5

Chapitre

Généralités sur les suites

Résumé

Dans ce chapitre, on reprend les notions connues sur les suites, et on ajoute des suites de références : les suites arithmético-géométriques, et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Plan du cours

Chapitre 5. **Généralités sur les suites**

I. Généralités 3
II. Monotonie, majoration, minoration 4
III. Suites arithmétiques et géométriques 7
IV. Suites arithmético-géométrique 10
V. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 11
Exercices 15

> « *Une suite de petites volontés fait un gros résultat.* »
>
> Charles Baudelaire (1821 – 1867). *Mon Coeur mis à nu*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les généralités sur les suites :

- Connaître la méthode de représentation des suites .... ☐
- Savoir démontrer des variations par étude de fonctions .... ☐
- Savoir démontrer des variations par la méthode $u_{n+1} - u_n$ .... ☐
- Savoir démontrer des variations par récurrence .... ☐
- Savoir démontrer une majoration par récurrence .... ☐

② Concernant les suites particulières :

- Savoir étudier les suites arithmétiques et géométriques .... ☐
- Savoir étudier les suites arithmético-géométriques .... ☐
- Connaître la méthode d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 .... ☐

I. Généralités

1. Définition et notations

Définition 5.1.

Une **suite numérique réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Notation

Soit u une suite.

$$\begin{array}{rcl} u:\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

La suite u peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé **terme de rang** n de la suite u.

2. Trois types de définition de suites

On peut définir une suite de trois manières différentes.

a. Définition explicite

La suite peut être définie explicitement :

- v est la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- u est la suite définie par u_n est la $n^{\text{è}}$ décimale de π, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- w est la suite définie par

$$\begin{cases} w_n = 3n+2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ w_n = \dfrac{1}{n} + 4 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b. Définition par récurrence

Elle peut également être définie par récurrence :

- u est la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$.
- $\begin{cases} u_0 = & 2 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = & \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Remarque

Pour déterminer u_n dans le cas d'une suite définie par récurrence, il est nécessaire de calculer $u_0, u_1, \dots u_{n-1}$ pour déterminer ensuite u_n. Par exemple, dans le cas de la suite u définie précédemment, pour calculer u_2 :

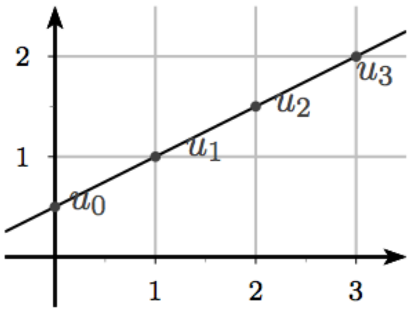
$$u_0 = -1 \text{ donc } u_1 = 2 \times u_0 - 1 = -3 \text{ et donc } u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -7$$

c. Définition par équation

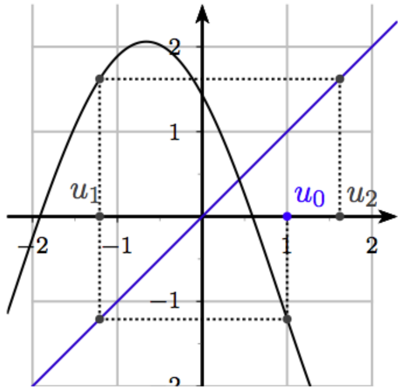
Une suite peut également être définie par une equation. Par exemple, soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 3$ par u_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = nx$.

3. Représentation graphique d'une suite

On représente une suite définie explicitement par l'ensemble des points $(n; u_n)$. On peut également représenter les suites définies par récurrence par une représentation "en toile d'araignée".



Définition $u_n = f(n)$



Définition par récurrence, $u_0 = 1$

II. Monotonie, majoration, minoration

1. Suites monotones

Définition 5.2.

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) est une suite **croissante** si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n.
On dit que (u_n) est une suite **décroissante** si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n.
Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Remarque

- On a aussi des suites strictement croissantes ou strictement décroissantes.
- Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (par exemple).

2. Méthodes de recherche des variations d'une suite

a. Pour les suites $u_n = f(n)$

Théorème 5.1.

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$n < n+1 \implies u_n = f(n) \leqslant f(n+1) = u_{n+1}$$

Exemple 5.1

- Soit u la suite définie par $u_n = n^2$ pour tout n. La fonction $x \mapsto x^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est strictement décroissante, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = f(n)$, on introduit la fonction f associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de u.

Exercice 5.2

Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 4n + 2$. Déterminer la monotonie de u.

Solution

Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$. f étant un trinôme du second degré, on connait ses variations : ici, $a = 1 > 0$, $b = -4$ donc $-\frac{b}{2a} = 2$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et est croissante sur $[2; +\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante pour $n \geqslant 2$.

b. Termes consécutifs

Théorème 5.2. Etude de la différence de deux termes consécutifs

Soit une suite u donnée. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est décroissante.

Théorème 5.3. Etude du quotient de deux termes consécutifs

Soit une suite u à termes *strictement positifs*, on peut utiliser :
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. > 1) alors la suite u est croissante (resp. strictement croissante).
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (resp. < 1) alors la suite u est décroissante (resp. strictement décroissante).

Remarque

Cette méthode est, en général, reservée aux suites définies par des puissances.

Exemple 5.3

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2+1}$ pour tout n. Alors, pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ est strictement croissante. En effet, elle est à

termes strictement positifs, et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{5^n}{2^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}.\frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{2} > 1$$

Conséquence 5.4.

- Si $a > 1$, la suite (a^n) est strictement croissante.
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est constante.
- Si $0 < a < 1$, la suite (a^n) est strictement décroissante.

Démonstration

Pour tout réel $a > 0$, on constate que la suite (a^n) est à termes strictement positifs. Enfin, en notant pour tout entier n, $u_n = a^n$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$$

Ainsi, la suite (a^n) est strictement croissante si $a > 1$, et strictement décroissante si $a < 1$. Elle est enfin constante si $a = 1$.

☞ *Exercice 1.*

c. Par récurrence

Méthode

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence P_n : "$u_{n+1} \geqslant u_n$" pour montrer que la suite est croissante, ou P_n : "$u_{n+1} \leqslant u_n$" pour montrer qu'elle est décroissante.

Exemple 5.4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que la suite u est croissante.

Solution

Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n :"$u_{n+1} \geqslant u_n$".

- **initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$. Donc P_0 est vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $$u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow u_{n+1}+1 \geqslant u_n+1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+1} \geqslant \sqrt{u_n+1} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

  Donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante.

3. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 5.3.

- Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n. m s'appelle un **minorant**.
- Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M} \geqslant u_n$ pour tout n. M s'appelle ...

un **majorant**.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels m et M tels que pour tout n :
$$m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$$

Exemple 5.5
La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée :
$$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

☞ *Exercice 2.*

Méthode
Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.

Exemple 5.6
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant 2$.

Solution
Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n : "$u_n \leqslant 2$".
- **initialisation** : $u_0 = 1 \leqslant 2$. P_0 est donc vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors
$$u_n \leqslant 2 \Rightarrow u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{4} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$
Donc $u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_n \leqslant 2$. La suite u est donc majorée par 2.

☞ *Exercices 3, 4 et 5.*

III. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition 5.4.
Une **suite arithmétique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme
$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = u_n + a \text{ où } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$
Le réel a est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 5.7
La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 5.5.

Soit u une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison a. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + na.$$

Démonstration

Soit P_n la proposition "$u_n = u_0 + na$" définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 + 0 \times a$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} u_n + a \underbrace{=}_{\text{HR}} (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

On peut également démontrer ce théorème par téléscopage.

Remarque

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a, on a également

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)a$$

Exemple 5.8

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 - 3n$.

Théorème 5.6.

Soit u une suite arithmétique, de raison a. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = (\text{nb de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration

Soit $\mathrm{S} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$. D'une part

$$\mathrm{S} = u_p + (u_p + a) + (u_p + 2a) + \cdots + (u_p + (n-p)a)$$

et d'autre part

$$\mathrm{S} = u_n + (u_n - a) + (u_n - 2a) + \cdots + (u_n - (n-p)a)$$

En sommant les deux égalités,

$$2\mathrm{S} = (u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \cdots + (u_p + u_n)$$

Avec $n - p + 1$ termes. On a donc $2\mathrm{S} = (n-p+1)(u_p + u_n)$, ce qui donne le résultat.
On aurait pu également le démontrer par récurrence sur n.

Exemple 5.9 (Classique)

En s'intéressant à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suites géométriques

Définition 5.5.

Une **suite géométrique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\, n, u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 5.10

La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 5.7.

Soit u une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration

Soit P_n la proposition “$u_n = u_0 \times q^n$” définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 q^0$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} q \times u_n \underbrace{=}_{\text{HR}} q \times (u_0 \times q^n) = u_0 \times q^{n+1}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

Remarque

Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a également

$$\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 5.11

Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 \times (-3)^n$.

Théorème 5.8.

Soit u une suite géométrique, de raison $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{u_p - q u_n}{1-q} = \frac{\text{1er terme} - \text{terme à suivre}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration

Soit p un entier fixé. Soit P_n la proposition “$u_p + \cdots + u_n = \frac{u_p - q u_n}{1-q}$” définie pour tout entier $n \geqslant p$.

- Initialisation : $\frac{u_p - q u_p}{1-q} = u_p \frac{1-q}{1-q} = u_p$: P_p est donc vraie.

- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors
$$u_p + \cdots + u_n + u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{HR}} \frac{u_p - q u_n}{1-q} + u_{n+1} = \frac{u_p - q u_n + u_{n+1} - q u_{n+1}}{1-q} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} \frac{u_p - q u_{n+1}}{1-q}$$
P_{n+1} est donc vraie.
- D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant p$.

Exemple 5.12 (Classique)
En s'intéressant à la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, on a
$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q q^n}{1-q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

☞ *Exercice 6.*

IV. Suites arithmético-géométrique

1. Définition

Définition 5.6.

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite u définie par une formule de récurrence de la forme
$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = a u_n + b, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Remarque
Si $b = 0$, la suite u est une suite géométrique de raison a. Si $a = 1$, la suite u est une suite arithmétique de raison b.

Exemple 5.13
La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ est une suite arithmético-géométrique.

☞ *Exercices 6 et 7.*

2. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Théorème 5.9.

Soit u une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout n, $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \neq 1$.
Soit ℓ l'unique réel vérifiant $\ell = a\ell + b$ (c'est-à-dire $\ell = \frac{b}{1-a}$).
Alors, la suite (v_n), définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique, de raison a.

Démonstration

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en soustrayant membre à membre :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & a u_n & + \quad b \\ \ell & = & a\ell & + \quad b \\ \hline u_{n+1}-\ell & = & a(u_n-\ell) & \end{array}$$

c'est-à-dire $v_{n+1} = a v_n$ pour tout n.

Méthode

Pour étudier une suite arithmético-géométrique, on procédera ainsi :

- On cherche le réel ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$
- On introduit la suite $v = u - \ell$ et on montre qu'elle est géométrique.
- On en déduit l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exemple 5.14

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

- On cherche le réel ℓ vérifiant $\ell = 2\ell - 3 \Leftrightarrow \ell = 3$.
- On pose v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 = 2(v_n + 3) - 6 = 2v_n$$

  La suite v est donc géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$.
- On a donc, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times 2^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$. En revenant à la suite u :

$$\forall\, n,\ u_n = -2^{n+1} + 3$$

Pour la deuxième étape, on peut également écrire que $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $l = 2l - 3$ et on soustrait : $u_{n+1} - l = 2(u_n - l)$ et donc $v_{n+1} = 2v_n$.

V. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1. Définition

Définition 5.7.

Une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** est une suite u définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ et } u_1 \text{ sont donnés} \\ \forall\, n,\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Remarque

Si $b = 0$, la suite u est une suite géométrique de raison a.

Exemple 5.15

La suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

L'idée est de chercher des suites géométriques solutions de la récurrence.

Théorème 5.10.

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$. Alors, la suite géométrique (ℓ^n) $(\ell \neq 0)$ est solution de la récurrence si, et seulement si, $\ell^2 = a\ell + b$.

Démonstration

Si on a, pour tout n, $\ell^{n+2} = a\ell^{n+1} + b\ell^n$, puisque $\ell \neq 0$, en divisant par ℓ^n on obtient $\ell^2 = a\ell = b$. La réciproque est également vraie.

Théorème 5.11.

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$. On pose (E) l'équation $X^2 = aX + b$, appelée **équation caractéristique**.

- Si l'équation (E) possède deux solutions distinctes q_1 et q_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout n,
$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$
- Si l'équation (E) possède une racine double q_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout n,
$$u_n = (\lambda n + \mu) q_0^n$$

Remarque

On utilise les valeurs de u_0 et u_1 pour déterminer les deux nombres réels λ et μ.

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux :

- On pose l'équation caractéristique (E).
- On détermine les solutions de l'équation caractéristique.
- Une fois la (ou les) solution(s) trouvée(s), on écrit u_n sous la forme $\lambda q_1^n + \mu q_2^n$ ou $(\lambda n + \mu) q_0^n$, et on utilise les deux premiers termes pour obtenir un système nous donnant λ et μ

Exemple 5.16

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

- Soit (E) l'équation $X^2 = -X + 2$. Les solutions sont 1 et -2.
- Il existe donc deux réels λ et μ vérifiant, pour tout n,
$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu(-2)^n = \lambda + \mu(-2)^n$$
- En utilisant u_0 et u_1, on a donc
$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & = & \lambda & + & \mu \\ 3 & = & \lambda & + & (-2\mu) \end{array}\right.$$
ce qui donne $\mu = -1$ et $\lambda = 1$.

- Conclusion : pour tout entier n, on a
$$u_n = 1-(-2)^n$$

☞ *Exercices 8, 9, 10, 11 et 12.*

Exercices 5

Exercices

Sens de variation, majoration, minoration

●○○ **Exercice 1 Variations** (20 min.)

- Soit u la suite définie pour tout n par $u_n = \frac{n-1}{n+2}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- Etudier le sens de variation des suites $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$,$\left(\frac{2^n}{n}\right)$ et $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

●○○ **Exercice 2 Majoration, minoration** (10 min.)

Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, ou bornées.

- La suite u définie par $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.
- La suite v définie par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

> ***Méthode***
> On peut calculer les premiers termes pour avoir une idée d'un majorant M ou minorant m. On calcule ensuite $u_n - \mathrm{M}$ ou $u_n - m$ et on étudie le signe de cette différence.

Suites et récurrence

●○○ **Exercice 3 Suite récurrente I** (15 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

●○○ **Exercice 4 Suite récurrente II** (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que
$$\forall\, n,\; u_n > n^2$$
3. Conjecturer, puis démontrer, une expression de u_n en fonction de n.

●○○ **Exercice 5 Suite récurrente III** (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \forall\, n,\; u_{n+1} & = & \sqrt{4u_n - 3} \end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

●○○ Exercice 6 Justifications (10 min.)

Les suites suivantes sont elles arithmétiques ? géométriques ?

1. La suite u définie pour tout n par $u_n = 3n+5$.
2. La suite v définie pour tout n par $v_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.
3. La suite w définie pour tout n par $w_n = 3\times 2^n$.

▶ ***Méthode***

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1}-u_n$. Pour montrer qu'elle est géométrique, on part de u_{n+1} pour essayer de montrer qu'elle s'écrit $q\,u_n$.
Pour montrer qu'une suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, on calcule les premiers termes et on les utilise pour le montrer.

●○○ Exercice 7 Calculs (10 min.)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Sachant que $r=2$, et $u_4=30$, déterminer u_0 et u_8. Déterminer $u_0+u_1+\cdots+u_8$.
- Sachant que $u_4=35$ et $u_2=15$, déterminer r et u_0. Déterminer $u_0+u_1+\cdots+u_4$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Sachant que $u_2=5$ et $u_3=7$, déterminer q et u_4.

Suites arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2

●○○ Exercice 8 Expressions en fonction de n (30 min.)

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

1. $u_0=4$ et $\forall\ n,\ u_{n+1}=2u_n-3$
2. $u_0=-2$ et $\forall\ n,\ u_{n+1}+3u_n=1$
3. $u_0=-1$ et $\forall\ n,\ u_{n+1}+u_n=2u_n-4$.
4. $u_0=1,\ u_1=2$ et $\forall\ n,\ u_{n+2}=-2u_{n+1}+15u_n$
5. $u_0=2,\ u_1=4$ et $\forall\ n,\ u_{n+2}=8u_{n+1}-16u_n$

Exercices bilans

●○○ Exercice 9 Exercice bilan I (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_0=2$ et

$$u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3}$$

1. Démontrer que si $u_{n+1}=1$ alors $u_n=1$. En déduire que pour tout n, $u_n\neq 1$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, puis exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

●○○ Exercice 10 Exercice bilan II (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1}=\frac{2}{1+u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer que si $u_{n+1} = -2$ alors $u_n = -2$. En déduire que pour tout n,
$$u_n \neq -2$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Que vaut u_{10} ?

●●○ Exercice 11 Exercice bilan III (30 min.)

On consdière les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \frac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Calculer v_0; u_1; v_1; u_2; v_2. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant v_n$.
5. Montrer que (u_n) est décroissante, et (v_n) est croissante.
6. Montrer que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant 1$, et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$.
7. Montrer que pour tout n,
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$
   En déduire que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

●●○ Exercice 12 Exercice bilan IV (30 min.)

Soit u la suite vérifiant la relation
$$\forall\ n, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n} \text{ avec } u_0 = 1, u_1 = 2$$

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 0$. On considère alors la suite w définie pour tout n par $w_n = \ln(u_n)$.
2. Montrer que la suite w suit une récurrence linéaire d'ordre 2. Expliciter alors le terme général de la suite w. En déduire celui de la suite u.