

7

Chapitre

Convergence d'une suite

Résumé

Nous allons généraliser la notion de limite, qui a été vue en classe de Terminale. Nous introduirons des méthodes pour déterminer les limites et des théorèmes permettant de montrer l'existence de limites.

Plan du cours

Chapitre 7. Convergence d'une suite

I. Généralités	3
II. Théorèmes sur les limites	5
III. Opération sur les limites	8
IV. Suites adjacentes	12
V. Comparaison de suites	13
Exercices	17

« Quand je regardais le tableau, j'éprouvais la même convergence en un seul et unique point : un bref instant touché par le soleil qui existait maintenant et pour toujours. C'est fortuitement que je remarquais ma chaîne à la cheville de l'oiseau, ou que je songeais combien la vie de cette petite créature, battant brièvement des ailes puis toujours forcée, sans espoir, d'atterrir au même endroit, avait dû être cruelle. »

Donna Tartt (1963-) – *Le Chardonneret*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- ① Concernant les limites :
 - Connaître la définition mathématique des limites
 - Savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) ..
 - Savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison
 - Connaître les croissances comparées
 - Savoir appliquer le théorème de la limite monotone
- ② Savoir reconnaître les suites adjacentes
- ③ Savoir démontrer qu'une suite est négligeable devant une autre
- ④ Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes

I. Généralités

1. Limite finie

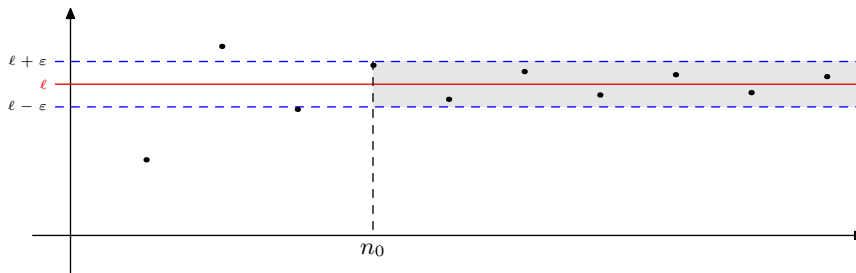
Définition 7.1.

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** ℓ , et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



Exemple 7.1

La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 :

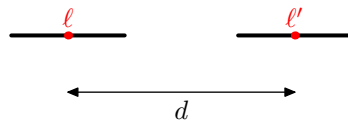
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Propriété 7.1.

Si une suite (u_n) a une limite finie, celle-ci est **unique**.

Démonstration

On suppose que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' et que $\ell \neq \ell'$. Donc la distance entre ℓ et ℓ' est non nulle. On la note d , et on s'intéresse aux deux intervalles $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$ et $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$. Par définition de la convergence, tous les termes de la suite sont dans ces deux intervalles à partir d'un certain rang. Or :



les deux intervalles sont disjoints, ce qui est absurde.

2. Limite infinie

Définition 7.2.

Soit (u_n) une suite.

- Si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$, et on note

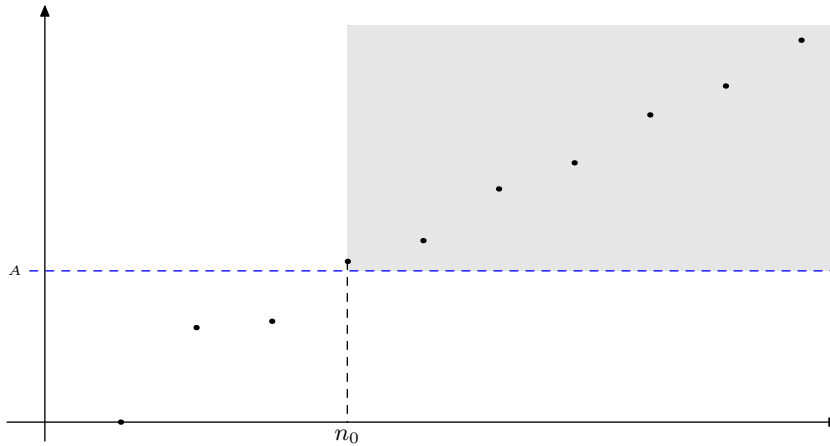
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

- Si tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$, et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Exemple 7.2

La suite u définie pour tout n par $u_n = n$ a pour limite $+\infty$, et la suite v définie pour tout n par $v_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$$

Algorithme 7.2.

Si une suite **croissante** (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) :

Algorithme 1 : SEUIL

Entrées : Saisir A (nombre positif)

Initialisation :

$n \leftarrow 0$

$U \leftarrow u_0$

Tant que $U \leq A$

$n \leftarrow n + 1$

$U \leftarrow u_n$

FinTantque

Sorties : Afficher n

En Scilab, pour la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n, u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$$

on obtient :

Scilab 7.3. Seuil pour une suite croissante

// Résumé : programme déterminant le premier entier n tel que



```

// un > a, où a est un réel donné et u une suite de limite +∞

n=0;
u=1;
// Valeur de seuil
seuil=100;

while(u<=seuil)
  // On n'a pas dépassé le seuil.
  // On passe au rang suivant
  n=n+1;
  // On calcule le terme suivant de la suite
  u=1+u^2;
end

// Ainsi, n contient le premier rang à partir duquel u_n > seuil

```

3. Suite convergente

Définition 7.3.

On dit qu'une suite est **convergente** si elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** si elle possède une limite infinie.

4. Suite sans limite

Remarque

Certaines suites ne possèdent aucune limite, que ce soit finie ou infinie.

Exemple 7.3

La suite $((-1)^n)$ prend la valeur 1 aux termes pairs, et -1 aux termes impairs. Elle ne peut donc ni converger, ni diverger : elle ne possède donc pas de limite.

II. Théorèmes sur les limites

1. Théorème de comparaison

Théorème 7.4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' . Si, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration

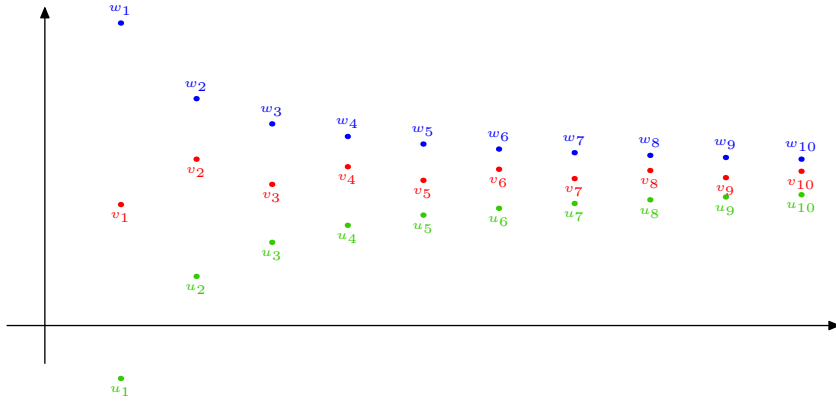
Supposons au contraire que $\ell > \ell'$. En notant d la distance (non nulle) entre ℓ et ℓ' , cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) se trouvent dans l'intervalle $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$. Or, $v_n \geq u_n$, donc, à partir d'un certain rang $v_n \geq \ell - \frac{d}{4}$. Donc l'intervalle $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$ ne contient aucun élément de la suite (v_n) à partir d'un certain rang : absurde.

2. Théorème d'encadrement

Théorème 7.5. Théorème d'encadrement

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$. Alors, (v_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$



Remarque

Ce théorème est également appelé théorème des gendarmes.

Démonstration

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ .

Par définition de la limite, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geq n_1$, u_n soit dans I. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geq n_2$, w_n soit dans I.

Mais alors, pour tout n plus grand que n_1 et n_2 , $u_n \in I$ et $w_n \in I$. Or, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et puisque I est un intervalle, on en déduit que pour tout n plus grand que n_1 et n_2 , $v_n \in I$.

Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on en déduit bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite où $(-1)^n$ apparaît, on appliquera (quasi) systématiquement le théorème d'encadrement.

Exemple 7.4

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$$

Solution

Pour tout $n \neq 0$, on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $1 \leq (-1)^n + 2 \leq 3$ et puisque $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n + 2}{n} \leq \frac{3}{n}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n} = 0$$

Théorème 7.6.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ un réel. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Démonstration

Application du théorème d'encadrement.

Exemple 7.5

On constate que, pour tout $n \geq 0$:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \geq 1}$ converge et a pour limite 0.

Théorème 7.7. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Démontrons le premier point. Soit A un réel strictement positif quelconque. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \in [A; +\infty[$. Or, puisque pour tout n , $u_n \geq v_n$, on a également $u_n \in [A; +\infty[$ pour $n \geq n_0$.

Par définition de la limite infinie, cela signifie donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. Convergence des suites monotones

Théorème 7.8. Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Démonstration

Théorème admis.

Théorème 7.9.

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. La suite étant non majorée, quel que soit le réel a , on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à a . On a donc $u_N > a$.

Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > a$. Tous les termes de la suite u

sont donc dans l'intervalle $]a; +\infty[$ à partir d'un certain rang. Ceci étant vrai pour tout a , par définition, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 7.6

La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante, non majorée : sa limite est $+\infty$.


La suite v définie pour tout $n > 0$ par $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante, majorée (par 1) : elle converge donc.

Théorème 7.10.

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite ℓ . Alors, pour tout entier n , on a $u_n \leq \ell$.

Démonstration

Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Notons $r = u_{n_0} - \ell > 0$. Par croissance de la suite u , on a donc, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$. Mais alors, l'intervalle $]\ell - r; \ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite à partir de n_0 . Cela contredit le fait que la suite u converge vers ℓ : ceci est absurde.

 Exercices 7 et 8.

III. Opération sur les limites

1. Limites usuelles

Théorème 7.11.

On dispose des limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*) & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*) & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |n| = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}_-^*) & \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty \end{array}$$

2. Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \setminus \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exercice 7.7

Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + \sqrt{n}$.

Solution

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

3. Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \setminus \lim u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \cdot \ell'$	$\text{signe}(\ell') \cdot \infty$	$-\text{signe}(\ell') \cdot \infty$
$+\infty$	$\text{signe}(\ell) \cdot \infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\text{signe}(\ell) \cdot \infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

On retiendra qu'on applique la règle des signes pour déterminer le signe du résultat.

Exercice 7.8

Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^n$.

Solution

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^n = +\infty$.

4. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim v_n \setminus \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\text{signe}(\ell') \cdot \infty$	$-\text{signe}(\ell') \cdot \infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Exercice 7.9

Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} - 1}$.

Solution

Par somme, on a les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - 1 = -1$$

Par quotient, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} - 1} = -2$$

5. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle

$\lim v_n \setminus \lim u_n$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	$\text{signe}(l) \cdot \infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	$-\text{signe}(l) \cdot \infty$	$-\infty$	$+\infty$

6. Limite de (q^n)

Théorème 7.12.

Soit q un nombre réel. On s'intéresse à la suite (q^n) .

- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) ne possède pas de limite.

Démonstration

Tout part de l'inégalité de Bernoulli, qui se démontre à l'aide d'une récurrence : pour tout $x > 0$, et pour tout entier n , on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

- Si $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + x$ avec $x = q - 1 > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli

$$q^n \geq 1 + nx = 1 + n(q - 1)$$

Or, puisque $q - 1 > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n(q - 1) = +\infty$$

Par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- Si $q = 1$, la suite (q^n) est la suite constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- Si $-1 < q < 1$, posons $Q = \frac{1}{|q|} > 1$. Alors, d'après ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = +\infty$$

Or, on a

$$0 \leq |q|^n = \left(\frac{1}{Q}\right)^n = \frac{1}{Q^n}$$

Par théorème d'encadrement, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = +\infty$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- Si $q = -1$, la suite $(-1)^n$ vaut 1 pour les termes pairs, et -1 pour les termes impairs. Elle ne peut donc converger.
- Si $q < -1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = +\infty$. Donc la suite $(|q|^n)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Or, la suite (q^n) prend des valeurs positives pour les termes pairs, et négatives pour les termes impairs. Elle ne peut donc pas avoir de limite.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite composée de puissances, on met les plus grandes puissances en facteur, et on utilise le résultat précédent.

Exercice 7.10

Soit u la suite définie pour tout entier n par

$$u_n = \frac{3^n + 4^n}{3 \times 4^n + 2^n}$$

Déterminer la limite de la suite u .

Solution

Pour tout entier n , on a


$$u_n = \frac{4^n \left(1 + \frac{3^n}{4^n}\right)}{4^n \left(3 + \frac{2^n}{4^n}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{2}{4} < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$

Par somme et quotient, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

 Exercices 1, 2 et 3.

7. Croissances comparées

Théorème 7.13. Croissances comparées

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{\ln^b(n)} = +\infty$$

et de manière générale, pour $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

Remarque

On note souvent de la manière suivante (avec $q > 1$ et $a > 0$) :

$$\ln^b(n) \ll n^a \ll q^n \ll n!$$

On donnera une notation rigoureuse à la fin de ce chapitre.

Démonstration

Voir chapitre Limite de fonctions.

Exemple 7.11

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

Exercice 7.12

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \ln(n)}{n + 1}$.


Solution

On constate que, pour tout $n > 0$:

$$\frac{n + \ln(n)}{n + 1} = \frac{n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{\ln(n)}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Par somme, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(n)}{n} = 1$. On a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \ln(n)}{n + 1} = 1$$

 Exercices 4 et 5.

IV. Suites adjacentes**Définition 7.4.**

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Exemple 7.13

Les suites u et v définies pour tout $n \geq 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Solution

En effet, la suite u est croissante et v est décroissante : pour tout n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-n + (n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Enfin, pour tout n ,

$$v_n - u_n = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème 7.14.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration

On montre que la définition des suites adjacentes entraîne que, pour tout n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$: en effet, la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante par construction, et de limite 0 : cela implique que tous les termes de la suite $(v_n - u_n)$ sont positifs.

La suite (u_n) est donc croissante majorée : elle converge, vers une limite que l'on note ℓ . De même, la suite (v_n) est décroissante minorée : elle converge, vers ℓ' . Or, par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Par opération sur les limites, cela implique $\ell - \ell' = 0$, soit $\ell = \ell'$.

Méthode

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on montre qu'une est croissante, l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

Exercice 7.14

Soient u et v deux suites définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Solution

Pour tout entier n , on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante. De même

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n.n!} \right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

Après mise au même dénominateur

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} < 0$$


donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n.n!} = 0 \text{ par quotient}$$

Bilan : les suites u et v sont bien adjacentes.

Remarque

Etant adjacentes, elles convergent, et ont la même limite. On peut montrer que leur limite commune est e .

 Exercices 9 et 15.

V. Comparaison de suites

L'idée de cette section est d'introduire des méthodes de comparaison de suites, permettant de déduire certains résultats sur les limites.

1. Négligeabilité

Définition 7.5.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, ou plus simplement $u_n = o(v_n)$, et on lit “ u est un petit o de v au voisinage de $+\infty$ ”.

Exemple 7.15

On a $n = o(n^2)$.

Solution

En effet, $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Propriété 7.15. Opérations sur la négligeabilité

Soient u, v et w trois suites non nulles à partir d'un certain rang.

- ① (Multiplication par un réel) Si $u_n = o(v_n)$ alors pour tout réel k , $ku_n = o(v_n)$.
- ② (Quotient) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$ et $\frac{u_n}{w_n} = o\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$.
- ③ (Transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- ④ (Somme) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.

Remarque

Attention : pour la somme, il faut que les suites soient négligeables par rapport à une même suite.

Exercice 7.16

Montrer que $e^{-n} = o(n^4)$ et que $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Solution

Remarquons que

$$\frac{e^{-n}}{n^4} = \frac{1}{e^n n^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par quotient.}$$

Enfin, $\ln(n) = o(n^4)$ et $n^2 = o(n^4)$ (par croissances comparées). Par somme, $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Remarque

Une suite vérifiant $u = o(1)$ est une suite qui tend vers 0.

Proposition 7.16. Croissances comparées

On peut écrire les croissances comparées ainsi : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$n^\alpha = o(e^n), \quad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{si } \alpha < \beta, \quad n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{et } e^n = o(n!)$$

De manière générale, si $1 < q < p$:

$$n^\alpha = o(q^n), \quad q^n = o(p^n) \quad \text{et} \quad q^n = o(n!)$$

2. Équivalence

Définition 7.6.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exercice 7.17

Montrer que $n^2 + n \sim n^2$.

Solution

En effet, pour $n \geq 1$:

$$\frac{n^2 + n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Remarque

On dispose d'une autre définition : u et v sont équivalentes si et seulement si

$$u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)$$

En effet,

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Conséquence 7.17.

Soient deux suites u et v équivalentes. Alors

- Si u converge vers ℓ , v converge également vers ℓ .
- Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, v est également de signe constant et de même signe à partir d'un certain rang.

Propriété 7.18. Opérations sur les équivalents

Soient u, v, w et x quatre suites non nulles à partir d'un certain rang.

- ① (Compatibilité avec la multiplication) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.
- ② (Compatibilité avec le quotient) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n}$.
- ③ (Compatibilité avec les puissances) Si les suites u et v sont strictement positives, et telles

que $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.

Démonstration

Les preuves se font en utilisant la définition. Par exemple, remarquons que

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Remarque

⚠ Attention : en général, on ne peut ni ajouter, ni soustraire des équivalents.

Exercice 7.18

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4}$$

Solution

Puisque $\ln(n) = o(n^4)$, on a $\ln(n) + n^4 \sim n^4$. De même, $1 - n^4 \sim -n^4$. Par quotient

$$\frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4} \sim \frac{n^4}{-n^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4} = -1$$


Proposition 7.19. Formule de Stirling

On dispose d'un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque

On retrouve, grâce à ce résultat, que $q^n = o(n!)$.

 Exercice 6.

Exercices

7

Exercices

Premières limites

●○○ **Exercice 1 Limites de somme** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

$$1. u_n = 2^n - \frac{1}{n^2}$$

$$2. u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$$3. u_n = 3n^5 - 2n^{-3}$$

●○○ **Exercice 2 Limites d'un produit** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

$$1. u_n = 2^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$2. u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{5}{n^4}\right)$$

$$3. u_n = n^3 \times \left(2 + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

●○○ **Exercice 3 Limites d'un quotient** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

$$1. u_n = \frac{(5/6)^n - 7}{5n^2}$$

$$2. u_n = \frac{-2n - 7}{(1/2)^n}$$

$$3. u_n = \frac{(5/6)^n - 7}{5n^{-2} + 1}$$

●○○ **Exercice 4 Limites d'un polynôme ou de fraction rationnelle** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) de chacune des suites (u_n) définies par

$$1. u_n = -2n^5 + n^4 - 7n^3 + 8n + 2$$

$$2. u_n = \frac{-2n - 7}{n^2 + 2n - 6}$$

$$3. u_n = 3n + 1 + \frac{-3}{n^2 + 1}$$

Limites générales

●○○ **Exercice 5 Limites** (15 min.)

Déterminer les limites des suites suivantes (sans utiliser les équivalents ou négligeabilités).

$$1. u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$$

$$2. u_n = \frac{2n + 1}{1 - 4n}$$

$$3. u_n = \frac{2n^2 + 1}{n - 1}$$

$$4. u_n = \frac{(-1)^n + 4}{n^2}$$

$$5. u_n = \frac{2(-1)^{n^3+1}}{n + 2}$$

$$6. u_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$$

$$7. u_n = \frac{-3n + 1}{2 - 3n}$$

$$8. u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{2n + 1}$$

$$9. u_n = \frac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n}$$

$$10. u_n = \frac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$$

●○○ **Exercice 6 Limites - le retour** (15 min.)

Traiter les limites de l'exercice 5 en utilisant les négligeabilités et équivalences (sauf limites 4 et 5).

Suites monotones

●○○ Exercice 7 Monotonie et limite I (20 min.)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad u_2 = 1$$

1. Montrer que $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq 1$ puis donner la monotonie de la suite (u_n) .
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{n}{2(n-1)}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

●○○ Exercice 8 Monotonie et limite II (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad u_n \geq 0$. En déduire la monotonie de (u_n) . Que peut-on en conclure?
2. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$.
3. En déduire que $\forall n \geq 0, \quad u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.
En déduire la limite de la suite (u_n) .

Suites adjacentes

●○○ Exercice 9 Suites adjacentes I (15 min.)

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies, pour $n \geq 1$, par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on conclure?

Suite, monotonie et point fixe

●○○ Exercice 10 Suites et point fixe I (30 min.)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

1. Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Montrer que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0, \quad u_n \in [0; 1]$.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $] -1; +\infty[$.
4. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
6. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

●○○ Exercice 11 Suites et point fixe II (30 min.)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3$; ainsi que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 2,5$ et, pour tout $n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. Montrer que l'intervalle $[2; 3]$ est stable par f .
3. Montrer que pour tout $n \geq 0, \quad u_n \in [2; 3]$.
4. Étudier le signe de $f(x) - x$.
5. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 0}$.
6. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Suites et limites

●○○ Exercice 12 Exercice bilan I (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq u_n \leq 3$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

- (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n .
 - (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - (c) Exprimer v_n en fonction de n .
3. Exprimer u_n en fonction de n . En déduire la limite de (u_n) .

●○○ Exercice 13 Exercice bilan II (15 min.)

On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
 - (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
 - (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que pour tout entier n , $w_n > 0$
 - (d) Déterminer la limite de la suite (w_n) .
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et qu'elles ont la même limite que l'on notera ℓ dans la suite du problème.
4. Soit t la suite définie pour tout entier naturel par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
 - (a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
 - (b) Déterminer alors la valeur de ℓ .

●○○ Exercice 14 Exercice bilan III (15 min.)

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 20$, $v_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$$

1. Pour tout entier n , on pose $w_n = u_n - v_n$.
 - (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique, à termes positifs.
 - (b) Déterminer la limite de (w_n) , et exprimer w_n en fonction de n .
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout entier n , on pose $t_n = 5u_n + 24v_n$.
 - (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
 - (b) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n , et déterminer la limite de (u_n) et (v_n) .

●○○ Exercice 15 Suites adjacentes II (20 min.)

On définit la suite $(h_n)_{n \geq 1}$, pour $n \geq 1$, par : $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (h_n) est croissante. On note ℓ la limite, finie ou infinie, de (h_n) . Justifier son existence.
2. Montrer que $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = +\infty$.