Chapitre 0

Préparations

Résumé

Ce chapitre a pour objectif d'effectuer des révisions de bases des années précédentes : ensembles usuels, calculs fractionnaires et de puissances, développement et factorisation, équations et inéquations.

Plan du cours

> « *J'ai trouvé cette chose étonnante : on peut représenter par les nombres toutes sortes de vérités.* »
>
> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1717)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① connaitre les ensembles usuels . . . . ☐

② savoir calculer et simplifier des résultats :

- en simplifiant des fractions . . . . ☐
- en développant et en factorisant . . . . ☐
- en calculant avec des puissances . . . . ☐
- en simplifiant des racines carrées . . . . ☐

③ savoir résoudre des questions et inéquations . . . . ☐

I. Ensembles de nombres

Définition 0.1. Ensembles usuels

On dispose des cinq ensembles usuels suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des **entiers naturels**
$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs**
$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres s'écrivant sous la forme $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif, et q un entier naturel.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

Notation

On note $x \in \mathbb{K}$ pour indiquer que le nombre x **appartient** à l'ensemble $\mathbb{K}$.

Exemple 0.1

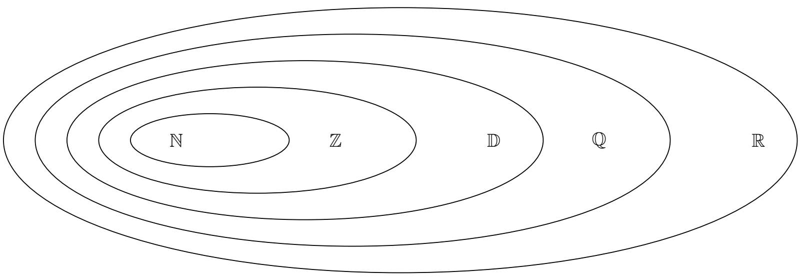
Par exemple,
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad 0,41 \in \mathbb{D}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Définition 0.2.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F, et on note $E \subset F$, si tout élément x de E appartient également à F.

Propriété 0.1.

On dispose des inclusions suivantes :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Démonstration

Par définition, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ (car les entiers relatifs ont un nombre fini de chiffres après la virgule, à savoir 0). $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par définition également. Il reste à voir que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Soit $a \in \mathbb{D}$. Alors a possède un nombre fini de chiffres après la virgule ; on note d le nombre de chiffres après la virgule. Alors,
$$b = 10^d a \in \mathbb{Z}$$

et donc
$$a = \frac{b}{10^d} \in \mathbb{Q}$$

Notation
On note
$$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0\}$$
De même, on note
$$\mathbb{R}^- =]-\infty;0] = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant 0\}$$
On note $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, et de même pour $\mathbb{R}_-^*$. Les notations $+, -$ et $*$ s'étendent à tous les ensembles vus précédemment.

Exercice 0.2
Décrire les ensembles $\mathbb{Z}_-^*, \mathbb{Z}^+, \mathbb{N}^-$ et $\mathbb{Q}^-$.

Solution
Rapidement, $\mathbb{Z}_-^*$ sont les entiers strictement négatifs, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_- = \{0\}$ et $\mathbb{Q}^-$ sont les rationnels négatifs.

☞ *Exercice 1.*

II. Calculs

1. Calcul fractionnaire

Les règles de calcul sur les fractions doivent être maitrisées dès le début d'année. Rappelons-les :

Propriété 0.2.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{0}{b} = 0 \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \frac{a}{-1} = -a$$
$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b} = \frac{1}{b}a$$
$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a};$$
pour $k \in \mathbb{R}^*$
$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$$
et si $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exercice 0.3
Calculer $A = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$, $B = \frac{\frac{2}{3}}{6}$, $C = 3 \times \frac{7}{18}$ et $D = \frac{4+17}{11+4}$.

Solution

En appliquant ce qui précède, on a rapidement :

$$\mathrm{A} = \frac{15}{14}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{C} = \frac{7}{6}$$

Enfin, attention : on ne simplifie pas comme on le veut dans une fraction (il faut d'abord factoriser). Ici

$$\mathrm{D} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

☞ *Exercice 2.*

2. Développement et factorisation

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme ; factoriser c'est l'écrire sous la forme d'un produit. Par exemple :

$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$ est un développement

$x^2+2x = x(x+2)$ est une factorisation

Les identités suivantes sont à connaître :

Propriété 0.3. Identités remarquables

On dispose des identités suivantes :

- Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

- Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Exercice 0.4

Développer, pour tout réel x, $(x+1)^2, (x+1)^3, (1-x)^2$ et $(1-x)^3$. Factoriser $4-x^2$ et $8+x^3$.

Solution

En utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\(1-x)^2 &= x^2-2x+1\\(1-x)^3 &= 1-3x+3x^2-x^3\\4-x^2 &= (2-x)(2+x)\\8+x^3 &= (2+x)(4-2x+x^2)\end{aligned}$$

☞ *Exercices 6 et 7.*

3. Puissances

Rappelons la définition de la puissance entière d'un nombre réel :

Définition 0.3.

Soit a un réel non nul, et $n \in \mathbb{N}$. On définit a^n de la manière suivante :

- $a^0 = 1$;
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

De plus, on note

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

On définit ainsi a^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 0.5

On a $2^6 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 64$, $(-12)^1 = -12$ et $(1409091)^0 = 1$.

Propriété 0.4.

Soient a et b deux réels non nuls, et n, m deux entiers relatifs.

- (puissances différentes)

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

- (puissances identiques)

$$a^n \times b^n = (a\times b)^n \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Exercice 0.6

Simplifier

$$\mathrm{A} = \frac{5^4\times3^2\times2^3}{15^3} \quad \text{et} \quad \frac{21\times10^{-3}}{3\times10^2}.$$

Solution

En utilisant la propriété précédente :

$$A = 5^1 \times 3^{-1} \times 2^3 = \frac{40}{3}$$
$$B = \frac{21}{3} \times \frac{10^{-3}}{10^2} = 7 \times 10^{-5}$$

☞ *Exercices 3 et 4.*

4. Racine carrée

Commençons par un rappel de la définition de la racine carrée d'un réel positif :

Définition 0.4. Racine carrée

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Il existe un *unique* réel positif, noté $\sqrt{a}$, vérifiant

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Ce nombre $\sqrt{a}$ est appelé **racine carrée** de a.

Remarque

On dispose des valeurs remarquables suivantes :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{9} = 3$$

⚠ **Attention**

On ne dispose pas de la racine carrée d'un nombre strictement négatif. Ainsi, la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 0.5.

Soient a et b deux réels positifs. Alors

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

et si $b \neq 0$, alors

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

⚠ **Attention**

En règle général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$! Par exemple, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et ce n'est pas égal à $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.

Exercice 0.7

Simplifier $\sqrt{8}$, $\sqrt{48}$ et $\sqrt{\frac{9}{32}}$.

Solution

Rapidement

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

☞ *Exercice 5.*

III. Equations, inéquations

1. Equations

Une équation est une égalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s). En général, les inconnues sont notées $x, y, z, \ldots$.

Exemple 0.8
L'équation $x^2+x=3-x$ est une équation faisant intervenir une variable. L'équation $x+y=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ fait intervenir deux variables, x et y.

Définition 0.5.
Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de *toutes* les valeurs de l'inconnues vérifiant l'équation ; on parle alors d'une **solution** de l'équation, et on recherche toutes les solutions de l'équation.

Méthode
La première chose à faire est de trouver les valeurs interdites (division par 0, par exemple).
Pour résoudre ensuite une équation, il n'y a pas de méthode universelle : on applique toutes propriétés possibles (multiplication, division) en raisonnant si possible par équivalence pour trouver les solutions.

Exercice 0.9
Résoudre l'équation
$$\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1$$

Solution
Déjà, il faut éviter -2 et 0. On se place sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;0\}$. Alors, en multipliant par $x(x+2)$ (qui ne s'annule alors pas) :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1 \text{ équivaut à } & x+(x+1)(x+2)=x(x+2)\\ \text{soit } & x+x^2+3x+2=x^2+2x\\ \text{ce qui donne } & 2x=-2\\ \text{et donc } & x=-1\end{aligned}$$
Cette solution est autorisée (car différente de 0 et -2). On a procédé par équivalence, et on peut conclure que l'ensemble des solutions est $\{-1\}$, ce qu'on note, en général
$$\mathscr{S}=\{-1\}$$

Remarque
On aurait pu, au lieu de mettre des mots en français, écrire $\Longleftrightarrow$. En général, on évitera l'enchaînement de symbole équivalent et implication, souvent illisible. On y reviendra dans le chapitre suivant.

☞ *Exercices 8, 9 et 10.*

2. Inéquations

Une inéquation est une inégalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s).
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions de l'inéquation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs de l'inconnue vérifiant l'inégalité.

Méthode

Pour résoudre une inéquation, on procède comme pour les équations, en utilisant les règles de calculs pour les inégalités.

Propriété 0.6. Règles sur les inégalités

Pour tous réels x et y

- Pour tout réel k, $x \leqslant y$ si et seulement si $x+k \leqslant y+k$;
- pour tout réel $k>0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $k \times x \leqslant k \times y$;
- pour tout réel $k<0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $k \times x \geqslant k \times y$;

On retiendra que multiplier par un nombre strictement positif conserve l'ordre, alors que multiplier par un nombre strictement négatif renverse l'ordre.

Remarque

La propriété précédente est valable en remplaçant $\leqslant$ par $<$, $>$ et $\geqslant$.

Exemple 0.10

Résoudre l'inéquation

$$-2(x-4) \geqslant 3x-2$$

Solution

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2(x-4) \geqslant 3x-2 &\text{ soit } -2x+8 \geqslant 3x-2 \\ &\text{ et donc } -5x \geqslant -10 \\ &\text{ puis } x \leqslant 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité est vérifiée pour tout $x \leqslant 2$:

$$\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant 2\} =]-\infty;2]$$

☞ *Exercices 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18.*

Exercices
0

Exercices

Ensembles

●○○ **Exercice 1 Non inclusion** (5 min.)
Montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Calculs

●○○ **Exercice 2 Fractions** (10 min.)
Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{4}{3} \times \left(\frac{13}{4} - \frac{12}{6}\right) \qquad B = \frac{4}{3} - 1$$
$$C = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{5}{6} - 1} \qquad D = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{8}}$$

●○○ **Exercice 3 Puissances** (10 min.)
Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-5}}{1,2 \times 10^2} \qquad B = \frac{4 \times 7^2 - 2^5 \times 3}{4^4 - 4^3}$$
$$C = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad D = 4 \times (2^2 - 2^4)^2 - 64$$

●○○ **Exercice 4 Sur $(-1)^n$** (5 min.)
Calculer $(-1)^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots, 5$. Que constate-t-on ? Déterminer la valeur de $(-1)^n$ pour tout entier naturel n.

●○○ **Exercice 5 Racines** (15 min.)

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.
$$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24} \qquad B = \sqrt{160} \times \sqrt{40} \times \sqrt{90}$$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.
$$C = \left(3\sqrt{10} - 5\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right)^2$$
3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.

$$E = \left(3-2\sqrt{5}\right)\left(3+2\sqrt{5}\right) \qquad F = \frac{24\sqrt{45}}{9\sqrt{80}}$$

Développement, factorisation

●○○ Exercice 6 Factorisation (10 min.)

Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

$A = 64x^2 - 100$

$B = -(9x-2)\times(4x+9)+(3x-8)\times(9x-2)$

$C = 16x^2 - 24x + 9$

$D = (x+5)^2 - 81$

$E = (-8x+2)^2 + (-8x+2)\times(8x+4)$

$F = (9x+7)\times(3x+3)+9x+7$

●○○ Exercice 7 Développement (10 min.)

Développer chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (4x+4)\times(4x-4)$

$B = (5x+10)^2$

$C = (10x-2)\times(10x+2)$

$D = \left(\frac{1}{8}x - \frac{10}{3}\right)^2$

$E = (-5x+9)\times(8x-2)-7x-8$

$F = (9x+2)\times(-3x-5)+4$

$G = (-8x+4)\times(9x-8)+2x^2$

Equations

●○○ Exercice 8 Équations (10 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1) $(2x-1)(x+1) = x+1$.
2) $\dfrac{x^2-2}{x+1} = x+4$.

●○○ Exercice 9 Second degré (15 min.)

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto -0.5x^2 - 7x - 22.5$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -0.5(x+9)(x+5)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -0.5(x+7)^2 + 2$.
2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = -22.5$
   (c) $f(x) = 2$

●●○ Exercice 10 Second degré - plus difficile (15 min.)

On note (E) l'équation $2x^2 + 11x - 4 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, qu'on notera x_1 et x_2 et qu'on ne calculera pas.
2. Donner les valeurs de $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.
3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.
4. Calculer $x_1^2 + x_2^2$.
5. Calculer $x_1^3 + x_2^3$.
6. Calculer $\dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1}$.

Inéquations

●○○ **Exercice 11 Inéquation** (5 min.)
Résoudre l'inéquation :

$$\frac{-6x+5}{6}-\frac{3x-10}{2}\geqslant\frac{9x+8}{3}$$

●○○ **Exercice 12 Inéquation** (5 min.)
Résoudre l'inéquation :

$$\frac{4x-5}{9}-\frac{6x+9}{4}<\frac{9x+5}{6}$$

●○○ **Exercice 13 Inéquation** (10 min.)
Résoudre l'inéquation :

$$(2x-1)(1-3x)<0$$

●○○ **Exercice 14 Inéquation** (10 min.)
Résoudre l'inéquation :

$$3x+5\geqslant(x+6)\times(3x+5)$$

●○○ **Exercice 15 Inéquation** (10 min.)
Résoudre l'inéquation :

$$\frac{(x+1)(x-2)}{2x+1}>0$$

●○○ **Exercice 16 Inéquations** (10 min.)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)(3x-5)(7-x)<0$.

●○○ **Exercice 17 Inéquation** (10 min.)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x(x+1)\geqslant(1-3x)(x+1)$.

●○○ **Exercice 18 Inéquations** (10 min.)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3-x\leqslant 2x^2-2$.