqu'il y a j jetons noirs, il y a $k-j$ jetons blancs dans E_j. Ainsi

$$\operatorname{card}(\mathrm{E}_j) = \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Constatons enfin que, par définition, $\mathrm{E} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{E}_j$ et les E_j sont deux-à-deux disjoints. Ainsi,

$$\operatorname{card}(\mathrm{E}) = \sum_{j=0}^{k} \operatorname{card}(\mathrm{E}_j)$$

ce qui donne

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

La formule de Vandermonde, nommée d'après **Alexandre-Théophile Vandermonde**, est utilisée en probabilité pour déterminer l'espérance d'une loi particulière, appelée loi **hypergéométrique**.

Exercice 9.11

En utilisant la formule de Vandermonde, déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

Solution

En appliquant la formule de Vandermonde au cas particulier $k = m = n$, on obtient

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$$

Or, $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

3. Formule du binôme de Newton

Une autre formule est une relation importante qui servira avec les matrices.

Théorème 9.12. Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

soit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Soit P_n la proposition "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$" définie pour tout entier $n \geqslant 1$ (*le résultat est également vrai pour* $n=0$).

- Pour $n=1$ le résultat est vrai car $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a + \binom{0}{1}b$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et calculons $(a+b)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\ &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n}{n}ab^n \\ &\qquad + \binom{n}{0}a^n b + \cdots + \binom{n}{p-1}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}\end{aligned}$$

Or pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ (formule du triangle de Pascal), donc

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{p}a^{n-p+1}b^p + \cdots \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

Exercice 9.12

Calculer

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \text{ et } \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Solution

- Prenons $a=b=1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Donc $\mathrm{A}_n = (1+1)^n = 2^n$.

- Prenons $a = 2$ et $b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Donc $\mathrm{B}_n = (1+2)^n = 3^n$.

☞ *Exercice 8.*

Exercices 9

Exercices

Dénombrement

●○○ **Exercice 1 Dénombrement** (10 min.)

On possède un jeu de 32 cartes. On note A l'ensemble "les deux cartes tirées sont rouges", B l'ensemble "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'ensemble "les deux cartes tirées sont un personnage".

Que représente $\overline{A}, A \cap B \cap \overline{C}$ et $(A \cap B) \cap C$?

Ecrire à l'aide des ensembles A, B et C les ensembles F : "les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges", et G : "on obtient au plus un personnage rouge".

●○○ **Exercice 2 Dénombrement** (5 min.)

Parmi 40 étudiants, 8 connaissent le portugais, 15 le chinois, et 9 le russe. D'autres part, 4 parlent chinois et russe, 5 chinois et portugais, 2 russe et portugais et 2 parlent les 3 langues. Combien d'étudiants ne connaissent aucune de ces trois langues ?

●○○ **Exercice 3 Arrangement et combinaison** (5 min.)

Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Ecrire

1. Les combinaisons de 3 éléments de E.
2. Les arrangements de 3 éléments de E.

●○○ **Exercice 4 Dénombrement** (5 min.)

Au menu d'un restaurant, il y a 3 entrées 2 plats et 4 desserts possibles. Combien de menus (une entrée, un plat, un dessert) sont possibles ?

●○○ **Exercice 5 Anagramme** (10 min.)

Un anagramme est un mot (ou une succession de lettres) formés des mêmes lettres, dans un ordre différent. Combien d'anagrammes peut on former avec le mot GLACE ? le mot ELEVE ?

●○○ **Exercice 6 Anagramme** (10 min.)

Un sac possède 5 paires de chaussettes noires, 2 paires de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes rouges. On choisit au hasard deux chaussettes simultanément.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? de résultats possibles ?
2. Combien de tirages amènent deux chaussettes vertes ? deux chaussettes de même couleur ?

●○○ **Exercice 7 Anagramme** (10 min.)

Sept personnes sont debout, et on possède trois chaises. De combien de manière peut on asseoir les gens ?

On dispose ensuite de trois chaises et deux bancs d'une place. Même question, en considérant qu'un banc et une chaise sont deux objets différents.

●○○ Exercice 8 Formule du binôme (10 min.)

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Dénombrement en probabilité

●●○ Exercice 9 Tirage sans remise, tirage avec remise (15 min.)

Une urne contient 9 boules distinctes et indiscernables au toucher : 2 boules rouges, 3 boules vertes et 4 boules blanches. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité
   (a) D'obtenir au moins une boule rouge.
   (b) D'obtenir des boules de la même couleur.
   (c) D'obtenir une boule rouge et une boule verte.
3. Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage simultané, et dans le cas d'un tirage successif avec remise.

●○○ Exercice 10 Des cartes (10 min.)

On tire, au hasard, 3 cartes dans un jeu de 32 cartes classique.

1. Quel est l'univers ? Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cartes de même hauteur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 cartes exactement de la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 ou 3 cartes de même couleur ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un coeur ou un roi ?

●●○ Exercice 11 Paradoxe des anniversaires (10 min.)

On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

●●● Exercice 12 Un peu de reflexion (10 min.)

On dispose d'une urne disposant de n boules blanches et n boules noires. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire deux boules de chaque couleur à chaque tirage ?

