6

Chapitre

Probabilités sur un ensemble fini

Résumé

Nous allons dans ce chapitre revoir les notions de base sur les probabilités, vues depuis la classe de troisième, en les rendant plus rigoureuses. Nous revenons également les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales.

Plan du cours

> *« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? »*
>
> Henri Poincaré (1854 – 1912)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les généralités sur les probabilités :

- Déterminer des probabilités en situation d'équiprobabilité . . . . □
- Utiliser la formule du crible de Poincaré . . . . □
- Justifier qu'une famille est un système complet d'événements . . . . □
- Utiliser les formules des probabilités composées et des probabilités totales . . . . □
- Utiliser les formules de Bayes . . . . □
- Démontrer que deux événements sont indépendants . . . . □
- Utiliser la mutuelle indépendance d'une famille d'événements . . . . □

② Concernant les variables aléatoires :

- Déterminer le support et la loi de probabilités d'une variable aléatoire . . . . □
- Calculer espérance et variance d'une variable aléatoire . . . . □

I. Espace probabilisé fini

1. Espace probabilisable

Définition 6.1.

Soit Ω un ensemble fini, et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**. Les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ sont appelés **événements**. Les événements $\{\omega\}$ (pour $\omega \in \Omega$) sont appelés **événements élémentaires**.

Remarque

$\mathscr{P}(\Omega)$ vérifie les propriétés suivantes, que nous reverrons plus tard :

- $\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$
- $\forall\, A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \overline{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$
- $\forall, A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega), A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Remarque

L'événement $\varnothing$ est appelé **événement impossible**, et l'événement Ω l'**événement certain**.

Définition 6.2.

Deux événements A et B de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

2. Loi de probabilité

Définition 6.3.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour tous événements incompatibles A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque

Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé fini**, et pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A)$ s'appelle la **probabilité** de l'événement A.

Propriété 6.1.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B deux événements. Alors, on a :

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Ainsi, $\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration

- Par définition, A et $\overline{A}$ sont incompatibles, et $A \cup \overline{A} = \Omega$. Donc par définition

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$

- $A\cap B$ et $\bar{A}\cap B$ sont incompatibles, et $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)=B$. Par définition,
$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}((A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(\bar{A}\cap B)$$
- Si $A\subset B$, on peut écrire $B=A\cup(B\cap\bar{A})$. Les événements A et $B\cap\bar{A}$ étant incompatibles, par définition
$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cup(B\cap\bar{A}))=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\cap\bar{A})\geqslant\mathbb{P}(A)$$
- On constate que $A\cup B=A\cup(B\cap\bar{A})$. Puisque A et $B\cap\bar{A}$ sont incompatibles, par définition
$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A\cup(B\cap\bar{A}))=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\cap\bar{A})\underbrace{=}_{\text{d'après pt 2}}\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

Propriété 6.2. Crible de Poincaré

Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si $A_1,\cdots,A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles ($k\geqslant 1$), on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$$
Et si A, B et C sont trois événements quelconques, on a
$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

Démonstration

Ce résultat se démontre par récurrence sur n.

Remarque

Il existe un crible de Poincaré plus général : pour tous événements $(A_1,\cdots,A_n)$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)-\sum_{i<j}\mathbb{P}(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}\mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)\cdots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$$

3. Loi équiprobable

Définition 6.4.

Dans le cas où toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité $\mathbb{P}$ est **uniforme**.
Si $\Omega=\{x_1;\cdots;x_n\}$, alors la probabilité de chaque issue est
$$p=\frac{1}{\text{card}(\Omega)}=\frac{1}{n}$$

Théorème 6.3.

Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini en situation d'équiprobabilité. Alors la probabilité d'un événement A est donnée par
$$\mathbb{P}(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exercice 6.1

On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On note A l'événement “obtenir un multiple de 3” et B l'événement "obtenir un multiple de 4". Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Solution
Puisque le dé est bien équilibré, la loi de probabilité est uniforme. Ainsi, $\Omega = [\![1;12]\!]$ et $\text{card}(\Omega) = 12$.
Puisque $A = \{3;6;9;12\}$ et $B = \{4;8;12\}$, on a

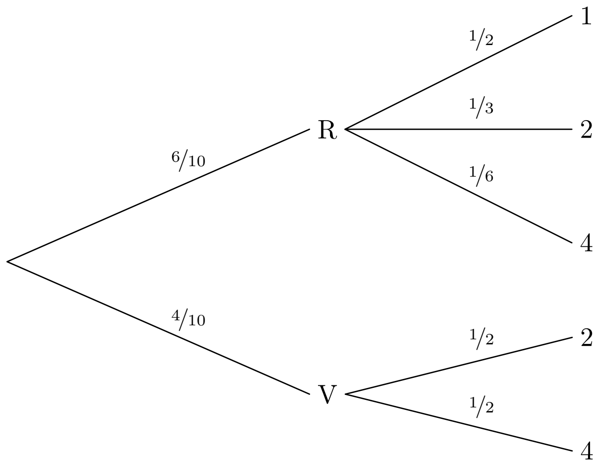
$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

☞ *Exercice 1.*

II. Probabilités conditionnelles

1. Exemple

Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés $1,1,1,2,2,4$ et quatre jetons verts, numérotés $2,2,4,4$. On tire au hasard un jeton du sac.
On note R l'événement "obtenir un jeton rouge", V l'événement "obtenir un jeton vert", 1 l'événement "obtenir un jeton 1", ...
Cette expérience peut être représentée par un **arbre pondéré** :



De cet arbre, on peut lire ainsi que $\mathbb{P}(R) = \frac{6}{10}$, $\mathbb{P}(V) = \frac{4}{10}$.
La branche $-R-2$ indique que l'on a obtenu un jeton rouge **et** numéroté 2.

Propriété 6.4.

- Loi des noeuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ainsi, la probabilité de $R \cap 2$ est égale à

$$\mathbb{P}(R\cap 2) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(2)$$

2. Probabilités conditionnelles

Définition 6.5.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors, l'application $\mathbb{P}_A$ définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall\, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ appelée **probabilité sachant** A.

Remarque

$\mathbb{P}_A(B)$ est également notée $\mathbb{P}(B|A)$. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, toutes les propriétés des probabilités s'appliquent à $\mathbb{P}_A$.

Exemple 6.2

Dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}_V(2) = \frac{1}{2}$.

Remarque

Dans la suite du cours, et plus généralement tout au long de l'année, on essaiera de se passer des arbres. D'une part, parce qu'il est plus important de comprendre les formules sous-jacentes ; et d'autre part parce que, souvent, les expériences aléatoires que l'on fera ne se modéliseront pas facilement avec un arbre.

3. Formule des probabilités composées

Théorème 6.5. Probabilités composées

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

On peut d'ailleurs généraliser cette formule : pour tous événements $A_1, \cdots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 6.3

Toujours dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}(R \cap 4) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.

Remarque

Cette formule est très importante. C'est celle qu'on utilisera souvent pour déterminer la probabilité d'une intersection.

4. Formule de Bayes

Théorème 6.6. Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_B(A) \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}_B(A)}$$

Démonstration

En effet,

$$\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B)$$

Exemple 6.4

Dans l'exemple du début, la probabilité, sachant qu'on a eu un jeton 2, que celui-ci soit vert, vaut

$$\mathbb{P}_2(V) = \frac{\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(2)}\mathbb{P}_V(2) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{4}{10}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

III. Probabilités totales

1. Système complet d'événements

Définition 6.6.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $(A_1, \cdots, A_n)$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** si

- les événements $A_1, \cdots, A_n$ sont deux à deux incompatibles ($\forall\, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$).
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Exemple 6.5

On lance un dé à 6 faces, et on note A :"obtenir un nombre pair", et B :"obtenir un nombre impair". Alors $\Omega = [\![1,6]\!]$, $A\cup B = \Omega$ et $A\cap B = \varnothing$. Donc (A, B) forme un système complet d'événements.

Remarque

Si A est un événement de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, alors $(A, \bar{A})$ est un système complet de deux événements.

2. Formules des probabilités totales

Théorème 6.7.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B\cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Démonstration

On peut écrire

$$B = B\cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B\cap A_k$$

Or les événements $B\cap A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles, puisque les A_k le

sont. Donc
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Propriété 6.8.

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

Exemple 6.6

Dans l'exemple de début, (R, V) est un système complet d'événements. La probabilité de l'événement 2 vaut donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2) &= \mathbb{P}(R \cap 2) + \mathbb{P}(V \cap 2)\\ &= \mathbb{P}_R(2) \times \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}_V(2) \times \mathbb{P}(V)\\ &= \frac{1}{3}.\frac{6}{10} + \frac{1}{2}.\frac{4}{10} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

☞ *Exercices 3 et 6.*

IV. Indépendance de deux évènements

1. Indépendance de deux événements

Définition 6.7.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple 6.7

Dans l'exemple du II., les événements V et R sont indépendants.

Propriété 6.9.

Si A et B sont des événements de probabilité non nulle, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A et B sont indépendants.
- $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

Théorème 6.10.

Soient deux évènements indépendants A et B. Alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Démonstration

Puisque A et B sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Or, d'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$
On a donc $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B)$.

2. Indépendance d'une famille d'événements

Définition 6.8.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements.

- On dit que $A_1, \cdots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], i \neq j,\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$
- On dit que $A_1, \cdots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si
$$\forall I \subset [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$
En particulier, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n)$.

Théorème 6.11.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Soit $B_1, \cdots, B_n$ des événements tels que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Alors les événements $B_1, \cdots, B_n$ sont encore mutuellement indépendants.

☞ *Exercices 7 et 8.*

V. Variables aléatoires - Rappels

Ceci n'est qu'un rappel de première et terminale. Nous définirons en détail la notion de variable aléatoire plus tard dans l'année.

1. Définitions

Définition 6.9.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute application X définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est appelé le **support** de la variable aléatoire X.
Si on note $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$, on appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire** X, l'application qui à tout élément x_i fait correspondre la probabilité de l'événement "X prend la valeur x_i", que l'on note $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Remarque

- L'événement $(X = x_i)$ est composé des issues pour lesquelles la variable aléatoire X prend la valeur x_i.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner l'ensemble des probabilités $\mathbb{P}(X = x_1), \cdots, \mathbb{P}(X = x_n)$ (sous la forme d'un tableau par exemple).

Exercice 6.8

On lance un dé équilibré. On gagne 1 euro si on tombe sur 1 ou 6, et on perd 1 euro sinon. Déterminer le support et la loi de probabilité de la variable aléatoire représentant le gain.

Solution

En notant X le gain, alors les valeurs possibles de X sont 1 et -1. On a donc
$$(X = 1) = \{1; 6\} \text{ et } (X = -1) = \{2; 3; 4; 5\}$$

et donc $\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X=-1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

2. Paramètres d'une variable aléatoire

Définition 6.10.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire. On note $X(\Omega)=\{x_1;\cdots;x_n\}$.

- On appelle **espérance mathématique** de X le nombre réel

$$\mathbb{E}(X)=x_1\times\mathbb{P}(X=x_1)+\cdots+x_n\times\mathbb{P}(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\times\mathbb{P}(X=x_i)$$

- On appelle **variance** de X le nombre réel positif

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=(x_1-\mathbb{E}(X))^2\times\mathbb{P}(X=x_1)+\cdots+(x_n-\mathbb{E}(X))^2\times\mathbb{P}(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mathbb{E}(X))^2\times\mathbb{P}(X=x_i)$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre réel positif $\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$.

Proposition 6.12.

Soient a et b deux réels, et X une variable aléatoire. Alors

$$\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(aX+b)=a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$$

Exercice 6.9

Déterminer espérance et variance de la variable aléatoire définie dans l'exercice 8.

Solution

Par définition, on a

$$\mathbb{E}(X)=1\times\mathbb{P}(X=1)+(-1)\times\mathbb{P}(X=-1)=1\times\frac{1}{3}-1\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$

De même, on a :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=(1-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=1)+(-1-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=-1)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(-1+\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{27}+\frac{8}{27}=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$$

☞ *Exercices 2, 4 et 5.*

Exercices 6

Exercices

Probabilités générales

●○○ **Exercice 1 Probabilités générales** (10 min.)

Jean et Jeanne sont deux fous de mathématiques, qui possèdent un dé à 10 faces, numérotées de 0 à 9, légèrement truqué. Le dé suit ainsi la loi de probabilité suivante :

issue	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : "le dé tombe sur un chiffre impair".
   - B : "le dé tombe sur le chiffre 1, 4, 7, ou 9"
   - C : "le dé tombe sur un chiffre inférieur ou égal à 4".
2. Déterminer la probabilité des évènements $A \cup B$, $B \cap C$ et $A \cap C$.

●○○ **Exercice 2 Variables aléatoires générales** (10 min.)

Jean propose à Jeanne de lancer le dé, et de jouer au jeu suivant : Jeanne gagne 3 euros si le dé tombe sur le chiffre 0, elle gagne 7 euros si le dé tombe sur le chiffre 9, elle gagne 1 euro si le dé tombe sur le chiffre 1 ou 8, elle perd 2 euros si le dé tombe sur le chiffre 2 ou 6, elle perd 1 euro si le dé tombe sur le chiffre 4 ou 5, et elle perd 5 euros si le dé tombe sur le chiffre 3 ou 7. On note X la variable aléatoire donnant le gain de Jeanne.

1. Déterminer le support et la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Le jeu est-il équitable ?

Probabilités condtionnelles et exercices bilans

●○○ **Exercice 3 Probabilités et suites I** (15 min.)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
4. Déterminer l'expression de p_n puis déterminer la limite de la suite (p_n).

●○○ Exercice 4 Variable aléatoire - calculatrice autorisée (pour une fois) (15 min.)

Le coût de production d'un objet est de 950 euros. Cet objet peut présenter le défaut A, le défaut B, ou les deux défauts en même temps.

La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabriquant avec les coûts suivants : 100 euros pour le défaut A, et 150 euros pour le défaut B.

On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 4% ont le seul défaut A, 2% ont le seul défaut B, et les autres ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est à dire le coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et l'écart-type de cette variable aléatoire. Que représente $\mathbb{E}(X)$ pour l'usine.
3. On admet que tous les objets produits sont vendus. L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 euros chaque objet produit ?

●●○ Exercice 5 Variable aléatoire et fonction I (15 min.)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

- Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 euros.
- Si le secteur repéré est blanc, le joueur perd 12 euros.
- Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
  - si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 euros.
  - si le secteur repéré est blanc, il perd 2 euros.
  - si le secteur repéré est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, de quatre secteurs blancs, et de n secteurs verts ($n \geqslant 1$). Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f, définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$$
4. En déduire pour quelle valeur de l'entier n l'espérance mathématique de X_n est maximale. Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

●○○ Exercice 6 Probabilités et suites II (15 min.)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;

(b) B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4. Déterminer l'expression de p_n et en déduire la limite de la suite (p_n).

Indépendance

●○○ Exercice 7 Indépendance I (5 min.)

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires, et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (et de façon équiprobable), et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note :

- B_1 l'évènement “obtenir une boule blanche au premier tirage”
- B_2 l'évènement “obtenir une boule blanche au deuxième tirage”

Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

●○○ Exercice 8 Indépendance II (10 min.)

Lorsqu'on choisit une moto aléatoirement dans une fabrique, elle peut présenter deux défauts : le pot d'échappement est mal fixé, ou le guidon n'est pas aligné.
On note A l'évènement : “le pot d'échappement est mal fixé” et B l'évènement : “le guidon n'est pas aligné”. On suppose que $\mathbb{P}(A) = 0,1$ et $\mathbb{P}(B) = 0,2$, et que les évènements A et B sont indépendants.
Déterminer la probabilité que la moto ne présente aucun défaut (on dira qu'elle est fonctionnelle).