4

Chapitre

Polynômes

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un objet qui servira tant en première qu'en deuxième année, et qui a déjà été vu, en partie, au lycée.

Plan du cours

> *« Rien n'est solitaire, tout est solidaire. L'homme est solidaire avec la planète, la planète est solidaire avec le soleil, le soleil est solidaire avec l'étoile, l'étoile est solidaire avec la nébuleuse, la nébuleuse, groupe stellaire, est solidaire avec l'infini. Ôtez un terme de cette formule, le polynôme se désorganise, l'équation chancelle, la création n'a plus de sens dans le cosmos et la démocratie n'a plus de sens sur la terre. Donc, solidarité de tout avec tout, et de chacun avec chaque chose. La solidarité des hommes est le corollaire invincible de la solidarité des univers. Le lien démocratique est de même nature que le rayon solaire. »*

Victor Hugo (1802 – 1885). *Proses philosophiques, L'âme*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) . . . . ☐

② Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme . . . . ☐

③ Connaître le principe de la division euclidienne . . . . ☐

④ Connaître la notion de racine . . . . ☐

⑤ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}$ . . . . ☐

⑥ Savoir résoudre des équations se ramenant à un polynôme . . . . ☐

I. Définitions

1. Notion de polynômes

Notation

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les fonctions $\begin{array}{rccc} \mathrm{X}^i : & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^i \end{array}$ et la fonction $\begin{array}{rccc} \mathrm{X}^0 : & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$

Définitions 4.1.

On appelle **polynôme à coefficients réels** toute somme finie d'applications précédentes, c'est-à-dire toute fonction s'écrivant sous la forme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$.

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et on note $\deg(\mathrm{P}) = n$. Dans ce cas, a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.
- La **fonction polynôme associée** au polynôme P est la fonction, encore notée P, définie sur $\mathbb{R}$ par
  $\mathrm{P} : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Exemple 4.1

Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 + 1$ est un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 1. Sa fonction polynôme associée est la fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi, $\mathrm{P}(1) = 1^4 - 2 \times 1^2 + 1 = 0$.

Remarque

Attention : la notation P(X) représente une fonction (c'est une représentation **formelle**). On peut ainsi parler du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 1$ plutôt que de parler de la fonction polynôme P définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = x^2 - 1$.

Notation

On note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}] = \{a\mathrm{X} + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \{a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

2. Degré

Propriété 4.1.

Soient P et Q deux polynômes.

- Le degré d'un polynôme constant non nul est 0.
- $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{P}), \deg(\mathrm{Q}))$
- $\deg(\mathrm{PQ}) = \deg(\mathrm{P}) + \deg(\mathrm{Q})$.

Démonstration

On note n le degré de P et m le degré de Q. Ainsi, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n + \cdots + a_0$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = b_m \mathrm{X}^m + \cdots + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

- On a $(P+Q)(X)=a_nX^n+\cdots+a_0+b_mX^m+\cdots+b_0$. Par construction, le degré de $P+Q$ est égale au plus grand des deux degrés, sauf si $n=m$ et $a_n=-b_m$, et dans ce cas, le degré est strictement inférieur à n. Dans tous les cas $\deg(P+Q)\leqslant \max(\deg(P),\deg(Q))$.
- Quand on développe $P(X)Q(X)$, le terme de plus haut degré est le terme $a_nX^n b_mX^m = a_n b_m X^{n+m}$ (avec $a_n\neq 0$ et $b_m\neq 0$). Donc $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Remarque

Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, on dit qu'il est degré $-\infty$.

3. Dérivée d'un polynôme

Définition 4.2.

Soit $P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme. On appelle **polynôme dérivé**, et on note P', le polynôme définie par

$$P'(X)=na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+\cdots+2a_2X+a_1$$

Remarque

On peut dérivée à nouveau P' et on note P'' ou $P^{(2)}$ la dérivée seconde de P. Plus généralement, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Exemple 4.2

Soit $P(X)=3X^3+2X^2-1$. Alors $P'(X)=9X^2+4X$, $P^{(2)}(X)=18X+4$, $P^{(3)}(X)=18$ et $P^{(4)}(X)=0$.

Remarque

- Si $\deg(P)=n\geqslant 1$, alors $\deg(P')=n-1$.
- Si $\deg(P)=n$, alors $\forall\ k>n,\quad P^{(k)}=0$.

☞ *Exercices 1, 2 et 3.*

II. Egalité de polynômes et identification

1. Egalité de polynômes

Théorème 4.2.

Soient $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q(X)=\sum_{k=0}^{m} b_kX^k$ deux polynômes. Alors $P=Q$ si et seulement si

$$n=m \quad \text{et} \quad \forall\ k\in[\![0;n]\!],\quad a_k=b_k$$

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré, et mêmes coefficients.

Exemple 4.3

Soient $P(X)=2X^2+3X-1$ et $Q(X)=2X^2+aX-b$. Alors $P=Q$ si et seulement si $a=3$ et $b=1$.

2. Application à l'identification

Exemple 4.4
Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 3X + 2$. Déterminer trois réels a, b, c tels que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Solution
Soit $Q(X) = (X-2)(aX^2 + bX + c)$. En développant,
$$Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX - 2aX^2 - 2bX - 2c = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$$
Pour que $P = Q$, par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-2a & = & -1 \\ c-2b & = & -3 \\ -2c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & -1 \end{array}\right.$$
Ainsi, $P(X) = (X-2)(X^2 + X - 1)$.

Exercice 4.5
Trouver deux réels a et b tels que,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Solution
En mettant au même dénominateur, on cherche a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2-1}$$
Par identification des coefficients, on a donc
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$
Ains, pour tout réel x différent de 1 et -1, on a
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

☞ *Exercice 4.*

III. Racines d'un polynôme

1. Définition

Définition 4.3.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Remarque
Chercher les racines de P, c'est donc résoudre l'équation $P(X) = 0$.

Exemple 4.6
1 est une racine du polynôme $P(X) = X^2 - 1$. En effet, $P(1) = 0$.

Définition 4.4.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. On dit que le polynôme P se **factorise** par $X - a$ (ou que $X - a$ **divise** P) s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Exemple 4.7
Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ se factorise par $X - 1$. En effet, on a $P(X) = (X-1)(X^2+1)$.

Théorème 4.3.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. Alors

a est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Dans ce cas, on a alors $\deg(P) = \deg(X - a) + \deg(Q)$ c'est-à-dire $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Exemple 4.8
Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X + 1$. Montrer que 1 est racine, puis factoriser P par $(X - 1)$.

Solution
On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine. Par théorème, on peut donc factoriser P par $X - 1$: il existe Q un polynôme tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. On cherche donc a, b et c tel que

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

Après développement, on obtient

$$X^3 - 2X + 1 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$

Par identification, on obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$. Ainsi

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$$

2. Nombre de racines d'un polynôme

Théorème 4.4.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Alors P a **au plus** n racines.

Démonstration
Théorème admis.

Remarque
Ainsi, un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines, c'est-à-dire qu'il peut en avoir aucune, une, deux ou trois.

Conséquence 4.5.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si P a $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Démonstration
En effet, P est au plus de degré n. Il ne peut pas admettre plus de n racines, sauf s'il est nul.

3. Cas des polynômes de degré 2.

Théorème 4.6.
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles distinctes
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
On a alors $P(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une unique racine réelle dite double
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
On a alors $P(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P ne possède pas de racines réelles, et ne se factorise donc pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 4.9
Factoriser $P(X) = 2X^2 + 2X - 4$.

Solution
On a $\Delta = 36 > 0$ donc le polynôme P possède deux racines réelles
$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$
Donc $P(X) = 2(X-1)(X+2)$.

Remarque
Attention : on n'oubliera pas, lors de la factorisation, de mettre en facteur le coefficient de plus haut degré (dans l'exemple précédent, le 2).

4. Cas général

Méthode
Lorsqu'on doit factoriser un polynôme P (ou déterminer ses racines) :

- On cherche des racines évidentes $(-2, -1, 0, 1, 2)$ pour se ramener à un (ou des) polynôme(s) de degré 2.
- On factorise le polynôme P par $X - a$ où a désigne une racine évidente.
- Une fois ramené à un (ou des) polynômes de degré 2, on utilise la méthode classique du discriminant.

Exemple 4.10

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Déterminer les racines de P.

Solution

- Premier étape : on cherche une “racine évidente” : $-2, -1, 0, 1, 2$. Ici, on constate que $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ donc 1 est racine évidente.
- Deuxième étape : on factorise P par $X - 1$: on écrit $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. Donc Q peut s'écrire $aX^2 + bX + c$.
  On a alors
  $$P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$
  Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :
  $$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-a & = & -2 \\ c-b & = & -1 \\ -c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$
  Donc $P(X) = (X-1)(X^2 - X - 2)$.
- Troisième étape : on détermine les racines du polynôme Q. Ici, Q est du second degré, dont le discriminant vaut $\Delta = 9$. Donc Q possède deux racines :
  $$x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$
  Donc $Q(X) = (X-2)(X+1)$
- Quatrième étape : on conclut. On a donc
  $$P(X) = (X-1)(X-2)(X+1)$$
  et P possède trois racines réelles : $1, 2$ et -1.

5. Division euclidienne

Remarque

Pour factoriser, plutôt que de procéder par identification, on peut également utiliser la division euclidienne.
En reprenant l'exemple précédent :

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -2X^2 & -X & +2 & X \ -1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 \ -X \ -2 \\ \cline{1-2}
 & -1X^2 & -X & & \\
 & X^2 & -X & & \\ \cline{2-3}
 & & -2X & +2 & \\
 & & 2X & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

☞ *Exercices 5 et 7.*

6. Équations se ramenant à un polynôme

Il est possible de résoudre des équations particulières en se ramenant à une équation polynomiale.

Exemple 4.11

Résoudre l'équation $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation liée à un polynôme, on effectue un changement de variable : on posera, ici, $u = \ln(x)$ et on se ramènera à un polynôme.

Solution

L'équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. On pose alors $u = \ln(x)$. L'équation s'écrit alors

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$. Les racines sont alors

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_2 = 2$$

On revient alors à la variable de départ :

$$\begin{aligned} u_1 = 1 &\Leftrightarrow \ln(x_1) = 1 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \\ \text{et } u_2 = 2 &\Leftrightarrow \ln(x_2) = 2 \\ &\Leftrightarrow x_2 = \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

Les solutions x_1 et x_2 sont bien dans $]0, +\infty[$. On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{\mathrm{e}, \mathrm{e}^2\right\}$.

Exercice 4.12

Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$.

Solution

L'équation est valable sur $\mathbb{R}$. On pose $u = \mathrm{e}^x$. En constatant que $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$, l'équation devient alors $u^2 - 2u - 3 = 0$.

Les racines sont $u_1 = -1$ et $u_2 = 3$. On revient alors à la variable de départ. $u_1 = -1$ devient $\mathrm{e}^{x_1} = -1$ ce qui est impossible. La deuxième devient $\mathrm{e}^{x_2} = 3$ soit $x_2 = \ln(3)$.

Ainsi, l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$ admet une unique solution : $\mathscr{S} = \{\ln(3)\}$.

☞ *Exercices 6 et 8.*

Exercices

4

Exercices

Recherches

●○○ **Exercice 1** (5 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$ et $P''(1) = 4$.

●○○ **Exercice 2** (5 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$.

●●○ **Exercice 3** (10 min.)

Soit P le polynôme définie par $P(X) = (X-1)^4$. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier $k > 0$. Généraliser dans le cas où $P(X) = (X-a)^n$ $(a \in \mathbb{R}, n > 0)$.

Identification

●○○ **Exercice 4** (10 min.)

Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a

$$\frac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Factorisation, signes, équations

●○○ **Exercice 5 Factorisation** (10 min.)

Pour tout réel x, soit $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Montrer que P est factorisable par $x - 1$.
2. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $(x-1)$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
3. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

●○○ **Exercice 6 Factorisation** (10 min.)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que $X + 2$ divise P.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.
4. Résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$.

●○○ **Exercice 7 Factorisation tout seul** (20 min.)

Factoriser, déterminer l'ensemble des racines, puis le signe des deux polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 23X + 20 \qquad Q(X) = X^3 - 13X - 12$$

●●○ Exercice 8 Résolutions d'équations liées à un polynôme (15 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1. (E_1) : $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
2. (E_2) : $2x + 6\sqrt{x} + 4 = 0$
3. (E_3) : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 6 = 0$

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 9 Sur la somme et le produit des racines (15 min.)

Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = ax^2 + b\mathrm{X} + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$) et possédant deux racines réelles, qu'on note α et β.

1. Factoriser P en fonction de α et β. En développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c.
2. Réciproquement, soient p et q deux nombres réels distincts. On pose $\mathrm{S} = p + q$ et $\mathrm{P} = pq$. Montrer que p et q sont les racines du polynômes $\mathrm{X}^2 - \mathrm{SX} + \mathrm{P}$. Que se passe-t-il si $p = q$?
3. Déterminer l'âge de Boule et Bill, sachant que Bill est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28, et que le produit de leurs âges est égal à 192. (On pourra utiliser le fait que $784 = 28^2$).