Cours de mathématiques
CPGE ATS

Prépa

2017–2018

Antoine CROUZET

Lycée le Dantec
Lannion

Introduction

Vous retrouverez, dans l'ensemble de ce papier, l'intégralité de mon cours de Classes Préparatoires aux Grandes Écoles, voie ATS, tel que je l'enseigne à mes élèves.

Il ne s'agit que d'une base, souvent complétée lors des cours (au *feeling*) et ne peut donc être considéré comme complet à 100%. C'est cependant une bonne base de révision pour les élèves qui vont passer les concours après une CPGE ATS.

Dans tous les cas, l'ensemble n'est pas exempt - loin s'en faut - d'erreurs (de la coquille à l'erreur grossière due à un manque de (re)lecture). Il sera mis à jour régulièrement pour corriger ces erreurs, mais aussi pour l'enrichir.

Dernière mise à jour : 7 mai 2019

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 3.0 non transposé".

CHAPITRE 1

ENSEMBLE, APPLICATIONS ET RAISONNEMENT

Résumé

Ce chapitre introductif est très important. Il pose les bases nécessaires à l'ensemble de l'année d'ATS :

- *les principes de raisonnement (récurrence, contraposée, absurde) ;*
- *les notions liées aux ensembles ;*
- *les notations Σ et $\prod$, avec certains exemples classiques (factorielle, nombre combinatoire) ;*
- *les notions de bases sur les applications, qui feront l'objet de chapitres supplémentaires.*

Même si ce chapitre est un peu abrupt, il faut régulièrement y revenir pour maitriser l'ensemble des éléments présents.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① mener un raisonnement par récurrence ..... □

② maitriser les raisonnements élémentaires :

- le raisonnement par contraposée ..... □
- le raisonnement par l'absurde ..... □
- la justification d'équivalence et d'implication ..... □

③ maitriser les symboles Σ et $\prod$:

- le changement de variable dans une somme ..... □
- la simplification d'une somme télescopique ..... □

④ maitriser la factorielle et les nombres combinatoires :

- la définition de $n!$ et de $\binom{n}{p}$ ..... □
- la formule du binôme de Newton ..... □
- la formule du triangle de Pascal ..... □
- la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ ..... □

⑤ connaître les notions importantes liées aux applications :

- les définitions d'injection, surjection, et bijection, ainsi que les méthodes ..... □
- la définition d'image directe, d'image réciproque et de restriction ..... □

I. Raisonnement par récurrence

1) Principe de récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement important des mathématiques. Pour le comprendre, nous allons partir d'un exemple :

Exemple 1. — On considère la proposition $P(n)$ dépendant d'un entier n : " $2^n \geqslant n+1$ "

Vérifions que cette propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$:
Pour $n = 0$: $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$
Pour $n = 1$: $2^1 = 2 \geqslant 1+1 = 2$
Pour $n = 2$: $2^2 = 4 \geqslant 2+1 = 3$
Pour $n = 3$: $2^3 = 8 \geqslant 3+1 = 4$
Pour $n = 4$: $2^4 = 16 \geqslant 4+1 = 5$

On peut continuer les vérifications pour tous les entiers que l'on souhaite, mais on ne pourra jamais affirmer que la proposition est vraie **pour tout *n***. Pour démontrer cette proposition, on va faire appel au **raisonnement par récurrence**.

Axiome 1. — *Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier, et n_0 un entier fixé.*

- *Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**),*
- *et si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (**hérédité**),*

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Démonstration. Ceci est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui ne se démontre pas, mais qui semble "logique".
L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes). □

Remarque 1. — Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$, on dit que la propriété P est **héréditaire**.

Solution. Démontrons maintenant la propriété $P(n)$: " $2^n \geqslant n+1$ " pour $n \geqslant 0$ par récurrence :

- **initialisation** : pour $n = 0$, on a bien $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$.
- **hérédité** : supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour **un certain** n fixé. On a donc $2^n \geqslant n+1$: c'est **l'hypothèse de récurrence**
  On veut alors démontrer $P(n+1)$, *c'est à dire* $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$

$$\begin{array}{lrcll} 2^n \geqslant n+1 & \Leftrightarrow & 2\times 2^n & \geqslant & 2(n+1) \quad \text{car 2 est un nombre positif} \\ & \Leftrightarrow & 2^{n+1} & \geqslant & 2n+2 \\ & \Leftrightarrow & 2^{n+1}-(n+1+1) & \geqslant & 2n+2-(n+1+1) \\ & \Leftrightarrow & 2^{n+1}-(n+2) & \geqslant & n \geqslant 0 \quad \text{car } n \text{ est un entier positif ou nul} \end{array}$$

On a donc bien $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$: la proposition $P(n+1)$ est donc vérifiée.

On a bien démontrer l'initialisation et l'hérédité : on a donc démontré par récurrence que la propriété

P(n) est vraie **pour tout entier n** :

$$\forall\, n,\ 2^n \geqslant n+1$$

Exercice 1. — Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution.

1. Soit P_n la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par P_n : "$1+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$".
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part 1, et d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
     Or, $1+2+\cdots+(n+1) = (1+2+\cdots n)+(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
     Ainsi, la proposition P_{n+1} est vraie, et la propriété P est donc héréditaire.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit Q_n la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par Q_n : "$1^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1^2=1$, et d'autre part $\frac{1(1+1)(2\times1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Donc Q_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition Q_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
     Comme précédemment, on a alors
     $$1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$
     soit
     $$1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\frac{2^n2+n+6n+6}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2^n 2 + 7n + 6$. Donc,

$$1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ainsi, la proposition Q_{n+1} est vraie, et la propriété Q est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVIIe siècle), ce sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connait.

Le raisonnement par récurrence est également utile pour démontrer des résultats de divisibilité.

Exemple 2. — Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

Solution. Soit $P(n)$ la proposition " $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 "

- **initialisation** : pour $n = 0$, $10^0 - (-1)^0 = 0 = 0 \times 11$.
- **hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour **un certain** n. On peut donc écrire $10^n - (-1)^n = 11 \times p$ où p est un nombre entier. On a alors

$$\begin{aligned}
10^n &= 11 \times p + (-1)^n \\
10 \times 10^n &= 10 \times 11 \times p + 10 \times (-1)^n \\
10^{n+1} &= 110 + 10.(-1)^n \\
10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 110p + 10.(-1)^n - (-1)^{n+1} \\
10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 11 \times 10p + (-1)^n [10 - (-1)] \\
10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 11 \times 10p + (-1)^n \times 11 \\
10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 11 \times \left[10p + (-1)^n\right]
\end{aligned}$$

Donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$ est bien un multiple de 11 : $P(n+1)$ est vraie.

On a donc bien démontré $P(n)$ pour tout n.

2) Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

Axiome 2 (Principe de récurrence double)**.** — *Soit* $P(n)$ *une proposition dépendant d'un entier* n*.*

- *Si* $P(0)$ *et* $P(1)$ *sont vraies.*
- *et si, pour tout entier naturel* n*,* $(P(n)$ *et* $P(n+1)) \implies P(n+2)$

alors $P(n)$ *est vraie pour tout entier* n*.*

Axiome 3 (Principe de récurrence forte)**.** — *Soit* $\mathrm{P}(n)$ *une proposition dépendant d'un entier* n*.*

- *Si* $\mathrm{P}(0)$ *est vraie.*
- *et si, pour tout entier naturel* n*,* $(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \cdots, \mathrm{P}(n)) \implies \mathrm{P}(n+1)$

alors $\mathrm{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* n*.*

Remarque 2. — On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois n, $n+1$ et $n+2$.

Exemple 3. — Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + 2^n$.

Solution. Soit P la proposition définie pour tout entier n par $\mathrm{P}(n)$: "$u_n = 1 + 2^n$".

- **initialisation** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et pour $n = 1$ on a $u_1 = 3 = 1 + 2^1$. Ainsi $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(1)$ sont vraies.
- **hérédité** : supposons que les propositions $\mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain entier n fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Alors, par définition de u, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\underbrace{=}_{\text{H.R.}} 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \\ &= 3 + 3.2^{n+1} - 2 - 2.2^n \\ &= 1 + 32^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2.2^{n+1} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathrm{P}(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

II. Autres raisonnements

1) Symboles mathématiques

Nous utiliserons très souvent plusieurs symboles mathématiques. Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques**! Ce ne sont pas des abréviations.

- **quantificateur universel** : $\forall$ signifie "pour tout" ou "quel que soit".
- **quantificateur existentiel** : $\exists$ signifie "il existe".
- $\exists!$ signifie "il existe un unique".

On utilise / , | ou simplement "," pour signifier "tel que".

Exemple 4. — $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R},\ y = x + 1$ signifie : "pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $y = x + 1$".

Exercice 2. — Traduire les phrases mathématiques suivantes :

- $\forall\ x \geqslant 0,\ \exists! y \geqslant 0, y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = x^2+x$

Solution.

- La première se traduit par "pour tout réel x positif, il existe un unique y positif tel que $y^2 = x$". Ainsi, cette phrase traduit l'existence de $\sqrt{x}$ pour tout réel x positif.
- La deuxième se traduit par "il existe un réel x tel que $x^2+1 = x^2+x$". Elle traduit donc l'existence d'une solution à l'équation $x^2+1 = x^2+x$.

Remarque 3. — Dans une proposition, on peut intervertir deux quantificateurs identiques mais **on ne doit pas** intervertir deux quantificateurs différents.

Exemple 5. — Traduire en français les propositions suivantes. Signifient-elles la même chose ?

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists\ y \in \mathbb{R},\ x = y+1 \quad \text{et} \quad \exists\ y \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ x = y+1$$

Solution. La première signifie "pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x = y+1$". Cette proposition est vraie (il suffit de prendre $y = x-1$).
La deuxième signifie "il existe un réel y tel que pour tout réel x, $x = y+1$" qui est, quant à elle, clairement fausse (contre-exemple : il suffit de prendre $x = y$).

Proposition 1.1.

Lorsqu'on nie une proposition (on écrit sa **négation**), on échange quantificateur universel et quantificateur existentiel.

Remarque 4. — La négation de $\forall\ x \in \mathbb{R}, \cdots$ est donc $\exists\ x \in \mathbb{R}, \cdots$. Ainsi, pour réfuter une proposition universelle, il suffit d'exhiber un **contre-exemple**.

Exercice 3. — Déterminer la négation de la proposition : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$.

Solution. La négation est : $\forall\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.

2) Implication et équivalence

Nous disposons aussi de certains connecteurs logiques :

- $\Leftrightarrow$: c'est l'équivalence, le "si et seulement si".
- $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$: les implications.

Remarque 5. — Lorsque l'on a A $\Rightarrow$ B, on dit que B est la condition nécessaire, et A la condition suffisante. En effet, il **suffit** d'avoir A pour avoir B, et il est **nécessaire** d'avoir B si on a A.
Lorsqu'on a A $\Leftrightarrow$ B, A et B sont des conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 1. — Si A ⇒ B (sens direct), alors sa **réciproque** est B ⇒ A.
Si on a à la fois le sens direct et sa réciproque, on a alors l'équivalence.

3) Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde

Définition 2. — Si A est une proposition, on note non A, ou $\overline{A}$ sa négation.

Exemple 6. — Si A est la proposition $\forall\, x, x > 0$, alors sa négation est $\overline{A} : \exists\, x, x \leqslant 0$.

Théorème 1.2.

On a l'équivalence entre A ⇒ B (raisonnement direct) et $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (raisonnement par contraposée).
Pour démontrer un résultat du type A ⇒ B, il est souvent plus commode d'utiliser un raisonnement par contraposée : on suppose que l'on a $\overline{B}$ et on démontre qu'alors on a $\overline{A}$.

Exemple 7. — Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Solution. Un raisonnement direct est compliqué à faire rigoureusement. En revanche, la contraposée de $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ est $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, qui est vrai. Donc on a bien $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Remarque 6. — On peut enfin utiliser un raisonnement par l'absurde : si on veut montrer A ⇒ B, on suppose que l'on a A et $\overline{B}$ en même temps, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

Exercice 4. — Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ par l'absurde.

Solution. Par l'absurde, on suppose que $x \neq 0$ et que $x^2 = 0$. Mais alors, si $x^2 = 0$, $x = 0$. Or $x \neq 0$: c'est absurde ! Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse, et $x^2 \neq 0$.

4) Égalité

Méthode 1.1.

Pour démontrer une égalité :

① on introduit les variables nécessaires avec les mots "soit", ou "pour tout".
② en partant d'un des deux membres, on aboutit à l'autre membre par des égalités successives.
③ on conclut.

Exemple 8. — Montrer que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Solution. Soient a et b deux réels. Alors, en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

5) Équation et inéquation

Lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, il est important de raisonner par équivalence. Si on raisonne par implication, il est **nécessaire** de vérifier les résultats obtenus.

Pour résoudre une équation, on peut :

- partir de l'équation qu'on modifie (par équivalence) pour aboutir au résultat ;
- regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise ;
- ou enfin, on regroupe tous les termes dans un même membre, et on étudie une fonction.

Exemple 9. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(x) = x - 1$.

Solution. L'équation s'écrit également $\ln(x) - x + 1 = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient ainsi le tableau de signe et variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : $x = 1$.

Méthode 1.2.

Pour résoudre une inéquation :

① on introduit les variables nécessaires avec les mots "soit", ou "pour tout".

② on part de l'équation ou l'inéquation, et on résout en appliquant différentes propriétés par équivalence

③ ou alors on regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise, pour dresser un tableau de signe.

④ on conclut.

Rappel 1. — *Les propriétés suivantes n'ont pas à être justifiées.*

- *On ne modifie pas une équation en ajoutant un même nombre, en multipliant ou divisant par un même nombre non nul, en simplifiant ou en appliquant une fonction strictement monotone.*
- *Ajouter un terme à une inégalité ne change pas le sens de celle-ci, de même que multiplier l'inégalité par un même nombre positif. En revanche, multiplier par un nombre négatif une inégalité change le sens de celle-ci.*

Quand on résout une inéquation, on justifiera **toutes** les étapes non triviales, par exemple en utilisant les variations d'une fonction.

Exemple 10. — Résoudre l'inéquation $3x-3<1-2x$.

Solution. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x-3<1-2x &\iff 5x-3<1 \\ &\iff 5x<4 \\ &\iff x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{4}{5}\right[$.

Remarque 7. — On peut utiliser des mots en français ("c'est-à-dire", "si et seulement si") pour remplacer le symbole $\iff$, mais aussi pour l'implication ("donc", "puis", "soit").

III. Ensembles

1) Ensembles et éléments

Définition 3. — On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble. Pour signifier que l'élément x appartient à un ensemble E, on note $x\in \mathrm{E}$. Si x n'appartient pas à E, on écrit $x\notin \mathrm{E}$.

Exemple 11. — $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ sont des ensembles usuels. On a $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, mais $\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$.
$\{x_1,\cdots,x_n\}$ est l'ensemble constitué uniquement de $x_1,\cdots x_n$.

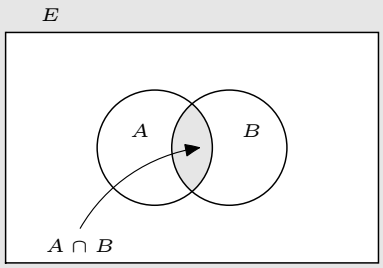
Définition 4. — L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.

Remarque 8. — ⚠ On note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$.

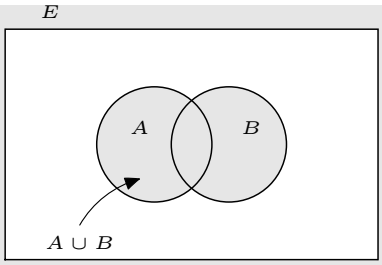
2) Union, intersection

Définition 5. — Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **intersection** de A et de B, noté $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.



- On appelle **réunion** (ou **union**) de A et de B, noté $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A ou dans B (voire dans les deux).



Exemple 12. — Si A = {1;2;4} et B = {2;4;5} alors

$$A \cup B = \{1;2;4;5\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2;4\}$$

3) Inclusion, sous-ensemble

Définition 6. — Soit E un ensemble. On dit que F est **inclus** dans E, et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. On dit alors que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E.

Exemple 13. — $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0,1\} \subset \{0,1,2\}$.

Définition 7. — Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, et on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 14. — On a $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Exercice 5. — Déterminer $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

Solution. Si $E = \{a,b,c\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Théorème 1.3.

Soit E un ensemble possédant n éléments (avec $n \geqslant 1$). Alors $\mathscr{P}(E)$ possède 2^n éléments.

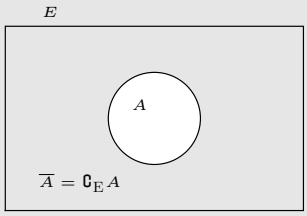
Démonstration. Pour construire un sous-ensemble de E, il faut prendre certains éléments de E et pas d'autres. Si on note $x_1; \cdots; x_n$ les éléments de E, alors pour chaque élément x_k, on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a n éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc

$$\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

□

4) Complémentaire

Définition 8. — Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A, et on note $\overline{A}$ ou $\complement_E(A)$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A : $\overline{A} = E \setminus A$.



Ainsi $\overline{A}$ est l'ensemble qui vérifie $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$.

Exemple 15. — Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{1, 2, 4\}$ alors $\overline{A} = \{3, 5\}$.

Théorème 1.4. Lois de de Morgan

Soit E un ensemble, et soient A, B deux sous-ensembles de E.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque 9. — Ainsi, la négation d'un "et" est un "ou", et réciproquement la négation d'un "ou" est un "et".

Méthode 1.3.

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on utilise la **double inclusion** : si $C \subset D$ et $D \subset C$ alors nécessairement $C = D$.

Démonstration.

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $A \cup B$. Donc il n'est ni dans A, ni dans B : il est donc dans $\overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soit $\in \overline{A} \cap \overline{B}$. Il n'est donc pas dans A, et il n'est pas dans B : il n'est donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$.

L'autre égalité se montre de la même manière. □

5) Produit cartésien

Définition 9. — Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

Exemple 16. — Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{-1, 1\}$ alors $E \times F = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$

Remarque 10. —

- Si $E = F$, on note en général $E \times E = E^2$.
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$

Exemple 17. — Les deux exemples classiques sont $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ \ x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple, $(1, -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ et $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Définition 10. — Un élément $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ est appelé un ***p*-uplet** ou une p-**liste**.

IV. Sommes et produits

1) Définitions et propriétés

a) Définition

Définition 11. — Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p, n]\!] = \{p; p+1; \cdots; n\}$.

Exemple 18. — Par exemple, $[\![2, 5]\!] = \{2, 3, 4, 5\}$.

Remarque 11. — Il y a n entiers dans $[\![1, n]\!]$, et $n+1$ entiers dans $[\![0, n]\!]$. Il y a $n - p + 1$ entiers dans $[\![p, n]\!]$.

Exemple 19. — Il y a 7 entiers dans $[\![2, 8]\!]$.

Définition 12. —

- Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels. On note

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_n$$

et on lit "somme de $k = 0$ à n des a_k".

- Soient $a_p, \cdots, a_n$ des réels ($p \leqslant n$). On note

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$

et on lit "somme de $k = p$ à n des a_k".

Exemple 20. — Par exemple, $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$. La notation $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$ est appelée **notation en extension**.

Exercice 6. — Ecrire la notation en extension de $\sum_{k=2}^{30} k$ et $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n}$.
Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ et $2+4+6+\cdots+18$.

Solution. On a, rapidement, $\sum_{k=2}^{30} k = 2+3+\cdots+30$, $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n} = 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{p}$,

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$2+4+\cdots+18 = \sum_{k=1}^{9} 2k$$

Remarque 12. — L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k^2$ représente la même somme que $\sum_{k=n}^{1} k^2$.

Remarque 13. — On définit de la même manière $a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n = \prod_{k=p}^{n} a_k$.

Définition 13. — Soit n un entier non nul. On appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
Par convention, $0! = 1$.

Remarque 14. — On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$ et $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Proposition 1.5.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Démonstration. En effet, par définition,

$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}_{=n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

□

Exercice 7. — Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$.

Solution. On a
$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

b) Première propriétés

Soient deux entiers p et n tels que $p \leqslant n$, soient $a_p, \cdots, a_n, b_p, \cdots, b_n$ des réels.

- Linéarité : $\sum_{k=p}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=p}^{n} \lambda.a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$.
- Relation de Chasles : pour tout entier $m > n$, $\sum_{k=p}^{m} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k$.
- $\prod_{k=p}^{n}(a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$
- $\forall\, \lambda$, $\prod_{k=p}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$

c) ln **et** exp

Propriété 1. —

- *Pour tous réels $a_p, \cdots, a_n$, on a* $\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{a_k}$.
- *Pour tous réels $a_p > 0, \cdots, a_n > 0$, on a* $\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$.

d) Sommes usuelles

Proposition 1.6. (♡) Sommes usuelles

On dispose des résultats suivants :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} (\text{si } q \neq 1)$$

Démonstration. Elles ont été vues précédemment. □

2) Changement de variables

a) Variables muettes

Remarque 15. — Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la rem-

placer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{z=p}^{n} a_z$$

b) Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à réécrire la somme différemment.

Proposition 1.7.

Soient $p \leqslant n$ deux entiers, l un entier, et $a_{p+l}, \cdots a_{n+l}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable $j = k - l$: ainsi, si $k = p + l$, alors $j = p$. De même, $k = n + l$ amène $j = n$.

Méthode 1.4.

Pour faire un changement de variable $j = f(k)$, on procède en remplaçant toutes les occurrences de k par son expression en fonction de j, mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence!

Exemple 21. — Calculer $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$ en posant $j = n - k$.

Solution. Posons $j = n - k$. Alors

$$\mathrm{S} = \sum_{j=n}^{0} j = \sum_{j=0}^{n} j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$\mathrm{S} = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) Sommes doubles

Remarque 16. — On peut envisager de calculer des sommes de sommes. Dans ce cas, on fera attention à utiliser deux variables différentes.

Exemple 22. — La somme suivante est une somme double :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i\,j$$

Remarque 17. — On peut calculer la somme précédente. En effet, lorsqu'on somme sur j, la variable i est une variable indépendante. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dans certains cas, on ne peut pas séparer les variables, quand une somme dépend d'une des variables. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

Dans ce cas, on peut calculer la somme, mais en étant rigoureux :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + i = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

3) Sommes télescopiques

a) Définition

Définition 14. — Soient $a_0, \cdots, a_{n+1}$ des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$$

Exemple 23. — La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ est une somme télescopique.

b) Simplification

Proposition 1.8.

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$. Alors

$$S_n = a_{n+1} - a_0$$

Démonstration. En effet,

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{n+1}$$

□

Exemple 24. — La somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ se simplifie en

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

Exercice 8. — Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Simplifier S_n.

Solution. On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$$

La somme S_n est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

c) Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

Définition 15. — Soient $a_0, \cdots a_{n+1}$ des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Exemple 25. — Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

Proposition 1.9.

Soit $P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ avec $a_0, \cdots a_{n+1}$ tous non nuls. Alors $P_n = \frac{a_{n+1}}{a_0}$

V. Dénombrement

1) Cardinaux

Définition 16. — Un ensemble E est dit fini s'il est soit vide, soit composé d'un nombre fini d'éléments distincts $e_1, \cdots, e_n$. Dans ce cas, on appelle n son cardinal (i.e. son nombre d'éléments), que l'on note |E| ou card(E).
Par convention, card($\varnothing$) = 0.

Remarque 18. — Faire du dénombrement, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans avoir à connaître la liste des éléments de E.

Propriété 2. — *Soient* E *et* A *deux ensembles, tels que* $A \subset E$ *et* E *est un ensemble fini. Alors*

- A *est également fini ;*
- $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.

Si, de plus, $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, *alors* $A = E$

Remarque 19. — ⚠ Si $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ sans avoir $A \subset E$ on ne peut pas conclure! Par exemple $A = \{1,2\}$, $E = \{2,3\}$. Alors $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ mais $A \neq E$

Théorème 1.10. Formule du Crible de Poincaré

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$
- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors
$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$
- Soient $A_1, \cdots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E deux à deux disjoints. Alors
$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

Proposition 1.11.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. On note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.
Alors
$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

Démonstration. Remarquons que les ensembles $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints, de réunion A. D'après le théorème précédent
$$\text{card}(A) = \text{card}\left((A \cap B) \cup (A \setminus B)\right) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B)$$
□

Proposition 1.12.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors
$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

Démonstration. On note n le cardinal de E et p celui de F. $E \times F$ est constitué des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Pour chaque élément x de E, il y a p couples possibles (un couple par élément de F). Puisqu'il y a n éléments dans E, on a donc
$$\underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ fois}} = np \text{ éléments dans } E \times F$$
□

2) Combinaisons

a) Définition

Définition 17. — Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble (ou une partie) de E qui contient p éléments.

Exemple 26. — Si $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2$, les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a, b\}, \{a, c\}$ et $\{b, c\}$.

Notation 1. — Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et on lit "p parmi n". On note aussi C_n^p.

Exemple 27. — D'après l'exemple précédent, $\binom{3}{2} = 3$.

Remarque 20. — Pour tout entier n, on obtient rapidement :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

b) Nombre de combinaisons

Théorème 1.13.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Pour $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$.

Exemple 28. — Le nombre de partie à 4 éléments d'un ensemble à 21 éléments est

$$\binom{21}{4} = \frac{21!}{4!(21-4)!} = 5985$$

Exercice 9. — Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

- Combien y a-t-il de comités possibles ?
- Combien y a-t-il de comités sachant qu'une des personnes doit être une femme ?

Solution.

- Il nous faut choisir (sans ordre) 3 personnes parmi 20. Il y a donc

$$\binom{20}{3} = 1140 \text{ comités possibles}$$

- On veut au moins une femme.

  ⚠ — il n'y a pas $\binom{8}{1}\binom{19}{2}$ comités possibles avec au moins une femme, car en comptant ainsi, certains comités sont comptés plusieurs fois !

  Notons A l'ensemble des comités ayant au moins une femme, B l'ensemble des comités n'ayant que des hommes, et C l'ensemble de tous les comités possibles. Alors $A \cup B = C$ et $A \cap B = \emptyset$. Or

$$\text{card}(B) = \binom{12}{3} = 220 \text{ comités}$$

$$\text{card}(C) = \binom{20}{3} = 1140 \text{ comités}$$

  Donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(C) - \text{card}(B) = 920 \text{ comités}$$

3) Formules

a) Formules de base

Théorème 1.14.

Pour tous naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

(Formule du triangle de Pascal) Pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ on a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration.

- En effet,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

- On a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

En mettant au dénominateur commun $p!(n-p)!$, on a alors

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{(n-1)!\left[p+(n-p)\right]}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}\end{aligned}$$

□

Remarque 21. — La deuxième formule nous permet d'obtenir tous les nombres combinatoires de proche en proche, dans le **Triangle de Pascal** :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 1.15.

Pour tout entier n strictement positif, et tout entier k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration. On a, en effet :

$$n\binom{n-1}{k-1}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

soit

$$n\binom{n-1}{k-1}=\frac{k\times n!}{k\times(k-1)!(n-k)!}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}$$

□

b) Formule du binôme de Newton

Une autre formule est une relation importante qui servira avec les matrices, ainsi que les applications linéaires.

Théorème 1.16. Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{p}a^{n-p}b^p+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

soit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soit P_n la proposition "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$" définie pour tout entier $n \geqslant 1$ (*le résultat est également vrai pour* $n = 0$).

- Pour $n = 1$ le résultat est vrai car $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a + \binom{0}{1} b$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et calculons $(a+b)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p+1} b^p + \cdots + \binom{n}{n} a b^n \\
&\quad + \binom{n}{0} a^n b + \cdots + \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}
\end{aligned}$$

Or pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ (formule du triangle de Pascal), donc

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{p} a^{n-p+1} b^p + \cdots \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

□

Exercice 10. — Calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Solution.

- Prenons $a = b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

  Donc $A_n = (1+1)^n = 2^n$.
- Prenons $a = 2$ et $b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

  Donc $B_n = (1+2)^n = 3^n$.

Proposition 1.17.

Pour tous réels a et b, et tout entier naturel n, on a

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\left(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n\right)=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k$$

Solution. Développons la somme, puis faisons un changement de variable :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k&=\sum_{k=0}^{n}a^{n+1-k}b^k-\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^{k+1}\\&=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a^{n+1-k}b^k-\left(b^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^{k+1}\right)\\&\overset{i=k-1}{=}a^{n+1}-b^{n+1}+\cancel{\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-i}b^{i+1}}-\cancel{\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^{k+1}}\end{aligned}$$

Exemple 29. — Ainsi, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

VI. Applications

1) Définition

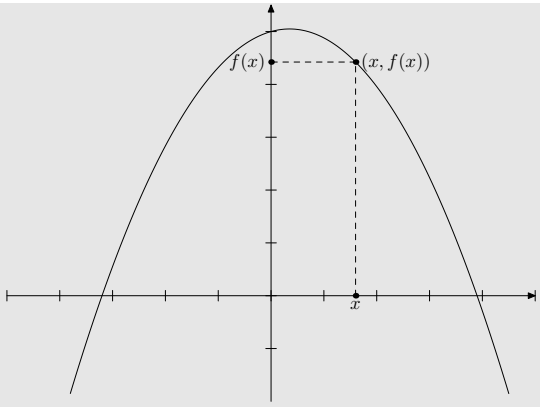
Définition 18. — Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) f de E vers F est une transformation qui, à chaque élément x de E, associe un unique élément y de F. L'élément y de F est alors noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f. x est alors un **antécédent** de $y=f(x)$ par f.
L'ensemble E est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

Notation 2. — On note $f:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{F}$ pour signifier que f est une application de E vers F.
L'ensemble des fonctions de E vers F est noté $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Exemple 30. — $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\x&\longmapsto&\mathrm{e}^{-x^2}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}\\(x,y)&\longmapsto&\frac{x+y}{1+x^2+y^2}\end{array}\right.$ sont des applications.

Remarque 22. — Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur $\mathbb{R}^-$. En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

Définition 19. — L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées $(x,f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f est appelé **graphe** ou **courbe représentative** de la fonction f.



Remarque 23. — Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel $f(x)$ existe.

Exercice 11. — Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-4}$.

Solution. La fonction f est définie si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$. Puisque $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, et après tableau de signe rapide, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

2) Opérations sur les fonctions

Définition 20. — Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble E. Soit λ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur E par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- On appelle $f \times g$ la fonction définie sur E par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- On appelle λf la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x) = f(x)+\lambda$.
- Si g **ne s'annule pas** sur E, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur E par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 31. — Soient f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Déterminer $f+g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution. Par définition, $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f+g)(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}$.

Définition 21. — Soit f une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F.
Soit g une fonction définie sur F et à valeur dans G.
La fonction qui, à tout réel x de E, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction composée** de f suivie de g. On a ainsi

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g \circ f$.

Exemple 32. — Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \right.$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution. On a, pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

Remarque 24. — Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

Méthode 1.5.

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

Exemple 33. — Soit $f : x \longmapsto x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

Solution. $g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car g est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Remarque 25 (associativité)**.** — Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

3) Injection, surjection

a) Injection

Définition 22. — On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **injective** si f ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque 26. — On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode 1.6.

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments x et x' de E vérifiant $f(x) = f(x')$. On montre alors que nécessairement $x = x'$.

Exemple 34. — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x+1}$ est injective.

Solution. En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $e^{x+1} = e^{x'+1}$, c'est-à-dire $x+1 = x'+1$ en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien $x = x'$.

Remarque 27. — $f : E \to F$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists\, (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

Méthode 1.7.

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

Exemple 35. — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution. En effet, $1 \neq -1$ et pourtant $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Théorème 1.18.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications injectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi injective.

Démonstration. Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors, puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme g est injective, on a nécessairement $f(x) = f(x')$. Or, f est aussi injective : on a donc $x = x'$. $g \circ f$ est bien injective. □

Proposition 1.19.

Une fonction $f : E \to F$ strictement monotone est injective.

Rappel 2. — *Une fonction f est strictement croissante si*

$$\forall\, (x, y) \in E^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

On dispose également de la stricte décroissance.

Démonstration. Soient x et y deux éléments de E tels que $x \neq y$. Mais alors, on a soit $x < y$ et dans ce cas $f(x) < f(y)$, soit $x > y$ et alors $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$. □

b) Surjection

Définition 23. — On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall\, y \in F, \quad \exists\, x \in E, y = f(x)$$

Méthode 1.8.

Pour prouver qu'une fonction f est surjective, il suffit donc de trouver une solution x à l'équation $f(x) = y$ pour tout élément y de F.

Exemple 36. — Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout x par $f(x) = 2x - 1$ est surjective.

Solution. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \iff x = \frac{y+1}{2}$. Il existe donc au moins un antécédent à y par la fonction f.

Méthode 1.9.

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

Exemple 37. — Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout réel x par $f(x) = e^x$ n'est pas surjective.

Solution. Puisque, pour tout réel x, $e^x > 0$, la valeur 0 n'est jamais atteinte par f. Ainsi, f n'est pas surjective.

Remarque 28. — On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.20.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi surjective.

Démonstration. Soit z un élément de G. Puisque g est surjective, il existe un élément $y \in F$ tel que $g(y) = z$. De plus, f est surjective, donc il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc x est un antécédent de z par la fonction $g \circ f$. □

c) Bijection

Définition 24. — On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, f est bijective si, et seulement si, chaque élément de F possède un **unique antécédent** par f dans E :

$$\forall\ y \in F,\quad \exists!\ x \in E,\ y = f(x)$$

Méthode 1.10.

Pour démontrer qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective, il faut montrer que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une **unique** solution dans E.

Exemple 38. — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ est bijective.

Solution. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \iff x - 4 = y \iff x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à y par f.

Exemple 39. — L'application $Id_E : E \to E$ définie pour tout x de E par $Id_E(x) = x$ est une bijection de E dans E.

Théorème 1.21.

Soit $f : E \to F$ une fonction. f est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : F \to E$, telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.
La fonction g est appelée **fonction réciproque** de f, et est notée $g = f^{-1}$.

Exemple 40. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$. Montrer que f et g sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

Solution. On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi, f est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction g.

Méthode 1.11.

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. On obtiendra $x = g(y)$ et g représente alors la fonction réciproque.

Exemple 41. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x+1}$. Déterminer f^{-1}.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$

qui a un sens car $y > 0$. Ainsi $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \ln(x) - 1$. Donc $f^{-1} = g$.

Méthode 1.12.

Lorsqu'on donne f et g et qu'on demande de montrer que $g = f^{-1}$, il suffit de montrer que $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$.

Exemple 42. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x-2$. Montrer que f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$.

Solution. Notons $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$. Alors, pour tous réels x et y, on a

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$

Ainsi, on a bien $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : g = f^{-1}$.

Théorème 1.22.

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est bijective, et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration. En effet,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{F}} \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{F}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{G}}$$

D'après le théorème précédent, $g \circ f$ est bijective, d'application réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

4) Image directe, image réciproque, restriction

Définition 25. — Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle **image directe** de A par f, et on note $f(\mathrm{A})$, l'ensemble composé par les images par f des éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) = \{y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A}, f(x) = y\}$$

  Dans le cas où $\mathrm{A} = \mathrm{E}$, on note $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathrm{E})$.
- Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$, on appelle **image réciproque** de B par f, et on note $f^{-1}(\mathrm{B})$, l'ensemble composé par les antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B}\}$$

Exemple 43. — Soit $f : x \mapsto x+2$. Déterminer $f([0;1])$ et $f^{-1}([0;1])$.

Solution. On a :

$$f([0;1]) = [2;3]$$
$$f^{-1}(([0;1]) = [-2;-1]$$

⚠On ne confondra pas l'image réciproque d'un ensemble $f^{-1}(\mathrm{B})$ et l'application réciproque d'une application f^{-1} lorsque celle-ci existe.

Proposition 1.23.

Soit $f : E \to F$ une application. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Démonstration. Si f est surjective, tout élément de F admet au moins un antécédent dans E. Donc $f(E) = F$. Réciproquement, si $f(E) = F$, alors pour tout élément $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$: par définition, f est surjective. □

Définition 26. — Soit $f : E \to F$ une fonction, et $G \subset E$. On appelle **restriction** de f à G, et on note $f|_G$ l'application définie sur G par

$$\forall\, x \in G,\ f|_G(x) = f(x)$$

Exemple 44. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. f n'est pas injective. En revanche, $f|_{\mathbb{R}^+}$ est injective.

fFileExiststex/Chap1/Exo1

Exercices

Récurrences

Exercice 12. — Démontrer par récurrence les résultats suivants :

- $\forall\, n \geqslant 1, 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Solution. Soit P_n la propriété "$1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$" définie pour tout entier $n \geqslant 1$, et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, la somme vaut $1^3 = 1$ et
$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$
La propriété P_1 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que
$$1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
donc
$$1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$
Or
$$\begin{aligned}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)\\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)\\ &= (n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$
Ainsi,
$$1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- (♡) Si a est un réel fixé $a \geqslant -1$,
$$\forall\, n, (1+a)^n \geqslant 1 + na \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$

Solution. L'inégalité de Bernoulli nous sera utile plus tard. Elle est donc à retenir.

Soit P_n la propriété "$(1+a)^n \geqslant 1 + na$" définie pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $(1+a)^0=1$ et $1+0\times a=1$. Ainsi, $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$.
  La propriété P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que
  $$(1+a)^n \geqslant 1+na$$
  En multipliant par $(1+a)>0$ par hypothèse, on a
  $$(1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$$
  soit
  $$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2$$
  Or $na^2 \geqslant 0$, donc
  $$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$$
  La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n.

- Si u est la suite définie par $u_0=7$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=2u_n-3$, alors
  $$\forall\ n, u_n = 2^{n+2}+3$$

Solution. Soit P_n la propriété "$u_n=2^{n+2}+3$" définie pour tout entier $n\geqslant 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation** : pour $n=0$, $u_0=7$ et $2^{0+2}+3=2^2+3=7$.
  La propriété P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que
  $$u_n = 2^{n+2}+3$$
  Or, par définition, $u_{n+1}=2u_n-3$. Donc, par hypothèse de récurrence (H.R.) :
  $$u_{n+1}=2\left(\underbrace{2^{n+2}+3}_{\text{H.R.}}\right)-3=2\times 2^{n+2}+6-3=2^{n+3}+3=2^{(n+1)+2}+3$$
  La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n.

- Si $q\neq 1$, alors
  $$\forall\ n, 1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Solution. Cette démonstration peut se faire sans récurrence, en calculant $(1-q)(1+q+\cdots+q^n)$.
Soit P_n la propriété "$1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$" définie pour tout entier $n\geqslant 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation** : pour $n=0$, la somme est réduite à $q^0=1$ et $\frac{1-q^1}{1-q}=1$.
  La propriété P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que
  $$1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Donc

$$1+q+\cdots+q^n+q^{n+1}=\underbrace{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{\text{H.R.}}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n.

- $\forall\ n\geqslant 1, 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Solution. Soit P_n la propriété "$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$" définie pour tout entier $n\geqslant 1$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

- **Initialisation** : pour $n=1$, la somme est réduite à 1 et $1^2=1$.
  La propriété P_1 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain $n\geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie.
  On sait donc que
  $$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$
  Donc,
  $$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=\underbrace{n^2}_{\text{H.R.}}+(2n+1)=(n+1)^2$$
  La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

Ensemble

Exercice 13. — Soient les ensembles suivants :

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}, B=\{1,3,5,7\}, C=\{2,4,6\}, D=\{3,6\}$$

Déterminer $B\cap D, C\cap D, B\cup C, B\cup D$. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

Solution. Exercice rapide pour bien maitriser les différents concepts. On obtient :

$$B\cap D=\{3\},\ \ C\cap D=\{6\},\ \ B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7\}=1,\ \ B\cup D=\{1,3,5,6,7\}$$

Enfin, dans A, on a :

$$\overline{B}=\{2,4,6\}=C,\ \ \overline{C}=\{1,3,5,7\}=B,\ \ \overline{D}=\{1,2,4,5,7\}$$

Exercice 14 (Lois de de Morgan et distributivités)**.** — Soient E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Solution. On raisonne par double inclusion : si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.

- $[\subset]$: si $x \in \overline{A \cup B}$, cela veut dire que x n'est pas dans $A \cup B$, dont il n'est ni dans A, ni dans B. Il est ainsi dans $\overline{A}$ et $\overline{B}$: donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
  $[\supset]$: si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, cela veut dire que x n'est pas dans A et x n'est pas dans B. Il n'est donc ni dans A, ni dans B, donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$
- $[\subset]$: si $x \in \overline{A \cap B}$, cela veut dire que x n'est pas dans $A \cap B$, donc il n'est pas dans A, ou pas dans B. Donc il est dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$: donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
  $[\supset]$: si $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, cela veut dire que x est dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$. Ainsi, il n'est pas dans A ou pas dans B. Dans tous les cas, il n'est pas dans $A \cap B$: $x \in \overline{A \cap B}$.
- $[\subset]$: si $x \in A \cup (B \cap C)$, cela veut dire que x est dans A, ou dans $B \cap C$, donc dans A ou dans B et C. Dans tous les cas, il est dans $A \cup B$ et dans $A \cup C$: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  $[\supset]$: si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, cela veut dire que x est dans$A \cup B$ et dans $A \cup C$. Donc x est dans A, ou alors il est dans B et C, donc dans A ou dans $B \cap C$: $x \in A \cup (B \cap C)$.
- $[\subset]$: si $x \in A \cap (B \cup C)$, cela veut dire que x est dans A et dans $B \cup C$, donc dans A et dans B ou C. Donc x est dans A et B, ou dans A et C : $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $[\supset]$: si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, cela veut dire que x est dans $A \cap B$ ou dans $A \cap C$, donc dans A et B, ou dans A et C. Dans tous les cas, x est dans A et dans B ou C : $x \in A \cap (B \cup C)$.

Exercice 15. — Déterminer les éléments de $\mathscr{P}(\{0, 1, 2\})$

Solution. On doit déterminer tous les sous-ensembles de $\{0,1,2\}$:

- à 0 élément, il n'y a que $\emptyset$.
- à 1 éléments, il y a $\{0\}, \{1\}$ et $\{2\}$.
- à 2 éléments, il y a $\{0,1\}, \{0,2\}$ et $\{1,2\}$.
- à 3 éléments, il n'y a que $\{0,1,2\}$.

Ainsi,

$$\mathscr{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

On obtient bien $2^3 = 8$ sous ensembles.

Dénombrement

Exercice 16. — On possède un jeu de 32 cartes. On note A l'ensemble "les deux cartes tirées sont rouges", B l'ensemble "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'ensemble "les deux cartes tirées sont un personnage".

Que représente $\overline{A}, A \cap B \cap \overline{C}$ et $(A \cap B) \cap C$?
Ecrire à l'aide des ensembles A, B et C les ensembles F : "les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges", et G : "on obtient au plus un personnage rouge".

Solution. En français, $\overline{A}$ représente l'ensemble "au moins une des deux cartes n'est pas rouge", $A \cap B \cap \overline{C}$ représente l'ensemble "les deux cartes sont rouges, sont un valet et un dix et au moins un des deux n'est pas un personnage", ce qui se simplifie en "les deux cartes sont un valet rouge et un dix rouge". Enfin $A \cap B \cap C$ est l'ensemble vide : en effet, il est impossible que les deux cartes soient un valet et un dix, et en même temps, deux personnages.

À l'aide des ensembles A, B et C, on a

$$F = C \cap \overline{A} \text{ et } G = \underbrace{\left(A \cap \overline{C}\right)}_{\substack{\text{si les deux sont rouges, on a au plus un personnage}}} \cup \overline{A} = \overline{A} \cup \overline{C}$$

Exercice 17. — Parmi 40 étudiants, 8 connaissent le portugais, 15 le chinois, et 9 le russe. D'autres part, 4 parlent chinois et russe, 5 chinois et portugais, 2 russe et portugais et 2 parlent les 3 langues. Combien d'étudiants ne connaissent aucune de ces trois langues ?

Solution. Notons P l'ensemble des élèves parlant portugais, C ceux parlant chinois, et R ceux parlant russe. Notons A l'ensemble des élèves ne parlant aucunes des trois langues. Alors $\overline{A}$ désigne l'ensemble des élèves parlant au moins une langue. Ainsi

$$\overline{A} = P \cup C \cup R$$

Par la formule du crible de Poincaré, on a

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(P) + \text{card}(C) + \text{card}(R) - \text{card}(P \cap C) - \text{card}(P \cap R) - \text{card}(R \cap C) + \text{card}(P \cap C \cap R)$$

soit, d'après l'énoncé

$$\text{card}(\overline{A}) = 8 + 15 + 9 - 5 - 2 - 4 + 2 = 23$$

Il y a donc $40 - 23 = 17$ élèves ne parlant aucune langue.

Exercice 18. — Au menu d'un restaurant, il y a 3 entrées 2 plats et 4 desserts possibles. Combien de menus (une entrée, un plat, un dessert) sont possibles ?

Solution. Pour composer un menu, il faut choisir une entrée parmi les 3, un plat parmi les 2 et un dessert parmi les 4. Il y a donc

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \text{ menus possibles.}$$

Exercice 19. — Un anagramme est un mot (ou une succession de lettres) formés des mêmes lettres, dans un ordre différent. Combien d'anagrammes peut on former avec le mot GLACE ? le mot ELEVE ?

Solution. GLACE est composé de 5 lettres distinctes. Il faut placer 5 lettres distinctes à 5 places : il y a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ anagrammes possibles.

Pour le mot ELEVE, il y a 3 lettres E et 2 autres lettres. On place d'abord les 3 lettres sur 5 places possibles. Il reste alors 2 lettres à poser dans les 2 places restantes. Cela donne donc

$$\binom{5}{3} \times 2 = 20 \text{ anagrammes possibles.}$$

Exercice 20. — Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Solution. Dans tous les cas, on utilise la formule du binôme de Newton avec des réels bien choisis :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$1 = 1^n = ((1-x)+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Exercice 21 (⋆)**.** — On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

Solution. Pour simplifier, on note de 1 à 365 les jours. On note A l'événement "au moins deux élèves sont nés le même jour". On va déterminer $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$. $\overline{\mathrm{A}}$ est donc l'événement "les élèves sont tous nés des jours différents".
L'univers Ω qui nous intéresse est constitué de l'ensemble des 25 jours de naissances des élèves. On a

$$\mathrm{card}(\Omega) = 365^{25}$$

L'événement $\overline{\mathrm{A}}$ est constitué des listes de 25 jours deux à deux distincts. Par définition,

$$\mathrm{card}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{A}_{365}^{25}$$

Donc

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{\mathrm{A}_{365}^{25}}{365^{25}}$$

On trouve $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) \approx 0,568699704$.

Remarque : ce résultat est appelé *paradoxe des anniversaires*. A partir de 23 élèves, la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour est supérieure à $\frac{1}{2}$, ce qui est contre l'intuition. A partir de 57 élèves, cette probabilité est supérieure à 0,99.

Fonctions

Exercice 22. — Montrer les résultats suivants :

$$\forall\, x>0,\quad \sqrt{\frac{2}{x+1}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{x+4}} \qquad \forall\, x,\quad \mathrm{e}^{2x+1} \leqslant \mathrm{e}^{x^2+2}$$

Solution.

1. Pour $x>0$, on a $x+1<x+4$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a
$$\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{1}{x+4}$$
soit
$$\frac{2}{x+1}\geqslant\frac{2}{x+4}$$
Enfin, par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$:
$$\sqrt{\frac{2}{x+1}}\geqslant\sqrt{\frac{2}{x+4}}$$

2. Calculons
$$\frac{e^{x^2+2}}{e^{2x+1}}=e^{x^2+2-2x-1}=e^{x^2-2x+1}$$
Or, pour tout réel x, $x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$. Donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
$$e^{x^2-2x+1}\geqslant e^0=1$$
Ainsi,
$$\frac{e^{x^2+2}}{e^{2x+1}}\geqslant 1$$
Enfin, puisque $e^{2x+1}>0$, on en déduit bien
$$e^{x^2+2}\geqslant e^{2x+1}$$

Exercice 23. — On considère les fonctions $f:x\longmapsto x^2, g:x\longmapsto\sqrt{x}$ et $h:x\longmapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :
$$f\circ g, f\circ h, g\circ h, h\circ f, h\circ g, g\circ f$$

Solution. Remarquons tout d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $\mathbb{R}^+$ et h est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est toujours positive, et h est positive sur $[2,+\infty[$. Ainsi :

- $f\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x\geqslant 0$, $f\circ g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$.
- $f\circ h$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\circ h(x)=(x-2)^2$.
- $g\circ h$ est définie sur $[2,+\infty[$, et pour tout $x\geqslant 2$, $g\circ h(x)=\sqrt{x-2}$.
- $h\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h\circ f(x)=x^2-2$.
- $h\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x\geqslant 0$, $h\circ g(x)=\sqrt{x}-2$.
- $g\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g\circ f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$.

Exercice 24. — Soit $f:x\longmapsto\frac{1}{x^2+1}$ et $g:x\longmapsto e^{-x^2}$. Déterminer quatre fonctions u, v, w, et z telles que $f=u\circ v$ et $g=w\circ z$.

Solution. On peut écrire f sous la forme $\frac{1}{v}$ avec $v:x\longmapsto x^2+1$. Ainsi, $f=u\circ v$ avec $u:x\longmapsto\frac{1}{x}$ et $v:x\longmapsto x^2+1$.

De même, g s'écrit e^z avec $z : x \longmapsto -x^2$. Ainsi, $g = w \circ z$ avec $w : x \longmapsto e^x$ et $z : x \longmapsto -x^2$.

Exercice 25. — Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
- $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par
$$g(x) = e^{3+\ln(x)}$$
- $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{x^3+1}$

Solution.

- **Injectivité**. *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est injective, on écrit $f(x) = f(x')$ et on essaie de montrer que $x = x'$. Pour montrer qu'elle n'est pas injective, on exhibe un contre-exemple.*
  f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$. En effet, $-1 \neq 1$ et pourtant $f(-1) = f(1) = 2$.
  g est injective sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, soient x et x' deux réels strictement positifs. Alors
  $$g(x) = g(x') \Leftrightarrow e^{3+\ln(x)} = e^{3+\ln(x')} \Leftrightarrow 3 + \ln(x) = 3 + \ln(x') \text{ car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$
  Ainsi, $\ln(x) = \ln(x')$ puis $x = x'$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
  h est injective sur $\mathbb{R}$. En effet, soient x et x' deux réels. Alors
  $$h(x) = h(x') \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{x'^3+1} \Leftrightarrow x^3 + 1 = x'^3 + 1 \text{ en appliquant la fonction inverse}$$
  donc $x^3 = x'^3$ puis $x = x'$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Surjectivité**. *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est surjective sur un ensemble, on prend y un élément de cet ensemble, et on lui cherche au moins un antécédent. Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, on exhibe un élément y de cet ensemble qui n'est pas atteint par la fonction.*
  f n'est pas surjective. En effet, pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 1$, donc (par exemple) 0 n'est jamais atteint par la fonction f. *En revanche, elle est surjective sur* $[1; +\infty[$.
  g n'est pas surjective. En effet, pour tout réel $x > 0$, $g(x) > 0$ (car une exponentielle est toujours positive), donc (par exemple) -1 n'est jamais atteint par la fonction g. *En revanche, elle est surjective sur* $]0; +\infty[$.
  h est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x) = y$ nous donne $\frac{1}{x^3+1} = y$ puis $x^3 = \frac{1}{y} - 1$ ($y \neq 0$) et enfin $x = \sqrt[3]{\frac{1}{y} - 1}$ (fonction qui est bien définie sur $\mathbb{R}$).
- **Bijectivité**. f n'étant pas injective, elle n'est a fortiori par bijective. De même, g n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective. Enfin, h étant à la fois injective et surjective, elle est bijective.

Exercice 26. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{x+1}$.
Déterminer l'image directe par f de $[0; 1]$. Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^+$ et de $[1; e]$.

Solution. Pour tout x dans $[0; 1]$, $x + 1$ parcourt $[1; 2]$. Par stricte croissance de exp, e^{x+1} parcourt alors $\left[e^1; e^2\right]$. Donc
$$f([0; 1]) = \left[e; e^2\right]$$

Enfin e^{x+1} est dans $[1;e]$ si et seulement si $x+1$ est dans $[\ln(1);\ln(e)] = [0;1]$, et donc si $x \in [-1;0]$:

$$f^{-1}([1;e]) = [-1;0]$$

CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle certaines généralités sur les fonctions, et on ajoute certains compléments permettant d'étudier les fonctions (parité, périodicité) ainsi que de nouvelles fonctions (valeur absolue, partie entière, trigonométrique et réciproque, hyperbolique). On revient également sur la trigonométrie.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :

- parité et périodicité ..... □
- les extrema d'une fonction ..... □

② savoir déterminer les limites de fonctions :

- par opérations usuelles, par composées ..... □
- en lien avec le taux d'accroissement ..... □

③ savoir maîtriser les dérivées et primitives :

- connaître dérivées usuelles et formules de dérivations ..... □
- étudier les variations d'une fonction avec la dérivée ..... □
- utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solutions à des équations ..... □
- savoir déterminer des primitives de fonctions ..... □

④ connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, limites, représentation graphique) :

- fonctions affines et trinômes du second degré ..... □
- fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse ..... □
- fonction partie entière ..... □
- fonctions ln, exp et puissances ..... □
- fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) ..... □
- fonctions trigonométriques réciproques (arccos, arcsin, arctan) ..... □
- fonctions hyperboliques (ch, sh, th) ..... □

⑤ savoir étudier complètement une fonction ..... □

I. Généralités sur les fonctions

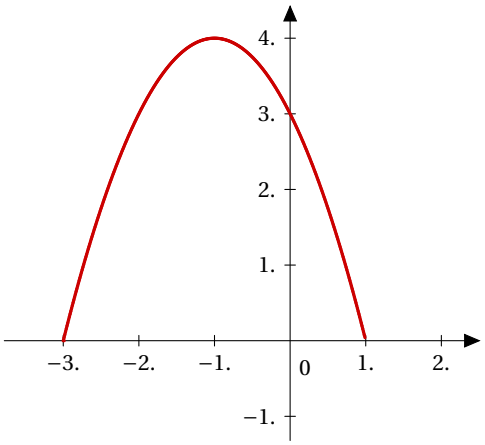
1) Notion de fonction

Définition 27. — On appelle **fonction** f, définie sur un domaine I, un objet qui, à partir d'un nombre x de I donné, associe **une unique image** noté $f(x)$.

On note $x \longmapsto f(x)$ pour dire "à x, on associe le nombre $f(x)$".

Exemple 45. —

- Fonction définie graphiquement :



- Fonction définie par une formule : $g(x) = 3x^2 + 1$
- Fonction définie par un tableau :

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	1	-3	2	$\frac{1}{2}$	0

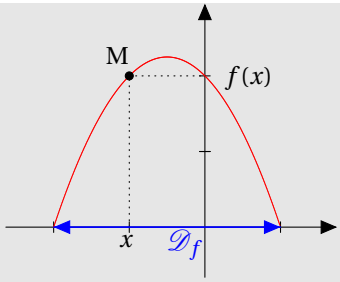
Définition 28. — On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f, noté $\mathscr{D}_f$ en général, l'ensemble de tous les réels x où on peut calculer $f(x)$ (c'est à dire, où $f(x)$ est définie).

Exemple 46. — Dans les exemples précédents :

- f est définie graphiquement sur $[-3;1]$: en effet, on ne peut calculer $f(x)$ que si $-3 \leqslant x \leqslant 1$.
- g est définie sur $\mathbb{R}$: en effet, pour tout nombre réel x, on peut calculer $3x^2+1$, et donc $g(x)$.
- h est définie sur $\{-2;-1;0;1;2\}$.

2) Courbe représentative

Définition 29. — Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. Soit (O;I;J) un repère (en général orthonormé) du plan. Le **graphe** (ou **courbe représentative**) de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $(x;f(x))$ où x décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

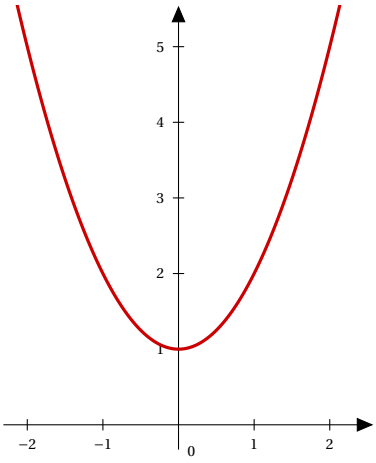


3) Parité et imparité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

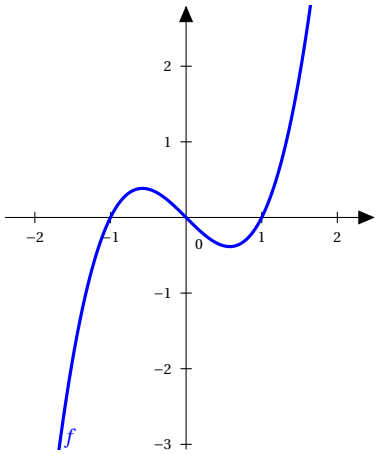
Définition 30. — f est dite **paire** si
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$

Remarque 29. — f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 31. — f est dite **impaire** si
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque 30. — f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple 47. — La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction paire ; la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire. En effet, elles sont définies sur des domaines symétriques par rapport à 0, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad (-x)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Méthode 2.1.

Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en deux étapes :

- On vérifie que le domaine est bien symétrique par rapport à 0.
- Pour un certain x dans $\mathscr{D}_f$ on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

Exemple 48. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Déterminer la parité de f.

Solution. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

Méthode 2.2.

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire, on exhibe un contre-exemple : on cherche deux réels x et y dans $\mathscr{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$ (selon le cas, cela peut être le même réel)

Exemple 49. — Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + x$ n'est ni paire, ni impaire.

Solution. En effet, on constate que, pour $x = 1$, on a

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$$

alors que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$. Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

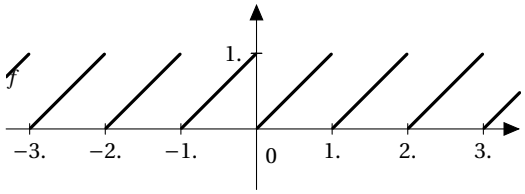
4) Périodicité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Définition 32. — On dit que f est **périodique** de période $T > 0$ si :

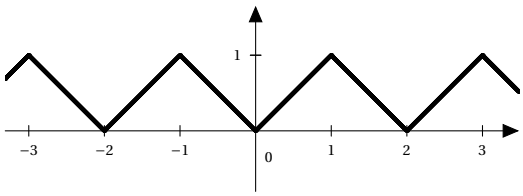
- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad x + T \in \mathscr{D}_f$
- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x+T) = f(x)$

Remarque 31. — La courbe représentative d'une fonction périodique n'est donc qu'une répétition de sa représentation sur $[0;T]$. La fonction suivante est périodique, de période 1 :



Exercice 27. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2, définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f(x) = 1 - x$. Représenter f.

Solution. La fonction étant paire, on la représente sur $[0;1]$ puis par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[-1;1]$. On obtient ainsi la courbe représentative sur une période, qu'il suffit de répéter. On obtient la courbe représentative suivante :



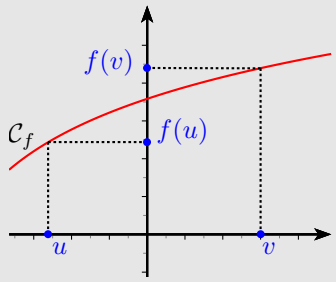
5) Sens de variation

Définition 33. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère.

On dit que f est **croissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \leqslant f(v)$$

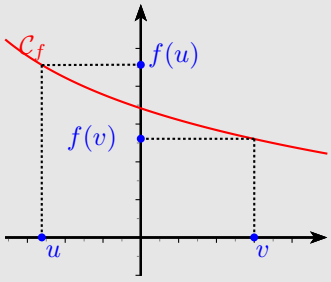
Une fonction croissante conserve l'ordre



On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \geqslant f(v)$$

Une fonction décroissante change l'ordre



Remarque 32. — On définit également la croissance stricte et la décroissance stricte. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **strictement croissante** lorsque pour tout u, v de l'intervalle I

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v)$$

Propriété 3. —

- *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).*
- *La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.*
- *La composée de deux fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.*

Démonstration.

- Soit $x < y$. Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. En additionnant les inégalités, $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$: $f + g$ est bien croissante.
- Soit $x < y$ et f, g deux fonctions croissantes. Alors $f(x) \leqslant f(y)$. Puisque g est croissante, on a également $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$: $g \circ f$ est bien croissante.

Les autres inégalités se démontrent de la même manière. □

Théorème 2.1.

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Alors f est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Démonstration. f est par définition surjective sur $f(\mathrm{I})$. Enfin, si $x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$ car la fonction f est strictement monotone : donc f est injective, et donc bijective. □

6) Majorant-Minorant

Définition 34. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que,

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}$$

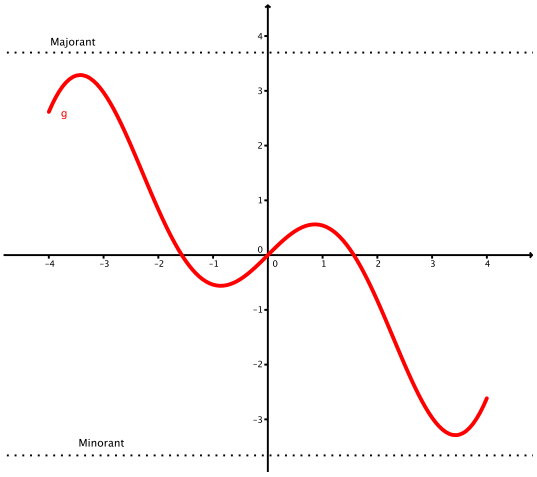
M est appelé un **majorant** de f sur I.

- f est dite **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que,

$$\forall\ x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant m$$

m est appelé un **minorant** de f sur I.

- f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.



Remarque 33. — Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est bornée. Ainsi, pour borner f, il peut souvent être judicieux de borner $|f|$.

Exemple 50. — Soit $f : x \longmapsto 2\sin(x^2+1)$. Alors, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 2$. Ainsi, f est bornée.

7) Maximum-Minimum

Définition 35. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de l'intervalle I.

- On dit que f admet un **maximum** en a si, pour tout réel x de I, on

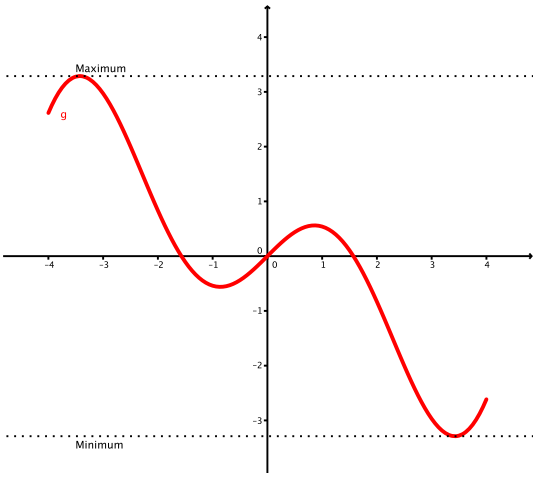
$$f(x) \leqslant f(a)$$

On note $\max\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x) = f(a)$.

- On dit que f admet un **minimum** en a si, pour tout réel x de I, on

$$f(x) \geqslant f(a)$$

On note $\min\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x) = f(a)$.



Remarque 34. — On dit que $f(a)$ est un **extremum** de f sur I si $f(a)$ est un minimum ou un maximum de f sur I.
Si $f(a)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant a, mais pas sur I tout entier, on dit que $f(a)$ est un **extremum local** en a.

II. Limites

L'ensemble des éléments dans cette section sera revu dans l'année, de manière plus détaillée. Il s'agit ici de faire des rappels des années précédentes, dans le but de pouvoir faire des études fonctions.

1) Opérations sur les limites

Rappelons les résultats vu dans les classes précédentes. On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a) Limite de $f+g$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 51. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$.

b) Limite de $f\times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l.l'$	signe(l').∞	-signe(l').∞
$+\infty$	signe(l).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(l).∞	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 35. — Si $l = 0$ (et/ou $l' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = l.l' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0 \times \infty$") sont **indéterminées**.

Exemple 52. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} 3xe^x = 0$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x\to 0} 3xe^x = 0$.

c) Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	signe(l').∞	-signe(l').∞
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe(l).∞	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe(l).∞	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 53. —

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$ par somme et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

2) Limite d'une fonction composée

Théorème 2.2.

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Démonstration. Admis. □

Méthode 2.3.

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.
- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 54. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$.

Solution.

- On pose $X = x^2 - x + 1$. On a
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$
- On a
$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$$

Exercice 28. — Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

Solution. Posons $X = 3x - 1$. Alors :

- On a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x - 1 = 0^+$.
- De plus, $\lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,
$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

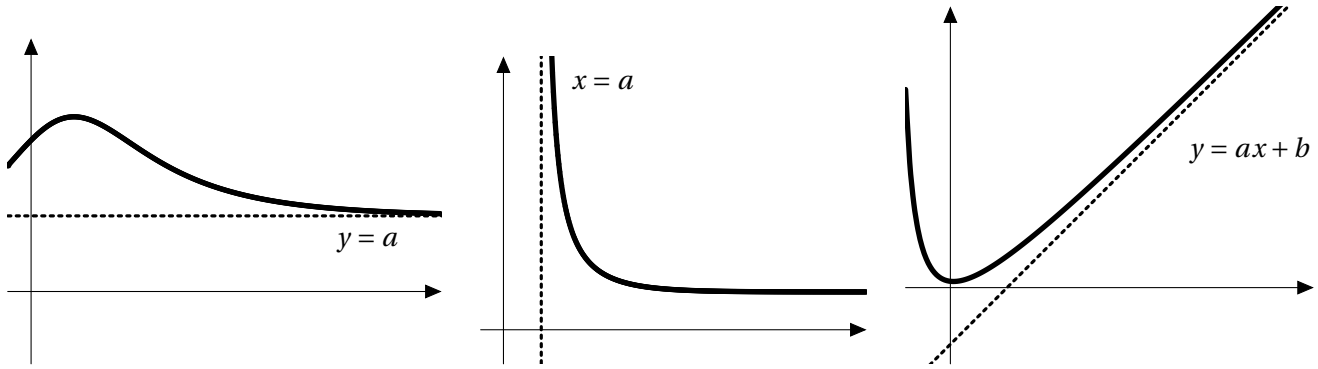
3) Limites et asymptotes

Les asymptotes sont très utiles pour pouvoir tracer au mieux l'allure de la courbe d'une fonction.

Définition 36. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$).

- On dit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
- On dit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$).
- On dit que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (respecti-

vement $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(a+b)=0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(a+b)=0$).



Asymptote horizontale | Asymptote verticale | Asymptote oblique

Remarque 36. — On verra une méthode pour déterminer le comportement asymptotique (incluant les asymptotes obliques) plus tard dans l'année.

III. Dérivée, primitive

L'ensemble des éléments dans cette section sera revu dans l'année, de manière plus détaillée. On fait des rappels avec quelques compléments.

1) Nombre dérivé et tangente

Intuitivement, la tangente à la courbe d'une fonction f en un point M est la droite qui "colle" au mieux la courbe au voisinage de M. Elle permet d'avoir une idée de l'évolution de la courbe de f autour du point, et permet ainsi d'avoir un tracé précis au voisinage de ce point.

Définition 37. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **nombre dérivé** de f au point d'abscisse x, et on note $f'(x)$, la limite, lorsque celle-ci existe, du taux d'accroissement :

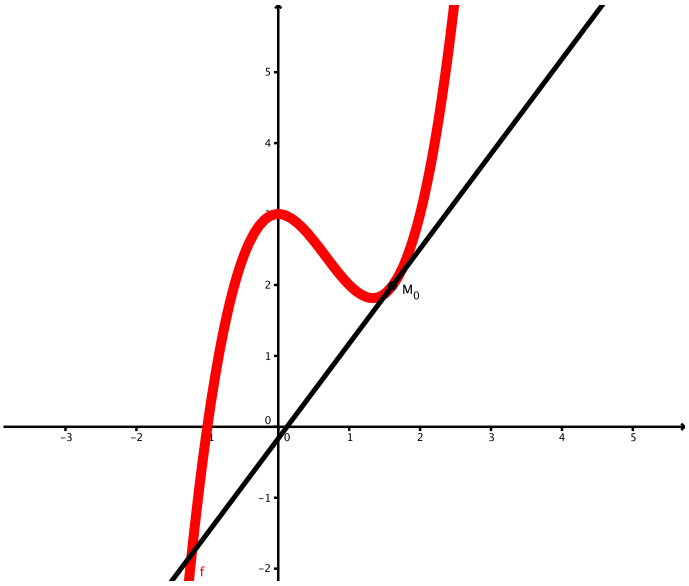
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

On le note également $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

Définition 38. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La **tangente** à la courbe de f au point M_0 d'abscisse x_0 est, quand le nombre dérivé $f'(x_0)$ existe, la droite d'équation

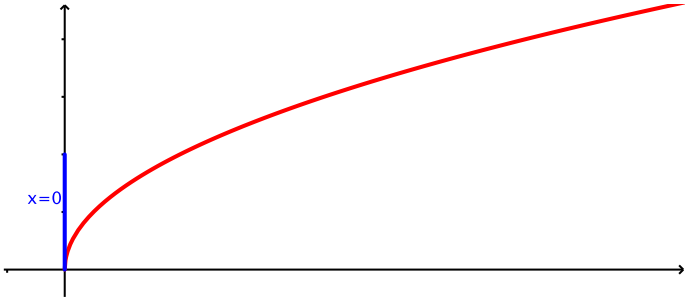
$$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Le nombre $f'(x_0)$ représente ainsi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0.



Remarque 37. — Si la limite du taux d'accroissement quand x tend vers a (ou $a^{\pm}$) est infini, la courbe de f admet au point d'abscisse a une tangente verticale (ou demi-tangente) d'équation $x = a$.

Exemple 55. — Par exemple, la fonction racine n'est pas dérivable en 0, et le taux d'accroissement a pour limite $+\infty$ en 0 : la courbe admet donc une demi-tangente verticale.



2) Formules de dérivation

On rappelle quelques résultats sur la dérivation : dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, et les applications de la dérivation.

Proposition 2.3.

On dispose des dérivées suivantes :

- $x \longmapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) a pour dérivée $x \longmapsto 0$.
- $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) a pour dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a pour dérivée $x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ se dérive en elle-même, et $x \longmapsto \ln(x)$ se dérive en $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

- $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Proposition 2.4.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

- Si k est un réel, alors ku est dérivable sur I, et $(ku)' = ku'$.
- $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u'+v'$.
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 29. — Déterminer la dérivée des fonctions $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+2}{x^2+1}$.

Solution. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$, mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la fonction racine n'est pas dérivable en 0). La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). En appliquant les formules, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x^2-2x+2)(2x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Proposition 2.5.

Soient $u : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ et $v : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $v \circ u$ est dérivable sur I, et $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Exercice 30. — Déterminer la dérivée de la fonction $f : t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $g : x \longmapsto \sin(x^2+1)$, définies sur $\mathbb{R}$.

Solution. Toutes les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- f peut s'écrire $v \circ u$ avec $u : t \longmapsto \omega t + \varphi$ et $v : t \longmapsto \cos(t)$. En appliquant la formule précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = u'(t) \times v'(u(t)) = \omega \times (-\sin(\omega t + \varphi))$$
- De même, g peut s'écrire $v \circ u$ avec $u : x \longmapsto x^2+1$ et $v : x \longmapsto \sin(x)$. En appliquant la formule précédente, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2x\cos(x^2+1)$$

3) Variations et dérivations

Rappelons le résultat important liant la dérivation et les variations.

Proposition 2.6.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) > 0$ sauf en un nombre fini de réel, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de réel, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exercice 31. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$. Etudier les variations de f.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$. Ainsi, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en -1 où elle s'annule. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Continuité

La notion de continuité sera vue ultérieurement, dans le chapitre sur les limites. On rappelle quelques propriétés importantes (théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection).

Définition 39. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est continue en $a \in$ I si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de a.

Remarque 38. — En utilisant les propriétés des limites, on en déduit que la somme, le produit, le quotient (quand il existe) et la composée de fonctions continues est continue.

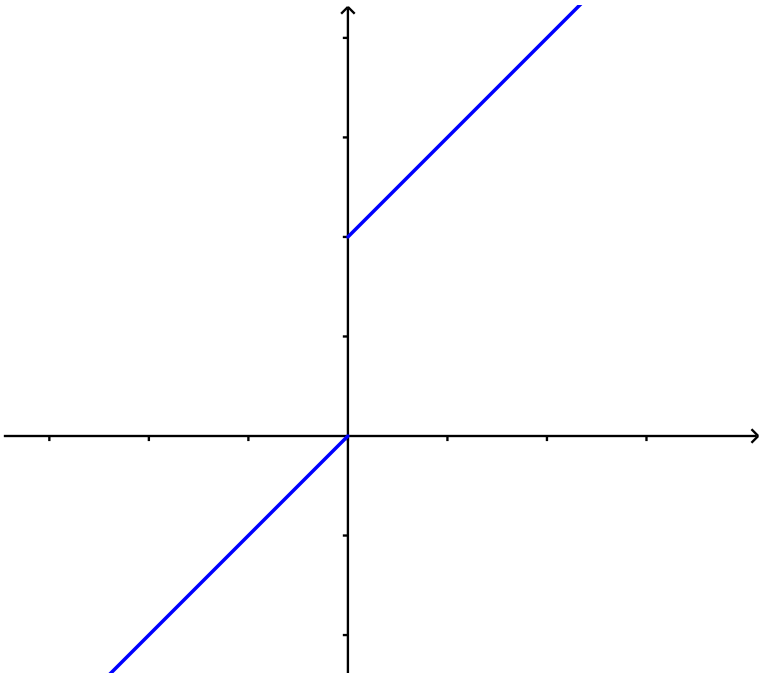
Exemple 56. — Il y a plusieurs types de discontinuité.

- Un "saut" ou discontinuité de première espèce. Par exemple, la fonction

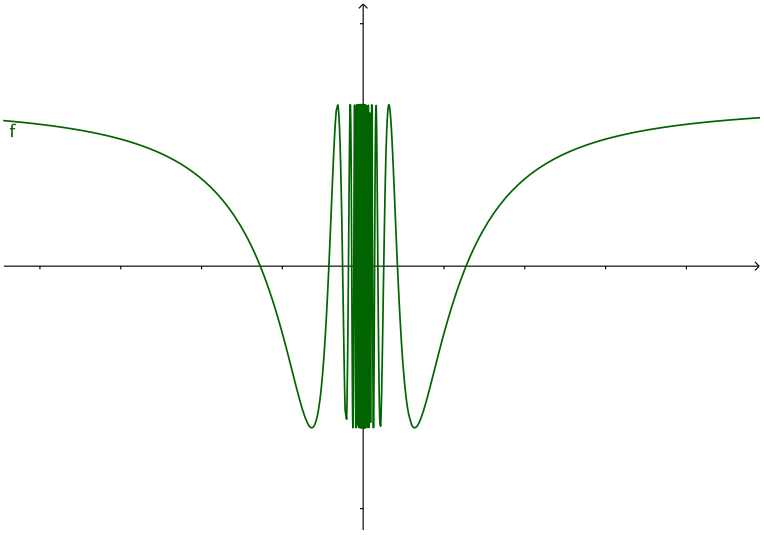
$$f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0. En effet,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1 \neq 0$$



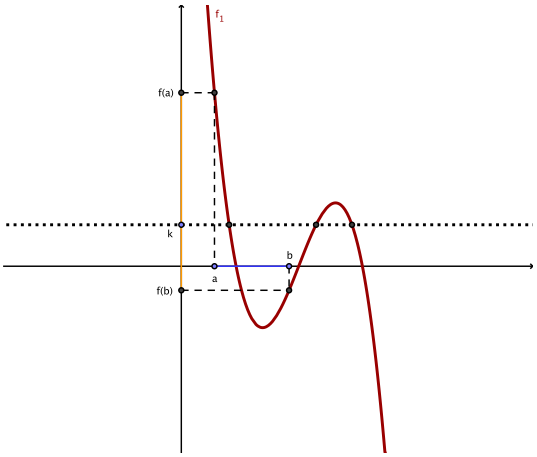
- Une des limites (à gauche ou droite) est infinie ou n'existe pas. On parle de discontinuité de deuxième espèce. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0. En effet, la limite de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en 0^+ est $+\infty$, et sin n'a pas de limite en $+\infty$.



La continuité est lié à un théorème essentiel : le théorème des valeurs intérmédiaires.

Théorème 2.7.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.



Le théorème suivant est très souvent utilisé, lorsque la fonction est strictement monotone.

Théorème 2.8.

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle I = $[a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans $[a;b]$.

Remarque 39. — Si on est sur un intervalle non borné (par exemple, $[0;+\infty[$), le résultat reste valable, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites en a et en b.

Exercice 32. — Prouver que l'équation (E) : $x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution. On se ramène à une écriture $f(x) = k$: $x + x\sqrt{x} = 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. L'image de $]0;+\infty[$ est donc

$$\left]\lim_{x\to 0} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0;+\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x) = 1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

5) Dérivée d'une fonction réciproque

On dispose d'une conséquence importante du théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas où la fonction est strictement monotone.

Proposition 2.9.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f est continue et strictement monotone sur I.
La fonction f établit une bijection de I sur J = f(I). Alors, sa fonction réciproque f^{-1} : J $\longrightarrow$ I vérifie :

- f^{-1} est continue sur J.
- f^{-1} est strictement monotone sur J, de même monotonie que f.

- Si f est dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\mathrm{J}\backslash\{f(x),\quad f'(x)=0\}$.

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} est symétrique par rapport à la droite $y=x$.

Remarque 40. — Si f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur I.

Méthode 2.4.

Pour déterminer la dérivée d'une fonction réciproque, on part du résultat

$$\forall\ x\in \mathrm{J},\quad f\circ f^{-1}(x)=x$$

que l'on dérive :

$$\forall\ x\in \mathrm{J},\quad (f^{-1})'(x)f'\circ f^{-1}(x)=1$$

ce qui permet de déduire le résultat

$$\forall\ x\in \mathrm{J},\quad (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Exemple 57. — La fonction racine est la fonction réciproque de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Retrouver sa dérivée.

Solution. La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $x\longmapsto 2x$. La dérivée s'annule en 0, donc la fonction racine n'est pas dérivable en 0.
Notons g la fonction racine. On part du résultat

$$\forall\ x>0,\quad (g(x))^2=x$$

que l'on dérive

$$\forall\ x>0,\quad g'(x)2(g(x))=1$$

et donc

$$\forall\ x>0,\quad g'(x)=\frac{1}{2g(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6) Primitives

On rappelle le théorème fondamental :

Théorème 2.10.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Les primitives des fonctions usuelles sont à connaître par coeur.

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \longmapsto a$ (constante non nulle)	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n (n \geqslant 1)$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n>1)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

On peut utiliser les formules suivantes :

Remarque 41. —

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})' \qquad \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)'$$

$$2u'u = (u^2)' \qquad u'u^n = \left(\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' \qquad u'u^\alpha = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' \ (\alpha \neq -1)$$

$$\frac{u'}{u} = (\ln|u|)' \qquad u'e^u = (e^u)' \qquad u'.(v'\circ u) = (v\circ u)'$$

Exemple 58. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer une primitive de f.

Solution. On pose $u(x) = \ln x$. Alors $f(x) = u'(x)u(x)$ et admet donc comme primitive $\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

IV. Fonctions de référence

1) Fonctions affines

Définition 40. — Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$, où a et b sont des réels fixés. a est appelé le **coefficient directeur** de f et b son **coefficient à l'origine**.

Proposition 2.11.

Sa courbe représentative est une droite.
On rappelle le tableau de signe et variations :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

- Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

2) Fonction trinômes

Définition 41. — On appelle fonction **trinôme du second degré** à coefficients réels une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$, avec a, b et c trois réels fixes et $a \neq 0$.

Proposition 2.12.

Sa courbe représentative est une parabole.
On rappelle son tableau de variations :

- Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

- Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

Proposition 2.13.

On appelle **discriminant** du trinôme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, f admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Il se factorise en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0 signe de a

- Si $\Delta = 0$, f admet une racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Il se factorise en $f(x) = a(x-x_0)^2$ et son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a 0

- Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$. Son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

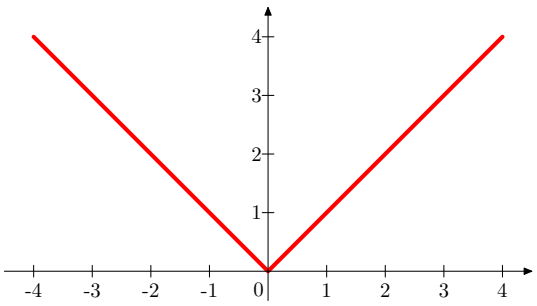
3) Fonction valeur absolue

Définition 42. — La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 59. — $|3| = 3$ et $|-4| = 4$.

Remarque 42. — Par construction, la valeur absolue est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Propriété 4. — *Soient x, y deux réels, et $n \in \mathbb{N}$.*

$$|-x| = |x| \text{ (parité)} \qquad |xy| = |x||y| \qquad |x^n| = |x|^n$$

$$\text{Si } y \neq 0, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

$$\text{Si } y > 0, \quad |x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$$

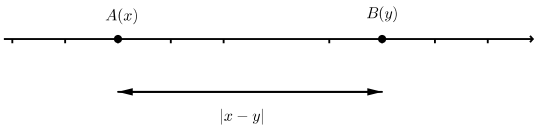
$$\text{Si } y>0, \quad |x| \geqslant y \Leftrightarrow x \leqslant -y \text{ ou } x \geqslant y$$

Théorème 2.14. Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \quad \text{et} \quad |x|-|y| \leqslant |x-y|$$

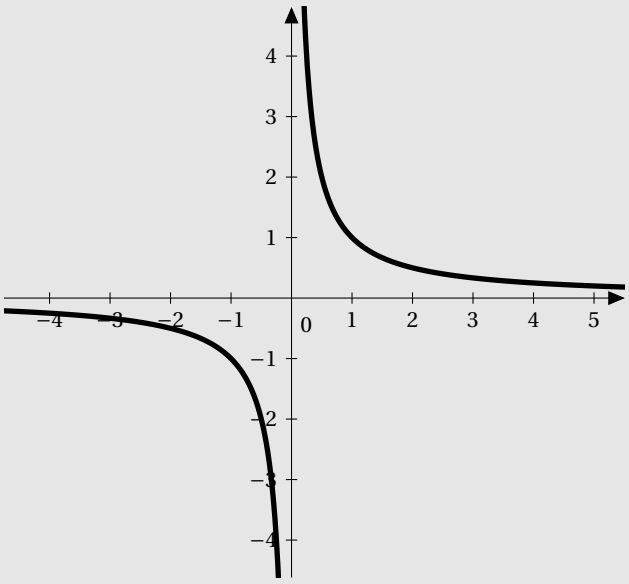
Remarque 43. — Si x et y sont des réels, $|x-y|$ représente la distance entre les points A d'abscisse x et B d'abscisse y.



Ainsi $|4-1|=3$ car la distance entre le point A(1) et le point B(4) est de 3.

4) Fonctions racine carrée et inverse

Définition 43. — La fonction **inverse** est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.



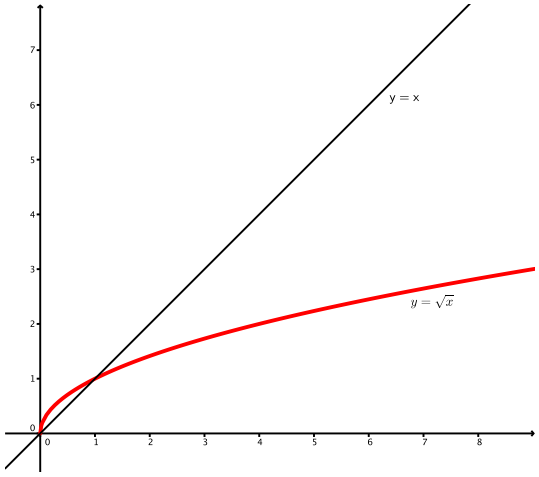
Propriété 5. —

- *La fonction inverse est impaire :* $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$.
- *Pour tout réel* $a \neq 0$, $\dfrac{1}{x}=a \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{a}$.

Définition 44. — Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique réel positif dont le carré est x :

$$\sqrt{x} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.



Propriété 6. —

- $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$.
- *Pour tous réels positifs x et y :*

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et si } y \neq 0, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

- *Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.*

Méthode 2.5.

Pour déterminer une limite avec une racine carrée, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjugué.

Exemple 60. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x$.

Solution. La limite est indéterminée. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2-1} - x = \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

La limite n'est plus indéterminée, et par quotient :

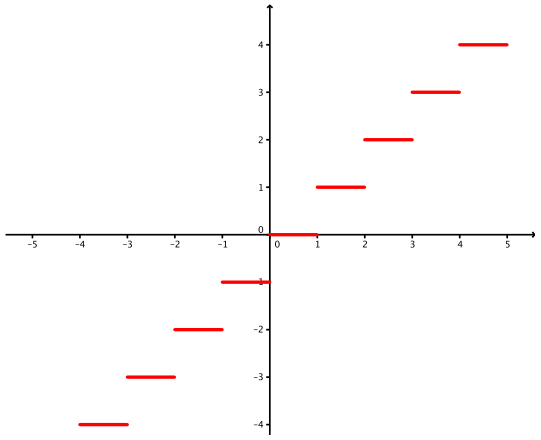
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = 0$$

5) Fonction partie entière

Définition 45. — Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière** de x, et on note $\mathrm{E}(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Remarque 44. — On utilisera en général la notation $[x]$, voire $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 61. — Ainsi, $[3,2] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-3,2] = -4$.



Propriété 7. —

- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x$ *par définition.*
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x < [x] + 1$ *aussi par définition. Ainsi,*

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x < [x] + 1$$

On a également la relation

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < [x] \leqslant x$$

- *La fonction partie entière est constante par morceaux : pour tout* $x \in [n; n+1[$ *(où* $n \in \mathbb{Z}$*),* $[x] = n$.

Définition 46. — Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière supérieure**, et on note $\lceil x \rceil$, le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x.

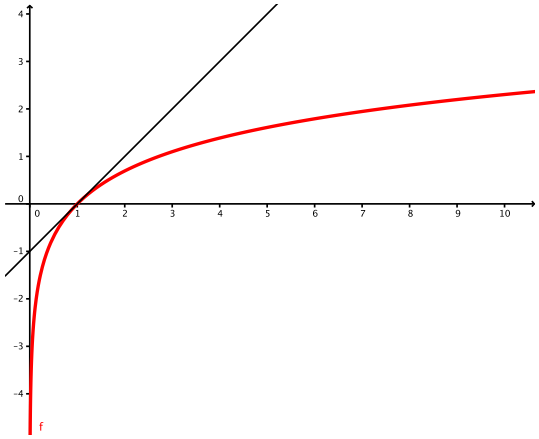
Remarque 45. — On dispose également d'une inégalité pratique : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$

V. Fonctions logarithmes, exponentielle et puissances

1) Fonction logarithme népérien

Définition 47. — La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall\, x>0,\quad \ln'(x)=\frac{1}{x}\quad \text{et}\quad \ln(1)=0$$



Proposition 2.15.

On dispose des limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.
- (croissances comparées) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$

$$\lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x)=0\quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln(x)}=+\infty$$

- (taux d'accroissement) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$.

Propriété 8. —

- *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Pour tous réels* x *et* y *de* $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)\quad \textit{et}\quad \ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln(y)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)\qquad \forall\, n\in\mathbb{Z},\quad \ln(x^n)=n\ln(x)$$

$$\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x)$$

- *Grâce à la stricte croissance de* ln, *pour tous réels* x, y *strictement positifs :*

$$\ln(x)=\ln(y)\Leftrightarrow x=y\quad \textit{et}\quad \ln(x)<\ln(y)\Leftrightarrow x<y$$

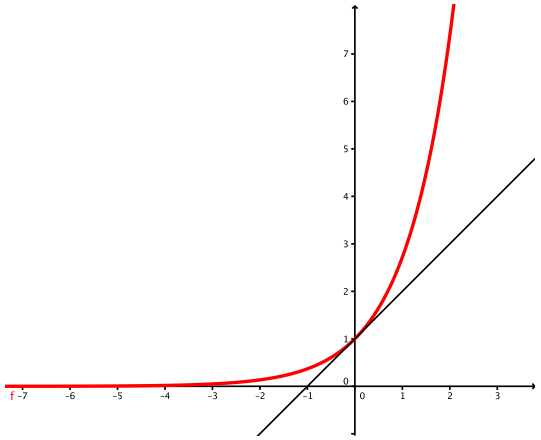
En particulier $\ln(x)=0\Leftrightarrow x=1$ *et* $\ln(x)=1\Leftrightarrow x=\mathrm{e}$ *avec* $\mathrm{e}\approx 2{,}718$.

On dispose d'autres fonctions logarithmes.

Définition 48. — Soit $a > 1$. On appelle logarithme de base a, et on note $\log_a$, la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
On a un cas particulier (important en Physique-Chimie) : le logarithme décimal, $\log_{10}$, que l'on note plus simplement log.

2) Fonction exponentielle

Définition 49. — La fonction **exponentielle**, noté exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est elle-même, et telle que $\exp(0) = 1$. On note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.



Proposition 2.16.

On dispose des limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- (croissances comparées) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$$

- (taux d'accroissement) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Propriété 9. —

- *La fonction* exp *est strictement croissante et positive sur* $\mathbb{R}$.
- *Pour tous réels* x *et* y,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \textit{et} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Ainsi,

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad (\exp(x))^n = \exp(nx)$$

De même

$$\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$$

- *Grâce à la stricte croissance de* exp*, pour tout réels x et y :*

$$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y \quad \textit{et} \quad \exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$$

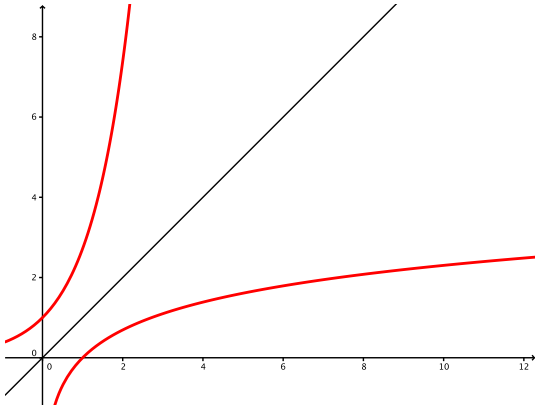
Remarque 46. — La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien :

- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, et tout réel $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

Propriété 10 (Comparaison ln, exp, $x \longmapsto x$)**.** — *Pour tout réel $x > 0$, on a*

$$\ln(x) \leqslant x \leqslant \exp(x)$$

et les courbes représentatives de exp *et* ln *sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*



On dispose, de même, d'autres fonctions exponentielles :

Définition 50. — Pour tout réel $a > 0$, on appelle exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a^x : x \longmapsto e^{x\ln(a)}$.

Remarque 47. — La fonction exponentielle est donc l'exponentielle de base e. Lorsqu'on veut étudier une fonction exponentielle de base a, on reviendra systématiquement à la définition.

Remarque 48. — L'exponentielle de base a est la bijection réciproque du logarithme de base a.

3) Fonctions puissances

Les fonctions puissances généralisent les fonctions $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition 51. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha := e^{\alpha\ln(x)}$.

Remarque 49. — Attention : l'écriture x^α n'est qu'une notation. En pratique, on repassera toujours à l'écriture $e^{\alpha \ln(x)}$.

Propriété 11. — *Les fonctions puissances possèdent les mêmes règles de calcul que les puissances entières :*

- $\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\quad \forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad (x\times y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ *et* $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$. *Ainsi,*

$$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

Démonstration. Les démonstrations sont toutes sur le même modèle. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x > 0$. Alors

$$x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)} e^{\beta\ln(x)} = x^\alpha x^\beta$$

où on utilise les propriétés de la fonction exponentielle. □

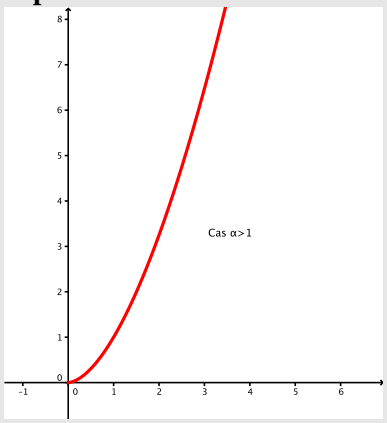
Remarque 50. — Ainsi, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$$

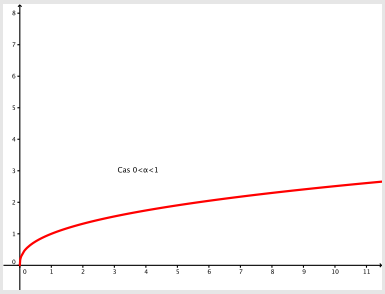
En particulier, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x > 0$. Par abus d'écriture, on confondra les deux écritures pour $x \geqslant 0$.

La représentation graphique des fonctions puissances dépend de α :

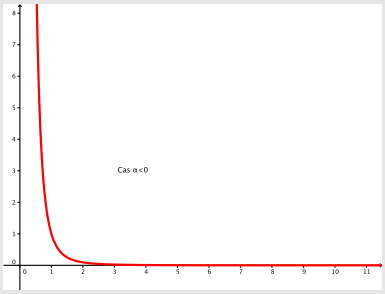
Propriété 12. —



Cas $\alpha > 1$



Cas $0 < \alpha < 1$



Cas $\alpha < 0$

Proposition 2.17.

On dispose des limites suivantes :

- Cas $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$

- Cas $\alpha < 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$$

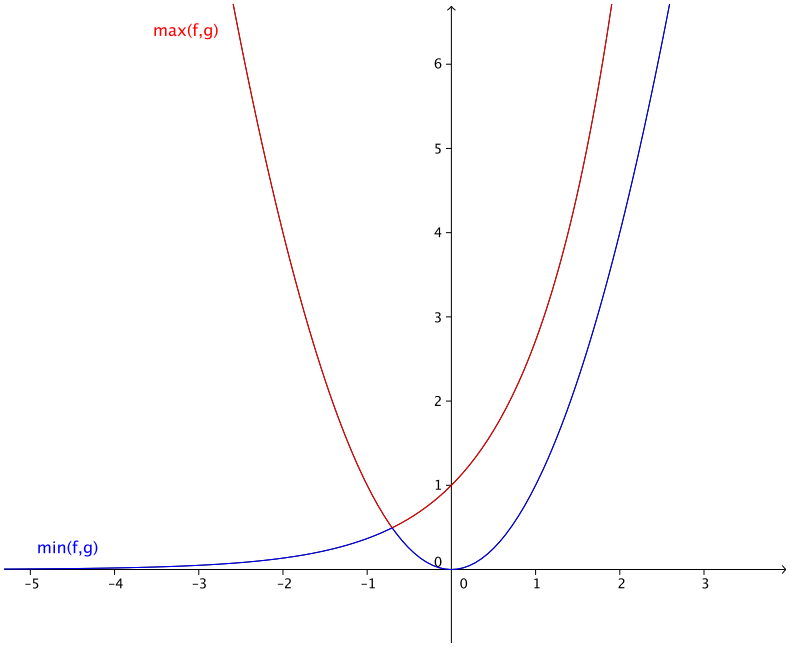
De plus, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

4) Maximum, minimum de deux fonctions

Définition 52. — Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

- On appelle **maximum** de f et g, et on note $\max(f,g)$ l'application qui à tout réel $x \in$ I associe le plus grand des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.
- On appelle **minimum** de f et g, et on note $\min(f,g)$ l'application qui à tout réel $x \in$ I associe le plus petit des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.

Exemple 62. — Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto e^x$, on obtient la figure suivante :



Théorème 2.18.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors, pour tout réel $x \in$ I :

$$\max(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \text{et} \quad \min(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

Démonstration. Si $f(x) > g(x)$ (l'autre cas est similaire), alors $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$ et donc

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))}{2} = g(x) = \min(f,g)(x)$$

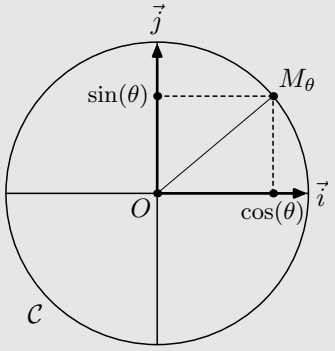
□

VI. Fonctions trigonométrique

1) Cercle trigonométrique

Rappel 3. — *On se donne un repère orienté* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. *On appelle* ***cercle trigonométrique*** *le cercle de centre* O *et de rayon* 1.

A tout réel θ, *on associe son point image* M_θ *en parcourant une distance* θ *sur le cercle à partir du point* $(1;0)$, *dans le sens trigonométrique (le sens inverse des aiguilles d'une montre) si* $\theta > 0$, *ou une distance* $-\theta$ *dans le sens inverse si* $\theta < 0$.



Les coordonnées du point M_θ *sont alors* $(\cos(\theta);\sin(\theta))$.

Réciproquement, tout point M *du cercle trigonométrique est l'image* M_θ *pour un certain réel* θ.

Remarque 51. — Puisque le cercle trigonométrique est de périmètre 2π, on en déduit que le point θ et le point $\theta+2\pi$ ont la même image M_θ sur le cercle, et ainsi $\cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$, et $\sin(\theta+2\pi) = \sin(\theta)$. Ainsi, les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Propriété 13. — *Pour tout réel* x, *on a* $\cos(-x) = \cos(x)$ *et* $\sin(-x) = -\sin(x)$. *Ainsi,* cos *est paire,* sin *est impaire.*

Solution. En effet, θ et $-\theta$ ont une image symétrique par rapport à l'axe des abscisses sur le cercle trigonométrique. Ils ont donc même abscisses, mais des ordonnées opposées.

Définition 53. — Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on définit la **tangente** de x par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Remarque 52. — tan n'est définie que si $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Propriété 14. — tan *est impaire.*

Démonstration. Pour tout réel $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

□

2) Formules

L'ensemble de ces formules et résultats sont à savoir retrouver. Les formules indiquées d'un ♡ sont à connaître par-coeur.

Proposition 2.19.

On dispose des cosinus, sinus et tangente particuliers suivants :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	0

Proposition 2.20.

Soient a et b deux réels. Alors

① ♡ $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$.

② Symétries :

$$\cos(-a)=\cos(a),\quad \sin(-a)=-\sin(a)$$
$$\cos(a+\pi)=-\cos(a),\quad \sin(a+\pi)=-\sin(a)$$
$$\cos(\pi-a)=-\cos(a),\quad \sin(\pi-a)=\sin(a)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a),\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)$$
$$\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(a),\quad \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(a)$$

③ Pour $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$:

$$\tan(-x)=-\tan(x),\quad \tan(\pi-x)=-\tan(x),\quad \tan(x+\pi)=\tan(x)$$
$$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\tan(x)}\quad\text{et}\quad \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan(x)}$$

④ ♡ Formules d'addition :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\quad\text{et}\quad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\quad\text{et}\quad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

⑤ Formule de duplication :

$$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)\quad\text{et}\quad \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

⑥ Formule de factorisation :

$$\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\qquad \cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\qquad \sin(a)-\sin(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

⑦ ♡ Tangente : pour $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

⑧ Tangente de l'angle moitié : soit $a \in]-\pi;\pi[$, et $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Alors

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration. Les formules d'addition sont admises (elles se démontrent à l'aide du produit scalaire). Pour ⑤, on utilise les formules d'addition et la relation $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$:

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1-\cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$$

et

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Pour ⑥, on utilise la définition de tan et les formules d'addition :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$

en divisant par $\cos(a)\cos(b)$ numérateur et dénominateur (non nul) :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

□

Proposition 2.21.

tan est π-périodique.

Démonstration. Pour tout réel $x \in \mathscr{D}_{\tan}$, $x+\pi \in \mathscr{D}_{\tan}$, et on a

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Ainsi, tan est π-périodique. □

3) Equations

Ces résultats se déduisent directement du cercle trigonométrique, qu'on privilégiera.

Proposition 2.22.

Soit a un réel.

- L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -a + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- L'équation $\tan(x) = \tan(a)$ équivaut à $x = a + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Exemple 63. — Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Solution. L'équation équivaut à $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ainsi, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

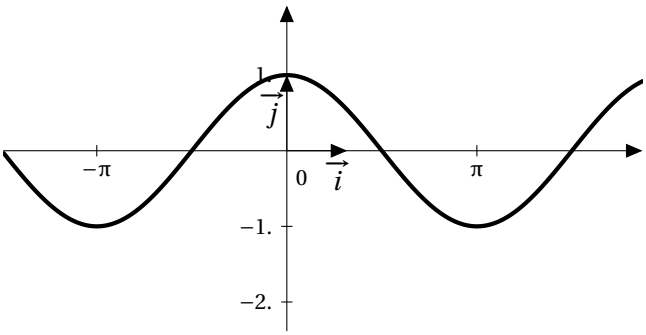
4) Fonctions trigonométriques

Proposition 2.23.

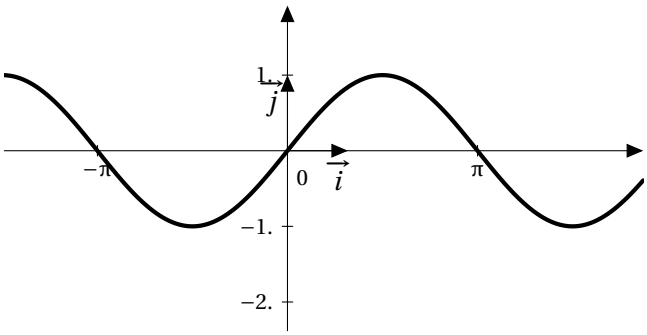
Les fonctions sinus, cosinus, et tangente sont dérivables sur leur domaine de définition, et on a :

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

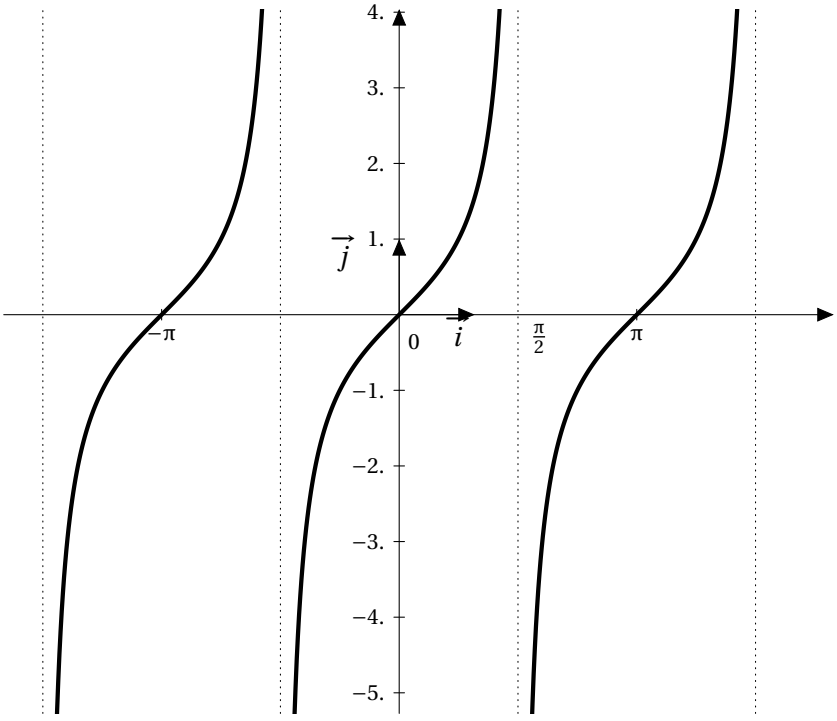
Sinus et cosinus sont 2π-périodiques, et tangente est π-périodique.



Fonction cosinus



Fonction sinus



Fonction tangente

Démonstration. On admet les dérivées de sin et cos (qui peuvent se faire en admettant les nombres dérivés en 0). Pour tan, par quotient de deux fonctions dérivables, tan est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$:

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

On peut également écrire $\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en utilisant la relation $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.
Enfin, pour la π-périodicité de tan, remarquons que pour tout réel x, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$. Par quotient, pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a donc

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

□

Proposition 2.24.

On dispose des limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$.
- (taux d'accroissement) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Démonstration. On remarque rapidement que

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos(x) = 0^+$$

Par quotient, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$.
De même,

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \sin(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos(x) = 0^+$$

Par quotient, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$. □

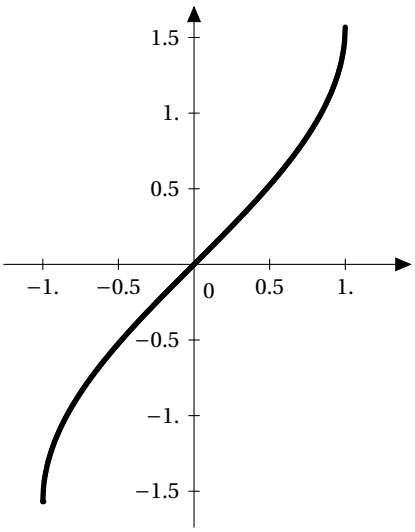
5) Fonctions trigonométriques réciproques

a) Fonction arcsin

Théorème 2.25.

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Elle établit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.

Définition 54. — On appelle **arc sinus**, et on note arcsin, la fonction réciproque de la restriction de sin sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



Propriété 15. — arcsin *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et, pour tout réel* $x \in]-1;1[$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de arcsin *admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisse* -1 *et* 1.

Démonstration. On admet que arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a (par définition de arcsin)

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

On dérive cette relation pour $x \in]-1;1[$:

$$\arcsin'(x)\sin'(\arcsin(x)) = 1 \quad \text{soit} \quad \arcsin'(x)\cos(\arcsin(x)) = 1$$

Or, pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a $\cos(\arcsin(x))^2 + \sin(\arcsin(x))^2 = 1$, soit $\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2$. Puisque $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et donc

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

On en déduit donc, pour tout réel $x \in]-1;1[$

$$\arcsin'(x)\sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

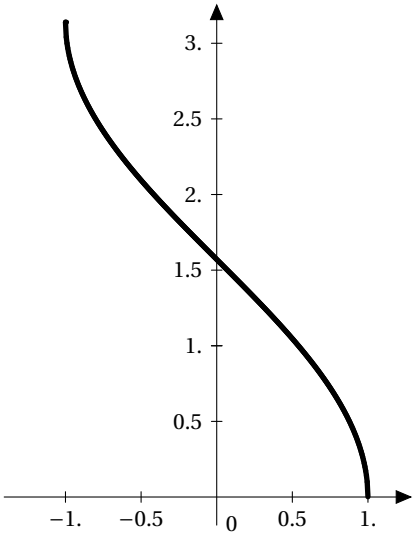
□

b) Fonction arccos

Théorème 2.26.

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$. Elle établit une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$.

Définition 55. — On appelle **arc cosinus**, et on note arccos, la fonction réciproque de la restriction de cos sur $[0;\pi]$.



Propriété 16. — arccos *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et, pour tout réel* $x \in]-1;1[$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de arccos *admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisse* -1 *et* 1.

Démonstration. On admet que arccos est dérivable sur $]-1;1[$. Pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a (par définition de arccos)

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

On dérive cette relation pour $x \in]-1;1[$:

$$\arccos'(x)\cos'(\arccos(x)) = 1 \quad \text{soit} \quad \arccos'(x)(-\sin(\arccos(x))) = 1$$

Or, pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a $\cos(\arccos(x))^2 + \sin(\arccos(x))^2 = 1$, soit $\sin(\arccos(x))^2 = 1-x^2$. Puisque $\arccos(x) \in]0;\pi[$, on a $\sin(\arccos(x)) > 0$ et donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

On en déduit donc, pour tout réel $x \in]-1;1[$

$$\arccos'(x)(-\sqrt{1-x^2}) = 1 \Leftrightarrow \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

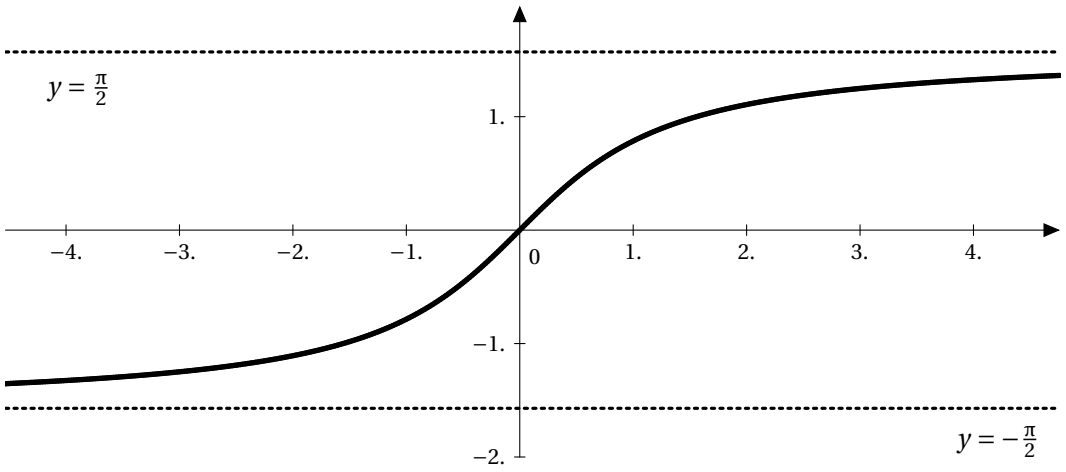
□

c) Fonction arctan

Théorème 2.27.

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Elle établit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

Définition 56. — On appelle **arc tangente**, et on note arctan, la fonction réciproque de la restriction de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.



Propriété 17. — *On a*

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$. Par définition de la fonction réciproque, on obtient bien

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Propriété 18. — arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout réel* $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. On admet que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a (par définition de arctan)

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

On dérive cette relation pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x)\tan'(\arctan(x)) = 1 \quad \text{soit} \quad \arctan'(x)(1+\tan^2(\arctan(x))) = 1$$

et donc, puisque $\tan^2(\arctan(x)) = x^2$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

□

VII. Fonctions hyperboliques

1) Définitions

Définition 57. — On définit les trois fonctions suivantes :

- la fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch, définie pour tout réel x par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- la fonction **sinus hyperbolique**, notée sh, définie pour tout réel x par

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- la fonction **tangente hyperbolique**, notée th, définie pour tout réel x par

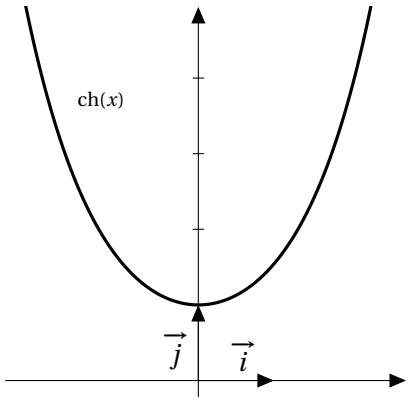
$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2) Fonctions hyperboliques

Proposition 2.28.

La fonction cosinus hyperbolique est paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\text{ch}' = \text{sh}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}(x)$		$+$	
$\text{ch}(x)$		1	



Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{ch}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty$

Démonstration. Remarquons que, pour tout réel x,

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x)$$

Ainsi, ch est paire.
Par définition, ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

Remarquons alors que $e^x - e^{-x} \geqslant 0$ si et seulement si $e^x \geqslant e^{-x}$ soit, par stricte croissance de l'exponentielle $x \geqslant -x$ et donc $x \geqslant 0$. On en déduit donc le tableau de signe de $\text{ch}'(x)$:

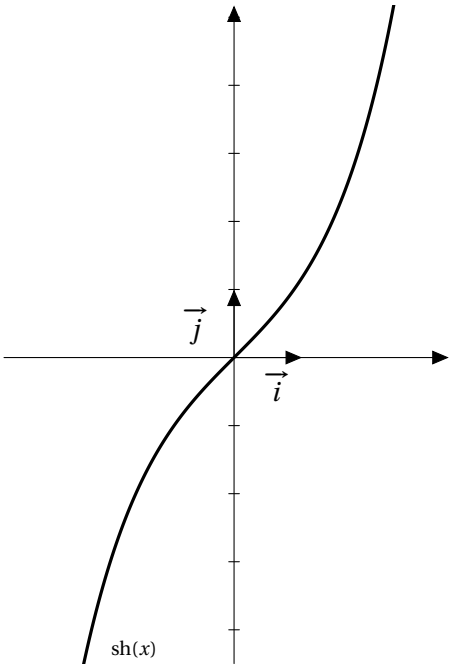
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque 1 est son minimum, on en déduit que ch est strictement positive. Enfin, les limites se déduisent par somme. □

Proposition 2.29.

La fonction sinus hyperbolique est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{sh}(x)$		↗	0	↗	



Enfin,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$$

et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Solution. Remarquons que, pour tout réel x :

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

Ainsi, sh est impaire.
Par définition, sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

On vient de voir que ch est strictement positive donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites se déduisent par somme.
Enfin, pour tout réel x :

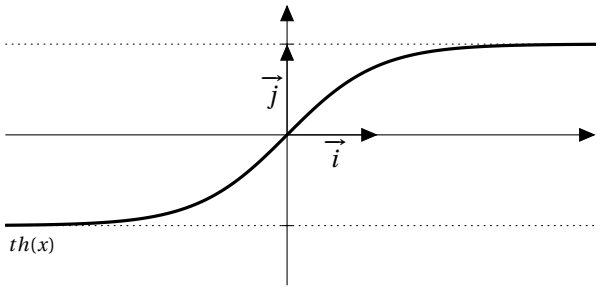
$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{2x}} + 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \cancel{\mathrm{e}^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{\mathrm{e}^{2x}} - 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \cancel{\mathrm{e}^{-2x}}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Proposition 2.30.

La fonction tangente hyperbolique est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{th}(x)$		$-$	0	$+$	
$\text{th}(x)$	-1	↗	0	↗	1



Enfin,

$$\lim_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$$

Solution. En utilisant la parité de ch et l'imparité de sh, on remarque que pour tout réel x,

$$\text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\text{th}(x)$$

Ainsi, th est impaire.
Par définition, th est bien définie (car $\text{ch}(x) > 0$ pour tout réel x) et est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables. On a alors, pour tout réel x

$$\begin{aligned} \text{th}'(x) &= \frac{\text{sh}'(x)\,\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\,\text{ch}'(x)}{(\text{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} \\ &= \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \end{aligned}$$

On remarque également que $\dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)$.
Puisque $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} > 0$, on en déduit que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\text{th}(0) = 0$, on obtient que th est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin, pour limite, il suffit de factoriser :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = -1$$

VIII. Plan d'étude d'une fonction

1) Méthode générale

Méthode 2.6.

Pour étudier une fonction, on effectue les étapes suivantes :

① On détermine le domaine de définition de la fonction f.
② On détermine les symétries éventuelles (parité, périodicité) afin de réduire l'intervalle d'étude.
③ On détermine les limites et asymptotes.
④ On détermine la dérivée (si elle existe) et on étudie son signe.
⑤ On dresse son tableau de variations complet, pour en déduire les extrema éventuels.
⑥ On trace la courbe représentative de la fonction.

2) Exemple

Exemple 64. — Etudier et construire la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x^2 e^{-x^2}$.

Solution. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que, pour tout réel x :

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire. Il suffit donc d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ puis de conclure par parité.

Pour les limites, constatons (en posant $X = x^2$)

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Par parité, on en déduit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions usuelles), et on a, pour tout réel x

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) \\ &= 2xe^{-x^2}\left(1 - x^2\right) \\ &= 2xe^{-x^2}(1-x)(1+x) \end{aligned}$$

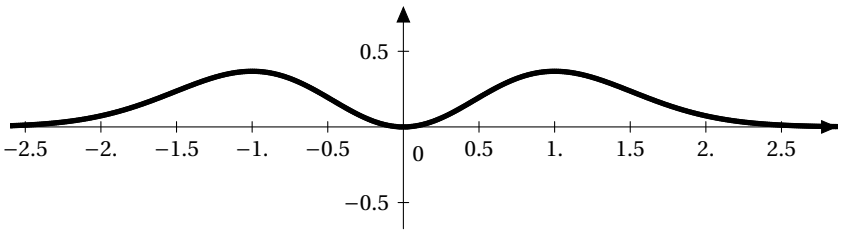
On obtient ainsi le tableau de signe de f' suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

et la courbe représentative suivante :



fFileExiststex/Chap2/Exo2

Exercices

Généralités

Exercice 33. — Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : x^4 + x^2 - 2 = 0$
2. $(E_2) : \exp(2x) + \exp(x) - 6 = 0$
3. $(E_3) : \ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 = 0.$
4. $(E_4) : x = \sqrt{x} + 2$
5. $(E_5) : e^x + e^{-x} = 2$

Solution.

Méthode 2.7.

Dans le cas d'équation proche d'une équation du second degré, on change de variable inconnue pour se ramener à une équation de ce type.

1. On pose $X = x^2$. (E_1) s'écrit alors $X^2 + X - 2 = 0$.
   Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times -2 = 9$, et le trinôme possède donc deux solutions : $X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
   On revient à l'inconnue de départ. Nous avons donc $X = 1$ soit $x^2 = 1$, ce qui nous donne finalement deux solutions : $x = 1$ ou $x = -1$:
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1\}}$$
2. (E_2) s'écrit également $(e^x)^2 + e^x - 6 = 0$. On pose $X = e^x$. (E_2) devient alors $X^2 + X - 6 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions, qui sont -3 et 2.
   On revient à l'inconnue de départ : nous avons donc $e^x = -3$, ce qui est impossible, ou $e^x = 2$ soit $x = \ln(2)$. Ainsi :
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{\ln(2)\}}$$
3. On pose $X = \ln(x)$. (E_3) devient $X^2 + 2X - 3 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -3 et 1.
   On revient à l'inconnue de départ : on a donc $\ln(x) = -3$, soit $x = e^{-3}$, ou $\ln(x) = 1$, soit $x = e$. Ainsi :
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{e^{-3}; e\}}$$
4. On constate que (E_4) s'écrit $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0$. On pose alors $X = \sqrt{x}$. (E_4) s'écrit alors $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -1 et 2.
   On revient à l'inconnue de départ : $\sqrt{x} = -1$, ce qui est impossible, ou $\sqrt{x} = 2$, c'est-à-dire $x = 4$. Ainsi
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$$
5. (E_5) s'écrit également $(e^x)^2 + 1 - 2e^x = 0$ en multipliant par $e^x \neq 0$. On pose alors $X = e^x$. (E_5) s'écrit alors $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui possède une unique solution : 1.
   On revient à l'inconnue de départ : $e^x = 1$, c'est-à-dire $x = 0$. Ainsi
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$$

Exercice 34. — Résoudre les inégalités suivantes :

1. $(2x+1)(3x-1) > 0$
2. $\dfrac{4x+3}{2x+1} \geqslant 0$
3. $\dfrac{1-2x}{x+1} > 0$
4. $5x^2 - 10x + 4 \leqslant 0$
5. $\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7)$
6. $2x^3 + 2x \leqslant -2x$
7. $2^x \geqslant 3^{x-1}$

Solution.

Méthode 2.8.

Dans la plupart des cas, pour déterminer le signe d'une expression, on essaie de factoriser au maximum puis de faire un tableau de signe.

1. On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

2. On dresse le tableau de signe, en oubliant pas les doubles barres en cas de non-définition.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$		$-$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x+3}{2x+1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3. On dresse le tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-2x}{x+1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-1; \frac{1}{2}\right[$$

4. Pour les trinômes du second degré, on dispose d'un théorème. Le discriminant ici vaut $\Delta = 20$, donc le trinôme dispose de deux racines : $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{20}}{10}$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{20}}{10}$. Ainsi, puisque $5 > 0$, on dispose du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2	
$5x^2-10x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi

$$\mathscr{S} = [x_1; x_2]$$

5. L'équation n'a de sens que si $2x+1>0$ et $x+7>0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$ et $x > -7$. On se place donc sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Par stricte croissance de la fonction logarithme :

$$\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7) \Leftrightarrow 2x+1 \leqslant x+7 \Leftrightarrow x \leqslant 6$$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{1}{2}; 6\right]$$

6. On a

$$2x^3+2x \leqslant -2x \Leftrightarrow 2x^3+4x \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+2) \leqslant 0$$

$x^2+2>0$ pour tout réel x, donc ce produit est du signe de $2x$. Ainsi

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}^-$$

7. Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln(2)} \geqslant \mathrm{e}^{(x-1)\ln(3)}$$

et par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow x\ln(2) \geqslant (x-1)\ln(3)$$

soit

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow x(\ln(2)-\ln(3)) \geqslant -\ln(3) \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-\ln(3)}{\ln(2)-\ln(3)} = \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)} \text{ car } \ln(2)-\ln(3)<0$$

Ainsi

$$\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)}\right]$$

Exercice 35. — Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+5x+6} \qquad g : x \longmapsto \ln\left(2x^2+2x-12\right)$$

Solution.

Méthode 2.9.

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, on détermine toutes les conditions d'existence (racine, dénominateur, logarithme,...). On conclut ensuite.

Pour la fonction f, nous avons deux conditions :

- $\sqrt{2x+1}$ n'est défini que si $2x+1>0$ soit $x>-\frac{1}{2}$.
- Le quotient n'a un sens que si $x^2+5x+6\neq 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta=1$. Ce trinôme possède donc deux racines : $x_1=\frac{-5-1}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-5+1}{2}=-2$. Il faut donc également que $x\neq -2$ et $x\neq -3$.

Bilan : la fonction f est donc définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Pour la fonction g, celle-ci n'est définie que si $2x^2+2x-12>0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta=100$. Le trinôme possède donc deux racines, $x_1=\frac{-2-10}{4}=-3$ et $x_2=\frac{-2+10}{4}=2$. Ainsi, nous avons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		2	
$2x^2+2x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi,

$$\mathscr{D}_g=]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$$

Exercice 36. — Déterminer la parité des fonctions suivantes :

$$f:x\longmapsto\frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1}\qquad g:x\longmapsto\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\qquad h:x\longmapsto x(x^2+2)^3(\mathrm{e}^{x^2+1}+3)$$

Solution.

> **Remarque.** — On détermine d'abord le domaine de définition, avant de déterminer sa parité.

1. Puisque, pour tout réel x, $x^2+1>0$ et $x^4+1>0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout réel x,

$$f(-x)=\frac{\ln((-x)^2+1)}{(-x)^4+1}=\frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1}=f(x)$$

   Ainsi, la fonction f est paire.

2. g n'est définie que si le quotient est strictement positif. Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

   Ainsi, g est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$$g(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=\ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-g(x)$$

   Ainsi, g est une fonction impaire.

3. La fonction h est clairement définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(-x) = (-x)((-x)^2+2)^3(\mathrm{e}^{(-x)^2+1}+3) = -x(x^2+2)^3(\mathrm{e}^{x^2+1}+3) = -h(x)$$

Ainsi, h est impaire.

Exercice 37. — Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout entier x par $f(x) = (-1)^x$. Déterminer l'image de la fonction f, $f(\mathbb{Z})$. Déterminer l'image réciproque par f de $\{1\}$.

Solution. Par définition, f prend deux valeurs : 1 et -1. Donc

$$f(\mathbb{Z}) = \{-1;1\}$$

Enfin, l'image réciproque de 1 est composé de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ ayant pour image 1, c'est-à-dire les nombres pairs. Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbb{Z}$.

Exercice 38. — Soit (E) : $mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ où x et m sont des réels.

1. Soit m fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue x.
2. Soit x fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue m.

Solution.

1. Pour m fixé **non nul**, il faut donc résoudre l'équation du second degré $mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ d'inconnue x. Son discriminant vaut

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4m(-2) = 4m^2 - 4m + 1 + 8m = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$$

L'équation possède donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(2m-1)-(2m+1)}{2m} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(2m-1)+(2m+1)}{2m} = \frac{1}{m}$$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left\{-2; \frac{1}{m}\right\}$$

Si $m = 0$ l'équation devient $-x - 2 = 0$ qui admet -2 comme unique solution.

Bilan : si $m \neq 0$, alors $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-2; \frac{1}{m}\right\}}$, et si $m = 0$, $\boxed{\mathscr{S} = \{-2\}}$.

2. Pour x fixé, c'est une équation du premier degré en m. Ainsi

$$\text{(E)} \iff m(x^2+2x) = 2 + x$$

Soit $m(x(x+2)) = x+2$. Si $x \neq 0$ et $x \neq -2$ alors, on dispose d'une unique solution :

$$\frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x}$$

Si $x = 0$, l'équation (E) devient $-2 = 0$ ce qui est absurde, donc l'équation n'admet aucune solution.

Si $x=2$, l'équation (E) devient $4m+4m-2-2=0$, soit $m=\frac{1}{2}$
Bilan : si $x=0$, l'équation n'admet aucune solution. Sinon,

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{x}\right\}}$$

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Exercice 39. — Déterminer

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \arctan(\sqrt{3})$$

Solution. arcsin est à valeur dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi,

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, et que $\frac{\pi}{4}\in[0;\pi]$, on en déduit que $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.
Enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ et donc $\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$.

Exercice 40 (ATS 2008)**.** —

1. Montrer que pour tout entier naturel k,
$$\arctan(k+1)-\arctan(k)=\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$
2. En déduire la valeur de la somme
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution. 1. Remarquons que, puisque $k\geqslant 0$, on a

$$\arctan(k+1)-\arctan(k)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On a alors

$$\tan(\arctan(k+1)-\arctan(k))=\frac{\tan(\arctan(k+1))-\tan(\arctan(k))}{1+\tan(\arctan(k))\tan(\arctan(k+1))}=\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}=\frac{1}{1+k+k^2}$$

et donc

$$\tan(\arctan(k+1)-\arctan(k))=\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)\right)$$

Ainsi

$$\arctan(k+1)-\arctan(k)=\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)+p\pi \text{ avec } p\in\mathbb{Z}$$

Puisque $\arctan(k+1)-\arctan(k) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $p=0$ et donc

$$\arctan(k+1)-\arctan(k)=\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

2. Mais alors, d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1)-\arctan(k) \\ &= \arctan(n+1)-\arctan(0) \quad \text{par télescopage} \\ &= \arctan(n+1) \end{aligned}$$

3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(n+1)=\frac{\pi}{2}$, d'après le résultat précédent

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{\pi}{2}}$$

Études de fonctions

Exercice 41. — Etudier et représenter les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$$

Solution. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables (exp) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1}=0 \quad \text{par quotient} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}}=1 \quad \text{par quotient}$$

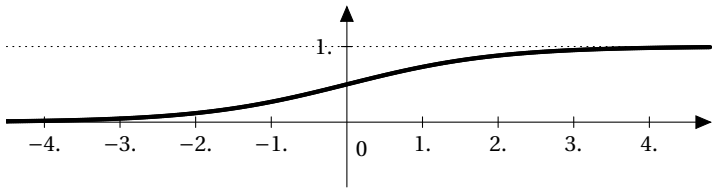
La courbe de f admet donc deux asymptotes horizontales, une d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$, et une d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variations suivante :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	1

et la courbe représentative suivante :



$g : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ et de l'exponentielle.
Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$. Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

De même, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Par quotient,

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)(1)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

et par composée :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}} \end{aligned}$$

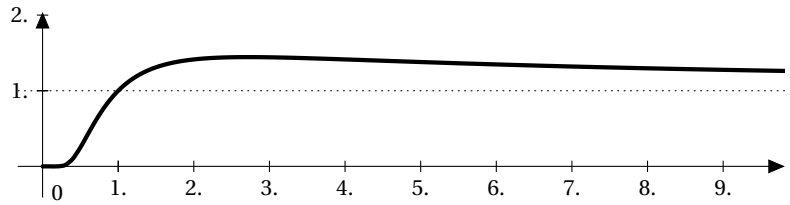
Puisque pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}} > 0$, g' est du signe de $\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$, donc de $1-\ln(x)$. Or

$$\begin{aligned} 1-\ln(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 > \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e} > x \quad \text{par stricte croissance de ln} \end{aligned}$$

avec $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Ainsi, on dispose du tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	↘	1

et de la courbe représentative suivante :



Exercice 42. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + x$.

1. Etudier f sur $[-\pi;\pi]$.
2. Montrer que la courbe de f est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\pi\\2\pi\end{pmatrix}$ (on montrera pour cela que pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi$).
3. Représenter f sur $[-2\pi;4\pi]$.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution.

1. $[-\pi;\pi]$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel $x \in [-\pi;\pi]$, on a

$$f(-x) = 2\sin(-x) - x = -2\sin(x) - x = -(2\sin(x) + x) = -f(x)$$

f est donc impaire. Etudions f sur $[0;\pi]$. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a pour tout $x \in [0;\pi]$

$$f'(x) = 2\cos(x) + 1$$

On a alors, sur $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2\cos(x) + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x) > -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right[\end{aligned}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$	↘	π

et par imparité :

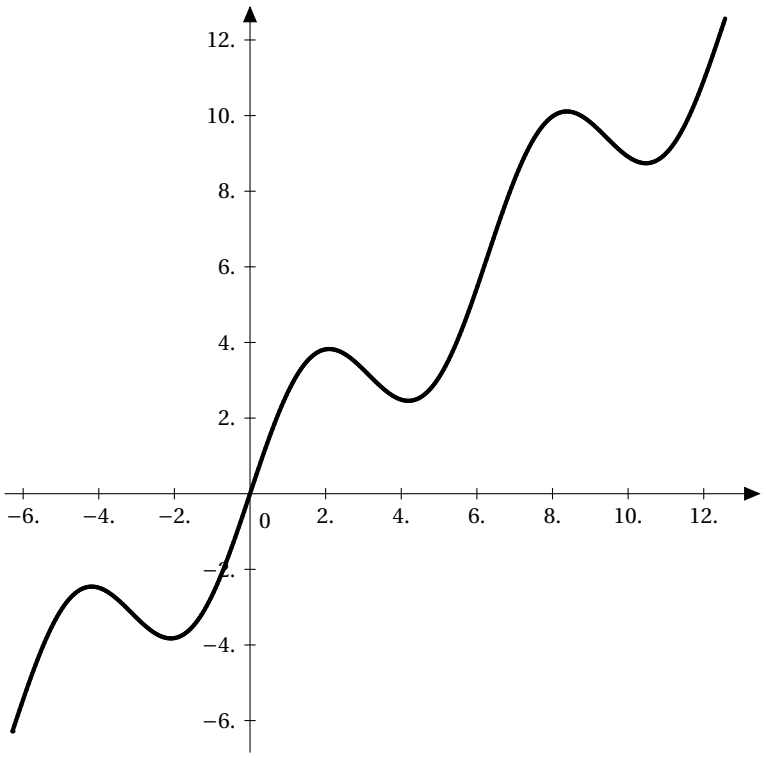
x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\pi$	↘	$-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$	↗	0	↗	$\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$	↘	π

2. Pour tout réel x, on a

$$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + x + 2\pi = 2\sin(x) + x + 2\pi = f(x) + 2\pi$$

Ainsi, la courbe de f est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$.

3. En utilisant le tableau de variations sur $[-\pi;\pi]$, puis par translation, on obtient la courbe suivante sur $[-2\pi;4\pi]$.



4. Pour tout réel x, on a

$$-2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2 \quad \text{et donc} \quad -2 + x \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2 + x$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -2 + x = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2 + x = -\infty$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 43. — Montrer que pour tout réel $x \in [-1;1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$

Solution.

Méthode 2.10.

Lorsqu'on veut démontrer une égalité valable sur un certain intervalle, une méthode peut être d'étudier une fonction.

Exercice 44. — Etudier la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arccos(\cos(x))$.

Solution. f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par parité et 2π-périodicité de cos, f est également paire et 2π-périodique. Il suffit donc d'étudier f sur $[0;\pi]$.
f est dérivable sur $]0;\pi[$ (puisque arccos n'est pas dérivable en 1 et -1) et on a, pour tout $x \in]0;\pi[$:

$$f'(x) = (-\sin(x))\frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(x))^2}} = \sin(x)\frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}$$

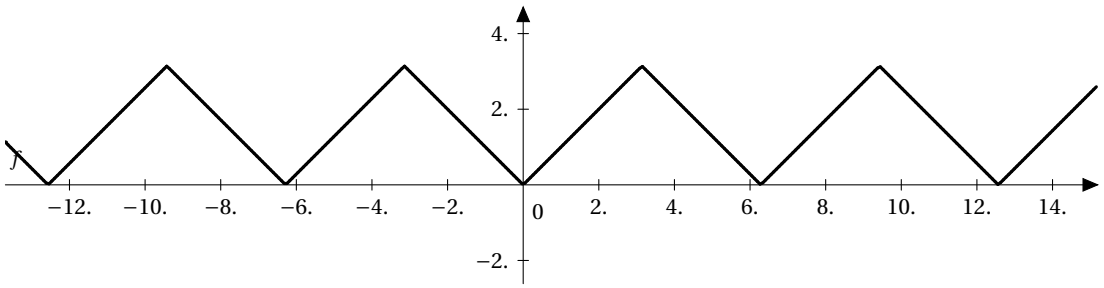
Or, sur $]0;\pi[$, $\sin(x) > 0$ donc $\sqrt{\sin^2(x)} = \sin(x)$. Ainsi

$$f'(x) = 1$$

f est donc une fonction affine sur $[0;\pi]$. En utilisant $f(0)$ et $f(\pi)$, on a alors

$$\forall\, x \in [0;\pi], \quad f(x) = x$$

En utilisant les résultats précédents, on obtient la courbe représentative suivante :

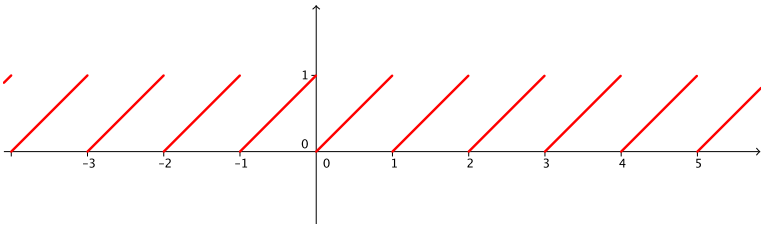


Exercice 45. — Soit $f : x \longmapsto x - [x]$. Etudier la monotonie de f. Que représente $f(x)$ pour un réel x? Représenter f.

Solution. La fonction n'est ni croissante, ni décroissante. En effet :

$$f(0) = 0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad f(1) = 0$$

Donc $f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$.
Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ représente la partie décimale d'un nombre. Ainsi, pour tout entier k, la fonction est croissante sur $[k; k+1[$, $f(k) = 0$. Cela donne la courbe représentative suivante :



CHAPITRE 3

NOMBRES COMPLEXES

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de revoir et d'approfondir la notion de nombres complexes, utiles en mathématiques, mais également en physique.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① maîtriser la notion de conjugué pour mettre un quotient sous forme algébrique ..... □

② maîtriser la notion de module, ainsi que les différentes propriétés ..... □

③ connaître la notion d'exponentielle complexe :

- savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle ..... □
- savoir utiliser les propriétés de la forme exponentielle ..... □

④ connaître la notion d'argument ..... □

⑤ savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes ..... □

⑥ connaître l'ensemble $\mathbb{U}$ et savoir les représenter graphiquement ..... □

⑦ connaître et maîtriser les liens entre trigonométrie et complexes ..... □

⑧ connaître la méthode de l'angle moitié pour simplifier une expression du type $1+e^{i\theta}$ ..... □

⑨ connaître les formules de Moivre et d'Euler. ..... □

⑩ savoir déterminer alignements et colinéarité. ..... □

⑪ savoir déterminer la racine d'un nombre complexe. ..... □

⑫ connaître translation, rotation, homothétie et symétrie par rapport à l'axe des abscisses. ..... □

I. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1) Construction de $\mathbb{C}$

Définition 58. — On appelle **nombre complexe** z la donnée d'un couple (x, y) de nombres réels, que l'on note $z = x + iy$, avec $i^2 = -1$. Cette forme est appelée **forme algébrique**.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarque 54. — Ainsi, $\mathbb{C} = \{x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

En partant de résultat de Jérôme Cardan (1545) sur les équations de degré 3, Raffaelle Bombelli (1572) introduit $\sqrt{-121}$ pour simplifier des calculs. Il est ainsi le premier à utiliser les nombres complexes. Il a introduit également les premières règles (calculs, module, conjugué). Leonhard Euler, en 1777, propose l'utilisation de i pour $\sqrt{-1}$, du latin "imaginarius", et Karl Friedrich Gauss, en 1831, propose de les appeler les **nombres complexes**.

Définition 59. — Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x, y \in \mathbb{R}^2$.

- le nombre x est appelé **partie réelle** de z, et est noté $x = \Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$.
- le nombre y est appelé **partie imaginaire** de z, et est noté $y = \Im(z)$ ou $\mathrm{Im}(z)$.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

⚠ La partie imagine d'un nombre complexe est toujours réelle. Ainsi, $\mathrm{Im}(2 + 3i) = 3$.

Remarque 55. — Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}^2$.

- z est réel si et seulement si $\Im(z) = 0$.
- si $\Re(z) = 0$, z s'écrit iy, et est dit **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

2) Structures algébriques de $\mathbb{C}$.

L'idée est d'étendre les notions d'addition et multiplication connues sur $\mathbb{R}$.

Définition 60. — Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes (avec x, x', y, y' des réels).

- On note $z + z'$ par $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
- On note $zz' = (x \times x' - y \times y') + i(x \times y' + x' \times y)$.

Remarque 56. — Ainsi, on a les relations suivantes :

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') \quad \text{et} \quad \Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$$

Propriété 19. — *$\mathbb{C}$, muni de l'addition, vérifie les propriétés suivantes (avec z, z', z'' des nombres complexes) :*

- *Associativité de $+$:* $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$
- *0 est le neutre de l'addition :* $0 + z = z + 0 = z$.

- *+ est commutative :* $z+z'=z'+z$.
- *opposé : tout nombre complexe z admet un opposé $z'=-z$, vérifiant $z+z'=z'+z=0$.*

Cela fait de $(\mathbb{C},+)$ *un* ***groupe commutatif****.*

Démonstration. On utilise la définition de l'addition et les propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$ pour démontrer toutes les propriétés. Par exemple, si $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (avec x,x',y,y' des réels), alors

$$z+z'=(x+x')+i(y+y') \quad \text{et} \quad z'+z=(x'+x)+i(y'+y)=z+z'$$

□

Propriété 20. — $\mathbb{C}$*, muni de l'addition et de la multiplication, vérifie les propriétés suivantes :*

- *Associativité de* $\times$ *:* $(z\cdot z')\cdot z''=z\cdot(z'\cdot z'')$.
- 1 *est le neutre de la multiplication :* $1\cdot z=z\cdot 1=z$
- $\times$ *est commutative :* $z\cdot z'=z'\cdot z$.
- $\times$ *est distributive sur* $+$ *:* $z\cdot(z'+z'')=z\cdot z'+z\cdot z''$.

Cela fait de $(\mathbb{C},+,\times)$ *un* ***anneau****.*

Démonstration. On utilise la définition de l'addition, de la multiplication et les propriétés de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{R}$ pour démontrer toutes les propriétés. Par exemple, si $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (avec x,x',y,y' des réels), alors

$$z\cdot z'=(x\cdot x'-y\cdot y')+i(x\cdot y'+y\cdot x') \quad \text{et} \quad z'\cdot z=(x'\cdot x-y'\cdot y)+i(y'\cdot x+x'\cdot y)=z\cdot z'$$

□

Théorème 3.1.

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire $z\neq 0$). On note $z=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$z\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)=1$$

Le nombre complexe $\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$ est l'inverse de z, et est noté $\frac{1}{z}$.

Démonstration. Soit $z=x+iy$ ($x,y\in\mathbb{R}^2$ avec $z\neq 0$). On note $z'=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$. Alors

$$z\cdot z'=(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\left(x\frac{x}{x^2+y^2}-y\times\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+i\left(x\frac{-y}{x^2+y^2}+y\frac{x}{x^2+y^2}\right)=1$$

□

Remarque 57. — Avec cette dernière propriété, on dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ forme un **corps commutatif**.

Propriété 21 (Identités remarquables)**.** — *On dispose de quatre identités remarquables dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1\cdot z_2+z_2^2, \qquad (z_1-z_2)^2=z_1^2-2z_1\cdot z_2+z_2^2$$

$$z_1^2-z_2^2=(z_1-z_2)(z_1+z_2), \qquad z_1^2+z_2^2=(z_1-iz_2)(z_1+iz_2)$$

Démonstration. Seule la dernière est nouvelle. On a en effet

$$(z_1 - iz_2)(z_1 + iz_2) = z_1^2 - (iz_2)^2 = z_1^2 + z_2^2$$

□

Exercice 46. — Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$(2+3i)(1-2i), \quad (2+i)^2, \quad (-i)^{81}$$

Déterminer l'inverse de $1-i$, $-3+2i$.

Méthode 3.1.

Pour calculer i^n on utilise les propriétés suivantes :

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i \quad \text{et} \quad i^4 = 1$$

Solution. En utilisant les propriétés vues précédemment :

$$(2+3i)(1-2i) = 2-4i+3i-6i^2 = 2-i+6 = 8-i$$

$$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$$

$$(-i)^{81} = (-1)^{81} i^{81} = -i^{80} i = -(-1)^{40} i = -i$$

Méthode 3.2.

Pour calculer l'inverse d'un nombre complexe $x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}^2$), on peut appliquer la formule, ou multiplier numérateur et dénominateur par $x-iy$, pour utiliser l'identité remarquable.

Solution. On a

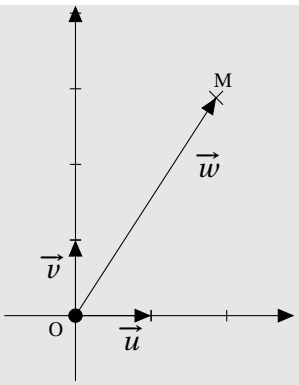
$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2-i^2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{-3+2i} = \frac{-3-2i}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-3-2i}{9+4} = -\frac{3}{13} - i\frac{2}{13}$$

3) Nombres complexes et géométrie

On a défini un nombre complexe z par la donnée d'un couple (x, y) de deux réels, qui peut autant représenter un point qu'un vecteur de plan.

Définition 61. — On se place dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.



- A tout point M$(x;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x+iy$. Le point M est dit d'**affixe** z, que l'on note M(z). Le point M est appelé l'**image** du nombre complexe z.
- De même, à tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe le nombre complexe $z = x+iy$. Le vecteur $\vec{w}$ est dit d'**affixe** z, que l'on note $\vec{w}(z)$.

Lorsqu'on manipule des affixe, on appelle le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le **plan complexe**.

Les propriétés géométriques du plan se transposent aisément aux affixes.

Propriété 22. — *Soient* A *et* B *deux points du plan* $(O, \vec{u}, \vec{v})$*, d'affixes respectives* z_A *et* z_B.
- *le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *a pour affixe* $z_B - z_A$.
- *le milieu du segment* [AB] *a pour affixe* $\frac{z_A+z_B}{2}$.
- *l'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme des affixes.*
- *si* $\vec{w}$ *a pour affixe* z*,* $k\cdot\vec{w}$ *a pour affixe* $k\cdot z$.
- *Si* C *est un point d'affixe* z_C *alors l'affixe du centre de gravité* G *est donné par* $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$.

Démonstration. On utilise les formules connues du plan, en notant A$(x_A;y_A)$ et B$(x_B;y_B)$.

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnée $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc pour affixe
$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$
- le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, et donc pour affixe
$$\frac{x_A+x_B}{2} + i\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{x_A+iy_A+x_B+iy_B}{2} = \frac{z_A+z_B}{2}$$
- Les autres relations se font de même. Pour le centre de gravité, on rappelle que G est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

□

Remarque 58. — On verra plus tard d'autres formules liant géométrie plane et nombres complexes : la formule de la distance, et de la mesure d'un angle orienté.

II. Conjugué d'un nombre complexe

1) Définitions et propriétés

Définition 62. — Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$ le nombre $\overline{z} = x - iy$.

Propriété 23. — *Soient z et z' deux nombres complexes. On a*

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
- *Si* $z' \neq 0$, $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
- $z\overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$.

Remarque 59. — On dit que l'opérateur de conjugaison est **compatible** avec les opérations usuelles.

Démonstration. (♡) Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (avec x, y, x', y' des réels). On a ainsi $\overline{z} = x - iy$ et $\overline{z'} = x' - iy'$. Alors

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \quad \text{et} \quad \overline{z+z'} = (x + x') - i(y + y') = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}$$

On a également

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \quad \text{et} \quad \overline{z \cdot z'} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$$

d'autre part

$$\overline{z} \cdot \overline{z'} = (x - iy) \cdot (x' - iy') = (xx' + (-y)(-y')) + i(x(-y') + x'(-y)) = (xx' + yy') - i(xy' + x'y) = \overline{z \cdot z'}$$

Le quotient se fait de même. Enfin,

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$$

□

Propriété 24. — *Soit z un nombre complexe. Alors*

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \textit{et} \quad \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Solution. (♡) En effet, si on note $z = x + iy$ avec x, y deux réels, on a

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$$

2) Application aux quotients

On utilisera le nombre conjugué pour déterminer la forme algébrique d'un quotient.

Méthode 3.3.

Soient z et z' deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$. Pour déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$, on utilise le résultat

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$$

et on constate que $z'\overline{z'} \in \mathbb{R}$.

Exemple 65. — Déterminer la forme algébrique de $\frac{1+2i}{1-i}$ et $\frac{1}{i}$.

Solution. On utilise la méthode précédente :

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i+2i^2}{1^2+1^2} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i\cdot(-i)} = -i$$

Exercice 47. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2iz+2 = -3z$.

Solution. On obtient $z(2i+3) = -2$, soit

$$z = \frac{-2}{2i+3} = \frac{-2(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{-6+4i}{3^2+2^2} = \frac{-6}{13} + \frac{4}{13}i$$

III. Forme exponentielle

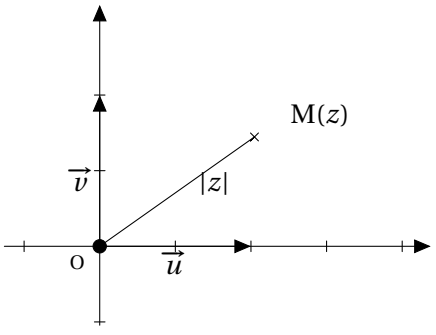
1) Module

Définition 63. — Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le réel positif

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

Remarque 60. — Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z est égale à sa valeur absolue. Cela explique ainsi la notation du module.

Remarque 61. — Géométriquement, en notant M le point d'affixe z dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors $|z|$ représente la distance à l'origine OM.



Propriété 25. — *Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = |z|^2$.*

Démonstration. On a vu précédemment que $z\overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$, donc $z\overline{z} = |z|^2$ □

Propriété 26. — *Soient z et z' deux nombres complexes.*

- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.
- *Si* $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
- $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.

Démonstration. On utilise la forme $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Ainsi,

- $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\,\overline{z'} = z\overline{z} \cdot z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$. Par positivité des modules, on en déduit donc que $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right|^2 = \dfrac{z}{z'}\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \dfrac{z}{z'}\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \dfrac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{|z|^2}{|z'|^2}$ et on conclut de même.
- $|-z|^2 = (-z)(\overline{-z}) = (-z)(-\overline{z}) = z\overline{z} = |z|^2$ et $|\overline{z}|^2 = \overline{z} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{z}z = |z|^2$.

□

Proposition 3.2. Inégalités triangulaires

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \text{et} \quad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$$

et $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement s'il existe un réel k tel que $z = kz'$ ou $z' = kz$ (on dit que z et z' sont **linéairement liés**).

2) Groupe des nombres complexes de module 1

a) Définitions

Définition 64. — On appelle **groupe des nombres complexes de module** 1, et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$

Remarque 62. — On dit que $\mathbb{U}$ est un **groupe** car il est stable par multiplication, par passage à l'inverse, et il contient 1.

Démonstration. En effet, soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$. On a alors

- $|zz'| = |z| \cdot |z'| = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}$.
- $|z| = 1$ donc z n'est pas nul, et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.
- Enfin, $|1| = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}$.

□

Proposition 3.3.

$z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta),\quad \theta \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration. En effet, $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $|z| = 1$, et donc si et seulement si le point M d'affixe z est sur le cercle trigonométrique. Ainsi, M a pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ pour un certain réel θ. □

3) Exponentielle complexe

Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Remarquons alors, en utilisant les propriétés d'addition des fonctions trigonométriques, que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= f(\theta+\theta') \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f vérifie, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$, propriété vérifiée également par la fonction exponentielle. Comme de plus, $f(0) = 1$, on notera alors :

Définition 65. — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Les propriétés vue précédemment s'écrivent alors :

Proposition 3.4.

Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

① $e^{i0} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{i\pi} = -1$.

② $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

③ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

④ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

⑤ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

⑥ $|e^{i\theta}| = 1$.

⑦ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta'[2\pi]$.

Solution. Le ① s'obtient en remplaçant θ par $0, \dfrac{\pi}{2}$ ou π dans la définition de $e^{i\theta}$. Le point ② a été obtenu précédemment. Les points ③ s'obtient en constatant que

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

Pour le point ④, on constate que

$$e^{i\theta'}e^{i(\theta-\theta')} \underbrace{=}_{\text{par ②}} e^{i(\theta'+(\theta-\theta'))} = e^{i\theta}$$

Pour le point ⑥, on a déjà vu que $|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = 1$.
Le point ⑤ se démontre par récurrence pour $n \geqslant 0$ puis en utilisant le point ₀ pour $n \in \mathbb{Z}$.
Enfin, en utilisant les propriétés trigonométriques :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos(\theta') \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \sin(\theta') \Leftrightarrow \theta = \theta'[2\pi]$$

Théorème 3.5. Surjectivité de l'exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Remarque 63. — Le θ du théorème n'est pas unique. En effet, $\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est encore un réel vérifiant $e^{i\theta'} = z$.

Remarque 64. — On peut étendre la définition de l'exponentielle complexe à tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$), en posant

$$e^z = e^a e^{ib} = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$$

Exemple 66. — Si $z = 1 + i$, on alors

$$e^{1+i} = e^1 e^i = e(\cos(1) + i\sin(1))$$

4) Fonctions à valeurs complexes

Remarque 65. — Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ peut s'écrire, pour tout réel $t \in I$, $f(t) = g(t) + ih(t)$, avec $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ($g(t)$ représente la partie réelle de $f(t)$, et $h(t)$ représente la partie imaginaire).

Proposition 3.6.

Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On introduit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout réel $t \in I$ par $f(t) = g(t) + ih(t)$.
Alors f est dérivable sur I et pour tout réel $t \in I$,

$$f'(t) = g'(t) + ih'(t)$$

Remarque 66. — Ainsi, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables sur I.

Exemple 67. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout réel t par $f(t) = e^{it}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t :

$$f'(t) = ie^{it}$$

Solution. Pour tout réel t, on a $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque cos et sin sont dérivables, et on a

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -\sin(t) + i\cos(t)$$

Or, on a également, pour tout réel t

$$if(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = i\cos(t) + i^2\sin(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = f'(t)$$

Proposition 3.7.

Soit une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeur complexe. Alors e^{φ} est également dérivable sur I et on a

$$\left(e^{\varphi}\right)' = \varphi' e^{\varphi}$$

5) Argument d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe non nul z, on constate que

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

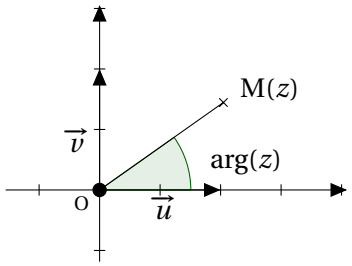
et donc $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. D'après ce qui précède, par surjectivité de l'exponentielle complexe, il existe un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Définition 66. — On appelle **argument** d'un nombre complexe non nul z, et on note $\arg(z)$, tout nombre réel θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

L'argument n'est pas unique, mais est défini à un multiple entier de 2π près.
Le nombre 0 n'a pas d'argument.

Remarque 67. — $\arg(z)$ représente une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z dans le plan complexe.



Les propriétés des arguments d'un nombre complexe sont similaires aux propriétés du logarithme :

Propriété 27. — *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors*

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad ([2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$.
- $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$.
- *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}^*$,* $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$.
- $\arg(z) = 0 \quad [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$.
- $\arg(z) = \pi \quad [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_-^*$.
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}^*$.

Démonstration. Ces propriétés découlent des propriétés de l'exponentielle. □

Définition 67 (Forme trigonométrique et exponentielle)**.** — Tout nombre complexe non nul z s'écrit

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) && \textit{forme trigonométrique} \\ &= re^{i\theta} && \textit{forme exponentielle} \end{aligned}$$

où θ est un argument de z et $r = |z|$

Exemple 68. — On a, par exemple

$$2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad -3 = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3e^{i\pi}$$

Remarque 68. — Tout point M d'affixe $z = re^{i\theta}$ du plan, distinct de l'origine, est donc repéré de manière unique par la donnée de $r = |z|$ et d'un argument de z, θ. Les coordonnées (r, θ) sont appelées **coordonnées polaires** du point M.

Méthode 3.4.

Pour déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on calcule son module, puis on cherche θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Exemple 69. — Déterminer la forme exponentielle de $1 + i$.

Solution. On constate que $|1 + i| = \sqrt{2}$. On cherche alors θ vérifiant

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ainsi, on a $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 48. — Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

① $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$, ② $-\sqrt{3} + i$, ③ $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^4$, ④ $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2016}$

Solution. On utilise la méthode précédente. On obtient :

① $\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

② $-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

③ En utilisant les résultats précédents :

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i} = \frac{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$$

et donc

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^4 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{4\times\frac{7i\pi}{12}} = 4e^{\frac{7i\pi}{3}}$$

④ Par la méthode classique, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et donc

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2016} = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016} = e^{-i2016\frac{\pi}{3}} = e^{-i672\pi} = 1$$

Conséquence 1. — On peut convertir une expression du type $a\cos(t)+b\sin(t)$ sous la forme $\mathrm{A}\cos(t-\varphi)$. En effet, notons $z=a+ib$. On écrit z sous forme exponentielle $z=\mathrm{A}e^{i\varphi}$, avec $\mathrm{A}=\sqrt{a^2+b^2}$ et φ un argument de z. On a donc

$$\cos(\varphi)=\frac{a}{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi)=\frac{b}{\mathrm{A}}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} e^{it}\mathrm{A}e^{-i\varphi} &= (\mathrm{A}\cos(t)\cos(\varphi)+\mathrm{A}\sin(t)\sin(\varphi))+i(-\mathrm{A}\cos(t)\sin(\varphi)+\mathrm{A}\sin(t)\cos(\varphi)) \\ &= (a\cos(t)+b\sin(t))+i(-b\cos(t)+a\sin(t)) \end{aligned}$$

Ainsi, $a\cos(t)+b\sin(t)=\Re(e^{it}\mathrm{A}e^{i\varphi})=\Re(\mathrm{A}e^{i(t-\varphi)})=\mathrm{A}\cos(t-\varphi)$.

Remarque 69. — La méthode est à connaitre, et non pas la formule complète.

Exemple 70. — Ecrire, pour tout réel t, $\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t)$ sous la forme $\mathrm{A}\cos(t+\varphi)$.

Solution. On pose $z=\sqrt{3}+i$. Par la méthode classique, on peut écrire $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} e^{it}2e^{-i\frac{\pi}{6}} &= (\cos(t)+i\sin(t))(\sqrt{3}-i) \\ &= (\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t))+i(\sqrt{3}\sin(t)-\cos(t)) \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t)=\Re\left(e^{it}2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$. Or

$$e^{it}2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}$$

et finalement

$$\boxed{\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t)=2\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Proposition 3.8.

Soit $z=a+ib$ (avec $a\neq 0$) un complexe non imaginaire pur. Alors

$$\arg(z)=\begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & \text{si } a<0 \end{cases}$$

IV. Racines complexes

1) Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 68. — Soient u un nombre complexe non nul, et n un entier naturel non nul. On appelle **racines n-ièmes de u** toutes les solutions de l'équation $z^n=u$ d'inconnue z.

Méthode 3.5.

Pour déterminer les racines d'un nombre complexe non nul u, on utilise la forme exponentielle. On conclura alors en constatant que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module, et même argument à un multiple de 2π près.

Exemple 71. — Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3}+i$.

Solution. On a $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. On cherche donc $z = re^{i\theta}$ (forme exponentielle) tel que $z^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, c'est-à-dire

$$r^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

et donc $r = \sqrt{2}$ (car $r > 0$) et $2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), soit $\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On obtient deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}+i\pi} = -\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

2) Racines de l'unité

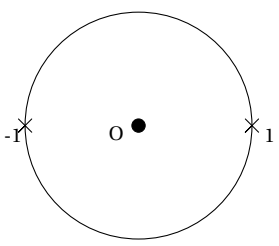
Définition 69 (Cas particulier)**.** — On appelle **racines n-ièmes de l'unité** toutes les solutions de l'équations $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemple 72 (Fondamental)**.** — Soit n un entier non nul. Déterminer les racines n-ièmes de l'unité.

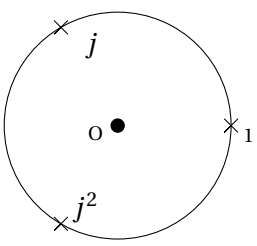
Solution. On a $z^n = 1$ si et seulement si $\begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = 0[2\pi] \end{cases}$, soit $\begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\arg(z) = 0[2\pi] \end{cases}$ et donc $\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = 0\left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$.
Ainsi, les solutions sont de la forme $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Or, par 2π-périodicité de la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$, on constate que certains solutions sont redondantes ; en effet, $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ si et seulement si $k - k'$ est un multiple de n.
Bilan : il y a n racines distinctes, et on peut prendre $k \in [\![0; n-1]\!]$ ou $k \in [\![1; n]\!]$. Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0; n-1]\!]\right\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![1; n]\!]\right\}$$

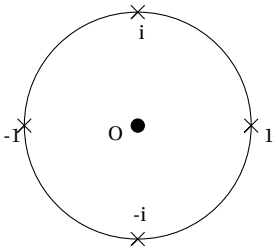
Remarque 70. — Pour tout entier n non nul, $\mathbb{U}_n$ contient 1, et est stable par multiplication et par passage à l'inverse. $\mathbb{U}_n$ est donc un groupe pour la multiplication.
Dans le plan complexe, les points d'affixe $z \in \mathbb{U}_n$ forment un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.



Cas $n = 2$



Cas $n = 3$



Cas $n = 4$

Dans le cas $n = 2$, on a $\mathbb{U}_2 = \{1; -1\}$, dans le cas $n = 3$, on a $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Enfin, dans le cas

$n=4$, $\mathbb{U}_4=\{1;i;1;-i\}$.

Remarque 71. — On peut se ramener aux racines de l'unité dans le cas général. En effet, si on doit résoudre $z^n=re^{i\theta}$, on constate que

$$z^n=\left(r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n \quad \text{soit} \quad \left(zr^{-\frac{1}{n}}e^{-i\frac{\theta}{n}}\right)^n=1$$

On conclut en disant que $zr^{-\frac{1}{n}}e^{-i\frac{\theta}{n}}\in\mathbb{U}_n$.

Proposition 3.9.

Soit $\omega\neq 1$ une racine n-ième de l'unité. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$$

Démonstration. On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique, dont la raison ω est différente de 1. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=\frac{1-\omega^n}{1-\omega}=\frac{1-1}{1-\omega}=0 \quad \text{car} \quad \omega^n=1$$

□

3) Racines carrées d'un nombre complexe

Pour déterminer la solution de l'équation $z^2=a+ib$, on peut utiliser la méthode précédente (forme exponentielle), mais on peut également le faire avec la forme algébrique.

Méthode 3.6.

On cherche les solutions z de l'équation $z^2=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

① On écrit $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et on détermine z^2. On obtient alors $x^2-y^2+2xyi=a+ib$.

② On considère les parties réelles et imaginaires pour déterminer deux équations.

③ On utilise une troisième équation, en constatant que $|z|^2=|a+ib|$, c'est-à-dire $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$.

④ On résout le système des 3 équations précédentes, sachant qu'une de ces équations permet d'éliminer certaines solutions.

Exemple 73. — Déterminer les racines carrées de $3-4i$.

Solution. On écrit $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ainsi, $z^2=x^2-y^2+2xyi$ et $|z|^2=x^2+y^2$. Puisque $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $z^2=3-4i$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= 3\\ 2xy &= -4\\ x^2+y^2 &= 5\end{cases}$$

En ajoutant et soustrayant la première et la troisième égalité, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x^2 &= 4 \\ 2xy &= -4 \\ y^2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \pm 2 \\ 2xy &= -4 \\ y &= \pm 1 \end{cases}$$

La deuxième égalité nous impose que x et y sont de signe contraire. Ainsi, l'équation $z^2 = 3-4i$ admet deux solutions :

$$z_1 = 2-i \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1 = -2+i$$

Exercice 49. — Déterminer les racines carrées de i, -9, et $1+2i$.

Solution. Par la même méthode, on obtient

- Les racines carrées de i sont $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Rapidement, $-9 = (3i)^2$ donc les racines carrées de -9 sont $3i$ et $-3i$.
- Enfin, pour $1+2i$, en posant $z = x+iy$, on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ 2xy &= 2 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{5} \end{cases}$$

et donc les racines carrées de $1+2i$ sont

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1$$

Remarque 72. — De manière générale, si $a \in \mathbb{R}^-$, les racines carrées de a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

4) Equation du second degré à coefficients complexes

Théorème 3.10.

Soient a, b et c trois nombres complexes, avec $a \neq 0$. Les racines de az^2+bz+c sont

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{où} \quad \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

Δ étant appelé le **discriminant**.
Si $\Delta = 0$, il y a une unique racine, appelée **racine double**.
Si a, b et c sont réels, on obtient les résultats vus dans les classes précédentes :

- Si $\Delta > 0$, les deux solutions sont réelles.
- Si $\Delta < 0$, les solutions sont deux complexes conjuguées.

Démonstration. En utilisant la forme canonique, on constate que

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]$$

Ainsi, en utilisant l'identité remarquable classique

$$az^2+bz+c=a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)$$

□

Exemple 74. — Résoudre l'équation $z^2-iz-1+i=0$.

Solution. Soit Δ son discriminant. On a donc

$$\Delta=(-i)^2-4\times1\times(-1+i)=3-4i$$

On a vu dans un exercice précédent, qu'une racine de $3-4i$ est par exemple $2-i$. On note donc $\delta=2-i$. Les solutions de l'équation $z^2-iz-1+i=0$ sont donc

$$z_1=\frac{i-(2-i)}{2}=-1+i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{i+(2-i)}{2}=1$$

Exercice 50 (Important)**.** — Résoudre l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, avec $\theta\in\mathbb{R}$.

Solution. Son discriminant Δ vaut

$$\Delta=(-2\cos(\theta))^2-4=4\cos^2(\theta)-4=4(\cos^2(\theta)-1)=-4\sin^2(\theta)=-(2\sin(\theta))^2$$

en utilisant l'identité $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$. Puisque Δ est réel négatif, les solutions de l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$ sont donc

$$z_1=\frac{2\cos(\theta)+i(2\sin(\theta)}{2}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)=e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=e^{-i\theta}$$

V. Lien entre complexes et trigonométrie

1) Formules d'Euler

En reprenant la notation exponentielle, on constate que, pour tout réel θ,

$$\cos(\theta)=\Re(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\Im(e^{i\theta})$$

On dispose ainsi des formules suivantes :

Proposition 3.11. Formules d'Euler

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Par définition,

$$\Re(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}+\overline{e^{i\theta}}}{2}=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}-\overline{e^{i\theta}}}{2i}=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

□

2) Formule de Moivre

La formule de Moivre permet de calculer facilement la puissance n-ième d'un nombre complexe en utilisant la formule trigonométrique.

Proposition 3.12. Formule de Moivre

Pour tout réel θ, et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration. La preuve résulte de la propriété de l'exponentielle complexe $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. □

3) Application à la linéarisation

Selon certains cas (en physique par exemple), il peut arriver qu'on ait besoin de transformer des puissances de cos et sin en une somme de multiples de cos et sin, en utilisant les deux formules précédentes : on dit qu'on **linéarise** l'expression.

Exemple 75. — Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer cette intégrale, on va linéariser $\sin^3$.

Méthode 3.7.

Pour linéariser une expression trigonométrique :

① on transforme les termes cos et sin en exponentielles complexes, en utilisant les formules d'Euler.

② on développe les expressions (à l'aide de la formule du binôme de Newton) et on simplifie en utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe.

③ on applique les formules d'Euler pour transformer les exponentielles complexes restantes en cos et sin.

Exemple 76. — Linéariser $\cos^2(x)$.

Solution. En utilisant les formules d'Euler

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{4}$$

soit, après simplification

$$\cos^2(x) = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{1}{2}$$

et en appliquant les formules d'Euler à nouveau

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

Exercice 51. — Calculer l'intégrale précédente : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution. On va tout d'abord linéariser $\sin^3$:

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+\frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)\end{aligned}$$

On peut alors calculer l'intégrale, en utilisant les primitives usuelles et la linéarité :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{12}\cos(3t)-\frac{3}{4}\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Méthode 3.8.

Lorsqu'on cherche à transformer une formule linéarisée, on utilise $\mathrm{e}^{in\theta} = (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$ et on développe.

Exemple 77. — Ecrire $\cos(3x)$ sous la forme d'un polynôme en $\cos(x)$.

Solution. On écrit $\mathrm{e}^{3ix} = (\cos(x)+i\sin(x))^3$. En développant

$$\mathrm{e}^{3ix} = \cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)+3i^2\cos(x)\sin^2(x)+i^3\sin(x)^3$$

Or $\cos(3x) = \Re(\mathrm{e}^{3ix})$. Ainsi

$$\cos(3x) = \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)$$

et donc

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x)-3\cos(x)$$

Méthode 3.9.

Lorsqu'on veut factoriser des expressions du type $\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{i\theta'}$, on met en facteur $\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ et on utilise les formules d'Euler.

Exemple 78 (Exemple important)**.** — Factoriser $1+\mathrm{e}^{i\theta}$ et $1-\mathrm{e}^{i\theta}$.

Solution. On écrit $1+e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\theta}$. Ainsi

$$\begin{aligned}1+e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\\ &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

De même,

$$\begin{aligned}1-e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\\ &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

VI. Complexes et géométrie

Les nombres complexes sont très liés à la géométrie. On va ainsi pouvoir identifier certaines transformations du plan à l'aide d'une application complexe.

Dans l'ensemble de cette partie, on se place dans un plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Distances et angles

Propriété 28. — *Soient* A *et* B *deux points distincts du plan, d'affixes respectives* z_A *et* z_B. *Alors*

$$AB=||\overrightarrow{AB}||=|z_B-z_A|$$

Ainsi

- *L'ensemble des points* M *d'affixe* z *du plan vérifiant* $|z-z_A|=r$ *(où* $r>0$*) est le cercle, de centre* A *et de rayon* r.
- *L'ensemble des points* M *d'affixe* z *vérifiant* $|z-z_A|=|z-z_B|$ *est la médiatrice du segment* [AB].
- *Le triangle* MAB *est rectangle en* M *si et seulement si* $|z_A-z_B|^2=|z-z_A|^2+|z-z_B|^2$.

Démonstration. En effet, puisque le plan est orthonormé, on a

$$AB=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=|z_B-z_A|$$

Ainsi,

- $|z-z_A|=r \Leftrightarrow AM=r$ représente donc le cercle, de centre A et de rayon r.
- $|z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$ représente l'ensemble des points à égale distance de A et B, c'est-à-dire la médiatrice du segment [AB].
- MAB est rectangle en M si et seulement si, d'après le théorème de Pythagore (et sa réciproque) $AB^2=AM^2+BM^2$.

□

Propriété 29. — *Soient* A, B, C *et* D *quatre points d'affixe respective* z_A, z_B, z_C *et* z_D, *avec* A *distinct de* B *et* C *distinct de* D. *Alors*

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

Ainsi,

- (AB) *est parallèle à* (CD) *si et seulement si* $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ *est réel.*
- (AB) *est perpendiculaire à* (CD) *si et seulement si* $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ *est imaginaire pur.*

Démonstration. On rappelle que, par définition d'un argument, si $\vec{w}$ est un vecteur d'affixe z, alors $(\vec{u};\vec{w}) = \arg(z) \quad [2\pi]$. Ainsi, par la relation de Chasles sur les angles orientés

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{CD}) = (\vec{u};\overrightarrow{CD}) - (\vec{u};\overrightarrow{AB})$$

Ainsi, par définition,

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

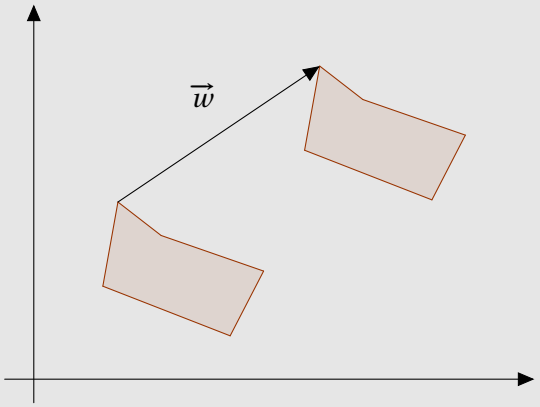
Puisque, (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 0\ [\pi]$, et perpendiculaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, le résultat s'en déduit automatiquement. □

2) Transformations du plan

a) Translation

Les transformations du plan classique (translation, rotation, homothétie et symétrie par rapport à l'axe des abscisses) se traduisent aisément avec les nombres complexes. On rappelle qu'on se place dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Rappel 4. — *Soit* $\vec{w}$ *un vecteur. On appelle* ***translation*** *de vecteur* $\vec{w}$ *la transformation du plan qui, à tout point* M, *associe le point* M′ *tel que* $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$.



Proposition 3.13.

Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe a. L'image du point M, d'affixe z, par la translation de vecteur $\vec{w}$ est le point

M′ d'affixe $z' = z + a$.

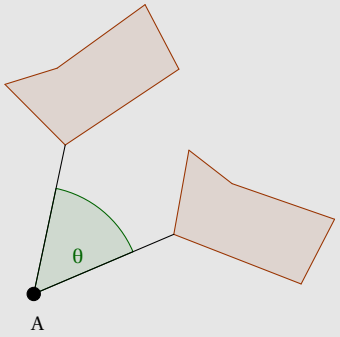
Démonstration. En effet, $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$ si et seulement si $z' - z = a$, c'est-à-dire $z' = z + a$. □

Remarque 73. — Une translation préserve les distances et les angles. Une translation de vecteur non nul n'admet pas de point invariant.

b) Rotation

Définition 70. — Soit A un point du plan, et θ un réel. On appelle **rotation** de centre A et d'angle θ la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M′ tel que

$$\begin{cases} AM' = AM \\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta \ [2\pi] \end{cases} \quad \text{si } M \neq A, \quad M' = A \text{ si } M = A$$



Proposition 3.14.

Soit A un point du plan d'affixe a, et θ un réel. L'image du point M d'affixe z par la rotation de centre A et d'angle θ est le point M′ d'affixe z' tel que

$$z' - a = e^{i\theta}(z - a)$$

En particulier, si le centre est l'origine O : $z' = e^{i\theta} z$.

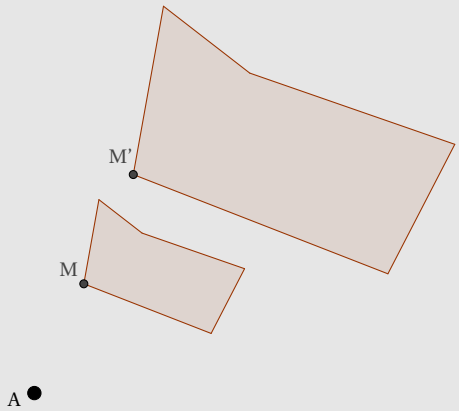
Solution. Si M = A, alors $e^{i\theta}(z - a) = 0$ et donc $z' - a = e^{i\theta}(z - a)$: on obtient bien M = A.
Si M ≠ A, alors AM = AM′ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta \ [2\pi]$ si et seulement si

$$\left|\frac{z' - a}{z - a}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z' - a}{z - a}\right) = \theta \ [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z' - a}{z - a} = e^{i\theta}$$

Remarque 74. — Une rotation préserve les distances et les angles. Si l'angle θ est non nul, la rotation d'angle θ admet un unique point fixe, son centre.

c) Homothétie

Définition 71. — Soit A un point du plan, et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle **homothétie** de centre A et de rapport k la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M′ du plan tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.



Proposition 3.15.

Soit A un point du plan d'affixe a, et $k \in \mathbb{R}^*$. L'image du point M, d'affixe z par l'homothétie de centre A et de rapport k est le point M′ d'affixe z' tel que

$$z' - a = k(z - a)$$

Démonstration. En effet, $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ si et seulement si $z' - a = k(z - a)$. □

Remarque 75. — Une homothétie préserve les angles, mais pas les distances. En effet, une longueur est multipliée par $|k|$. Elle admet un unique point fixe, son centre.

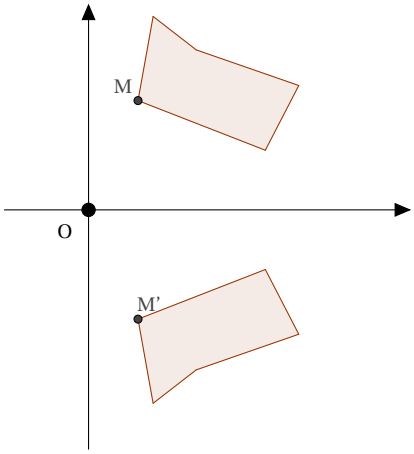
Propriété 30. — *Soit ω un nombre complexe. L'application $z \longmapsto \omega z$ est la composée de deux applications : l'homothétie, de centre* O *et de rapport* $|\omega|$*, et la rotation de centre* O *et d'angle* $\arg(\omega)$.

d) Symétrie par rapport à l'axe des abscisses

Proposition 3.16.

L'image du point M, d'affixe z, par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses est le point M′ d'affixe z' tel que

$$z' = \overline{z}$$



Remarque 76. — Une symétrie axiale conservent les distances, mais renversent l'orientation (elle transforme un angle orienté en son opposé). L'ensemble de ses points fixes est son axe de symétrie.

fFileExiststex/Chap3/Exo3

Exercices

Généralités

Exercice 52 (Forme algébrique)**.** — Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\frac{2+i}{1-2i} \qquad \frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i} \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad e^{\pi} \qquad \frac{4+3i}{i-3}$$

Solution. On a rapidement

$$\frac{2+i}{1-2i}=\frac{(2+i)(1+2i)}{1+4}=i \qquad \frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}=\frac{6}{5} \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$$

e^{π} est déjà sous forme algébrique car réel. Enfin

$$\frac{4+3i}{i-3}=\frac{(4+3i)(-i-3)}{1+9}=-\frac{9}{10}-\frac{13}{10}i$$

Exercice 53 (Forme exponentielle)**.** — Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\sqrt{3}+i \qquad \sqrt{6}-\sqrt{2}i \qquad -3-3i \qquad -3 \qquad \frac{-1-i}{\sqrt{3}-i} \qquad (1-i)^n \ (n\in\mathbb{Z})$$

Solution. Par la méthode habituelle, on obtient les résultats suivants (pour les quotients, on détermine d'abord la forme exponentielle du numérateur et du dénominateur, puis on conclut).

$$\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad \sqrt{6}-\sqrt{2}i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad -3-3i=3\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \qquad -3=3e^{i\pi}$$

Comme $-1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, on a

$$\frac{-1-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

Enfin, $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, et donc

$$(1-i)^n=\sqrt{2}^n e^{-in\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 54 (Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$)**.** — On note $z=1+i$ et $z'=\sqrt{3}+i$. En exprimant $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique et exponentielle, déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution. Tout d'abord, par calcul rapide, on a :

$$\frac{z}{z'}=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

De plus,

$$\breve{a}z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z'=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

et donc

$$\breve{a}\frac{z}{z'}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\ă\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 55 (Identité du parallélogramme)**.** — Montrer que, pour tous nombres complexes z et z' on a

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$$

Interpréter géométrique.

Solution. Première méthode : on pose $z=a+ib$, $z'=a'+ib'$ (avec a,b,a',b' des réels) et on développe. Autre méthode :

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2&=(z+z')(\overline{z+z'})+(z-z')(\overline{z-z'})\\&=z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z}-z\overline{z'}-z'\overline{z}+z'\overline{z'}\\&=2z\overline{z}+2z'\overline{z'}=2|z|^2+2|z'|^2\end{aligned}$$

Racines n-ièmes

Exercice 56 (ATS 2010)**.** — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{1}{z^2}+z^2+1=0$.

Solution. Remarquons tout d'abord que, nécessairement, $z\neq 0$. Soit $z\in\mathbb{C}^*$. L'équation (E) : $\dfrac{1}{z^2}+z^2+1=0$ est alors équivalente à $z^4+z^2+1=0$.

Soit $Z=z^2\in\mathbb{C}^*$. L'équation devient alors $Z^2+Z+1=0$, qui a pour solutions

$$Z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

On revient à la variable de départ : z est solution de (E) si et seulement si

$$z^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

On constate (ou on montre) que $Z_1=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $Z_2=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. En notant alors $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$, on en déduit alors que

$$\begin{cases}r^2=1\\2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}r^2=1\\2\theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases}r=1\\\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}r=1\\\theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

L'équation (E) possède donc 4 solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{-i(\frac{\pi}{3}+\pi)}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)} \right\}$$

soit

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}} \right\}}$$

Exercice 57 (BTS-DUT 2011)**.** — Soit n un entier naturel non nul. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(z-1)^n = (z+1)^n$$

Solution. Remarquons tout d'abord que $z = 1$ n'est pas solution (car $0 \neq 2^n$). Ainsi :

$$(z-1)^n = (z+1)^n \iff \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1 = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$$

Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$. L'équation s'écrit alors $Z^n = 1$, c'est-à-dire

$$Z = e^{2i\frac{k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0; n-1]\!]$$

On revient à la variable de départ :

$$\begin{aligned} Z = e^{2i\frac{k\pi}{n}} \quad &\iff \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{2i\frac{k\pi}{n}} \\ \text{soit} \quad & z\left(1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right) = -1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}} \\ \text{ou encore} \quad & z = -\frac{1+e^{2i\frac{k\pi}{n}}}{1-e^{2i\frac{k\pi}{n}}} \text{ si } k \in [\![1; n-1]\!] \\ \text{donc} \quad & z = -\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{-i}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$ admet $n-1$ solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-i}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, \quad k \in [\![1; n-1]\!] \right\}$$

> **Remarque.** — On a bien $n-1$ solutions et non n solutions, car l'équation n'est pas de degré n, mais de degré $n-1$ (les termes en z^n se simplifiant).

Exercice 58 (ATS 2014)**.** — Déterminer les racines cubiques de $-i$.

Exercice 59 (ATS 2009)**.** — Déterminer les racines carrées du nombre $-7+5i$.

Solution. Il est difficile d'exprimer $-7+5i$ sous forme exponentielle. Soit donc $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}^2)$ vérifiant $z^2 = -7+5i$. Mais alors

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -7+5i \quad \text{avec} \quad |x+iy|^2 = |-7+5i| = \sqrt{74}$$

Ainsi, z est une racine carrée de $-7+5i$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 &=& -7 \\ x^2+y^2 &=& \sqrt{74} \\ 2xy &=& 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& \frac{\sqrt{74}-7}{2} \\ y^2 &=& \frac{\sqrt{74}+7}{2} \\ 2xy &=& 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}} \\ y &=& \sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}} \\ y &=& -\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}} \end{array}\right.$$

Ainsi, les deux racines de $-7+5i$ sont

$$\boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}}; -\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}}}$$

Trigonométrie

Exercice 60 (ATS 2009)**.** — Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(\theta p)$$

Exercice 61. — Déterminer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x$.

Solution. On va linéariser $\cos(2x)\sin(3x)$. On constate que :

$$\begin{aligned} \cos(2x)\sin(3x) &= \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{5ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-5ix}}{4i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{\sin(5x)+\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(5x)+\sin(x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\frac{\cos(5x)}{5}-\frac{1}{2}\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Exercice 62 (ATS 2014)**.** — Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} \quad \text{et} \quad S_n(x) = 2\Re(T_n(x)) - 1$$

1. Calculer $T_n(x)$, en déduire que

$$\Re(T_n(x)) = \cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

2. Montrer que
$$S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$$

Solution.

1. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique (et en remarquant que $e^{2ix} \neq 1$ car $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$) :
$$T_n(x) = \frac{1-(e^{2ix})^{n+1})}{1-e^{2ix}} = \frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}$$
On utilise alors la méthode classique :
$$1-e^{2ix} = e^{ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right) = -2ie^{ix}\sin(x)$$
Ainsi
$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1-e^{2i(n+1)x}}{-2ie^{ix}\sin(x)} \\ &= \frac{e^{-ix}-e^{i(2n+1)x}}{-2i\sin(x)} \\ &= \frac{e^{inx}\left(e^{-(n+1)ix}-e^{(n+1)ix}\right)}{-2i\sin(x)} \quad \text{même méthode} \\ &= e^{inx}\frac{-2i\sin((n+1)x)}{-2i\sin(x)} \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}(\cos(nx)+i\sin(nx)) \end{aligned}$$
Ainsi, $\Re(T_n(x)) = \cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$.
2. On a alors, d'après le résultat précédent :
$$\begin{aligned} S_n(x) &= 2\Re(T_n(x)) - 1 \\ &= 2\cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} - 1 \end{aligned}$$
or $\sin((n+1)x) = \sin(x)\cos((nx) + \cos(x)\sin(nx)$. Ainsi
$$\begin{aligned} S_n(x) &= 2\cos(nx)\frac{\cos(nx)\sin(x)+\cos(x)\sin(nx)}{\sin(x)} - 1 \\ &= 2\cos^2(nx) + 2\frac{\cos(nx)\sin(nx)\cos(x)}{\sin(x)} - 1 \end{aligned}$$
Or, $2\cos^2(nx) - 1 = \cos(2nx)$. Donc
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \cos(2nx) + 2\frac{\cos(nx)\cos(x)\sin(nx)}{\sin(x)} \\ &= 1 - 2\sin(nx)\frac{\sin(nx)\sin(x)-\cos(x)\cos(nx)}{\sin(x)} \\ &= 1 - 2\sin(nx)\frac{-\cos((n+1)x}{\sin(x)} \end{aligned}$$

Géométrie

Exercice 63. — Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que

$$|z-2i|=2 \qquad |z-1+i|<2 \qquad |z+2-i|=|z-1-i| \qquad \arg(z)=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \qquad \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Exercice 64 (ATS 2014)**.** — Soit (ABC) un triangle, et $p\in]0;1[$. On considère les points A′, B′ et C′ définis par

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=p\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB'}=p\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CC'}=p\overrightarrow{CA} \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on note a, b et c les affixes des points respectifs A, B, C et a', b' et c' les affixes des points respectifs A′, B′ et C′.
On note $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que $\omega^3=1$, $1+\omega+\omega^2=0$ et $\omega^2=\overline{\omega}$.
2. Déterminer a', b' et c' en fonction de a, b, c et p.
3. Démontrer que (ABC) et (A′B′C′) ont le même centre de gravité.

Exercice 65. — Soit A le point d'affixe 1 du plan complexe. On considère la transformation du plan f qui, à tout point M d"affixe z, et distinct de A, associe le point M′ d'affixe

$$z'=\frac{1-z}{\overline{(z)}-1}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de A par f.
2. Calculer $|z'|$.
3. Démontrer que, pour tout point M $\neq$ A, A, M et M′ sont alignés.
4. En déduire une méthode de construction du point M′.

Exercice 66. — Soit n un entier $n\geqslant 3$. Pour tout entier $k\in\{0,\cdots,n\}$, on définit le point M_k d'affixe $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On rappelle que les points M_k forment un polygone régulier, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. On souhaite calculer le périmètre de ce cercle.

1. Montrer que, pour tout $k\in\{0,\cdots,n-1\}$, $M_kM_{k+1}=2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
2. Déterminer le périmètre du polygone $M_0M_1\cdots M_n$.
3. Déterminer la limite de ce périmètre lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 67. — Soit ABC un triangle, dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O. On note G le centre de gravité, et a, b, c et g les affixes respectives des points A, B, C et G. On note enfin H le point d'affixe $h=a+b+c$.

1. Déterminer l'affixe de G.
2. Montrer que $|a|=|b|=|c|$.
3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur. Interpréter.
4. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. Montrer enfin que O, G et H sont alignés.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Ceci est général : pour tout triangle non plat, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre sont alignés sur une droite appelée *Droite d'Euler.*

CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

Résumé

Ce chapitre est souvent délaissé par les élèves au concours. Lors des épreuves écrites, il est souvent demandé certaines propriétés après avoir étudié une courbe.
Ce chapitre repose sur les bases connues des années précédentes, en les consolidant.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant le produit scalaire :
- Connaître les définitions de produit scalaire ..... □
- Savoir déterminer une mesure d'angle entre deux vecteurs à l'aide du produit scalaire ..... □

② Concernant le déterminant :
- Connaître la notion de déterminant et les différentes définitions. ..... □
- Savoir utiliser le déterminant pour déterminer l'aire d'un parallélogramme ..... □

③ Concernant les droites :
- savoir déterminer les équations cartésiennes de droite ..... □
- savoir déterminer un système d'équations paramétriques de droite ..... □
- savoir déterminer les intersections éventuelles de deux droites ..... □
- savoir déterminer la distance d'un point à une droite ..... □

④ Concernant les cercles :
- savoir déterminer une équation cartésienne de cercle ..... □
- savoir déterminer les caractéristiques d'un cercle concernant une équation cartésienne ..... □

I. Repérage dans le plan

Dans cette partie, on revient sur les bases de la géométrie du plan. On voit également les différents types de coordonnées : cartésiennes, polaires.

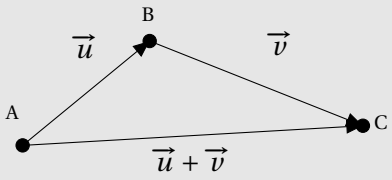
1) Vecteurs

Rappel 5. — *Un **vecteur** $\vec{u}$ non nul est la donnée de trois éléments :*

- *sa direction : la droite qui porte le vecteur.*
- *son sens : on oriente la droite (de* A *vers* B *pour le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *.*
- *une longueur, appelée **norme**, et notée* $||\vec{u}||$ *(la longueur* AB *pour le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *).*

On définit un vecteur de longueur 0*, appelé **vecteur nul**, et noté* $\vec{0}$ *.*

Rappel 6 (Addition de deux vecteurs)**.** — *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On introduit trois points* A, B *et* C *tels que* $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ *et* $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ *. On définit alors* $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *.*

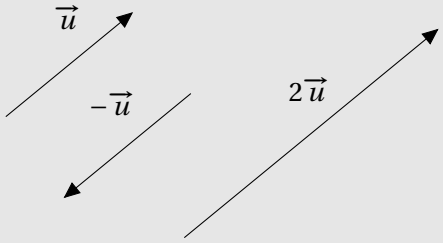


Proposition 4.1. Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Rappel 7 (Multiplication par un scalaire)**.** — *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et k un réel. On définit le vecteur $k\vec{u}$ comme le vecteur ayant la même direction que $\vec{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et de norme $|k|.||\vec{u}||$.*



Définition 72. — L'ensemble des vecteurs du plan, muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, vérifie certaines propriétés :

- le vecteur nul est le neutre de l'addition : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$.
- l'addition est commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
- l'addition est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
- tout vecteur admet un opposé : $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$.
- 1 est le neutre de la multiplication : $1.\vec{u}=\vec{u}$.
- la multiplication est distributive sur l'addition :

$$k.(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v} \quad \text{et} \quad (k+k').\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$$

Les quatre premières propriétés font de l'espace des vecteurs, muni de l'addition, un **groupe abélien**. L'ensemble de ces propriétés forme un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard cette année.

Rappel 8. — *Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.*

Remarque 78. —

— Deux vecteurs colinéaires ont donc la même direction.

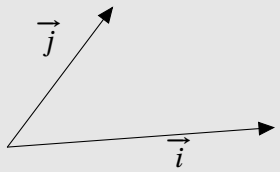
— Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Définition 73. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que la famille $(\vec{u};\vec{v})$ est **libre** si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Sinon, on dit que la famille est **liée**.

2) Base du plan et repère

Définition 74. — On appelle **base** du plan la donnée de deux vecteurs $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ non colinéaires.
On dit que la base est

- **orthogonale** si et seulement si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux.
- **orthonormée** ou orthonormale si et seulement si elle est orthogonale, et si $||\vec{\imath}||=||\vec{\jmath}||$.



Proposition 4.2.

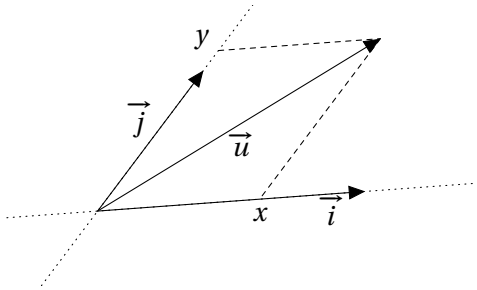
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels uniques x et y tels que

$$\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$$

x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$, y est appelé **ordonnée** et (x,y) représente les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$

dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On notera

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}\,(x;y)$$



Définition 75 (Repère)**.** — On appelle **repère** du plan la donnée d'un point O, appelé **origine** du repère, et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le repère est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthogonale, et orthonormé si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormée.

Proposition 4.3.

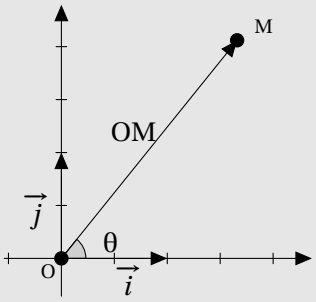
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Pour tout point A du plan, il existe deux réels x et y uniques vérifiant

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

x est appelé abscisse du point A, y ordonnée du point A. Le couple $(x;y)$ représente les **coordonnées cartésiennes** de A, et on note $A(x;y)$.

3) Coordonnées polaires

Définition 76. — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan, distinct de l'origine. M est uniquement déterminé par une mesure de l'angle $\theta = (\vec{\imath}; \overrightarrow{OM})$ et par la longueur OM.



Ainsi, (OM, θ) identifie M, et représente les **coordonnées polaires** du point M.
Le point O n'a pas de coordonnées polaires.

Remarque 79. — Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, si M (distinct de l'origine) a pour forme exponentielle $re^{i\theta}$, alors (r, θ) représente des coordonnées polaires de M.

Proposition 4.4.

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé, et M un point distinct de O.

- Si M a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ alors $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ, identifié par $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$ forme les coordonnées polaires de M.
- Réciproquement, si M a pour coordonnées polaires (r, θ) alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ représentent les coordonnées cartésiennes de M.

Démonstration. En se plaçant dans le plan complexe, on revient à la conversion forme algébrique / forme exponentielle, vue dans le chapitre 3. □

Exercice 68. — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soit A de coordonnées cartésienne $(2; -2)$ et B de coordonnées polaire $\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$. Déterminer les coordonnées polaires de A et les coordonnées cartésiennes de B.

Solution. On note $r = OA$. Alors $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Enfin, θ vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

Ainsi, $\left(2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ représente les coordonnées polaires de A.
Enfin, $x_B = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ et $y_B = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ représentent les coordonnées cartésiennes de B.

II. Produit scalaire

Dans l'ensemble de cette partie, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ représente un repère orthonormé direct.

1) Définitions

Définition 77. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple 79. — Puisque $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé, on a

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = ||\vec{\imath}||.||\vec{\imath}||.\cos(\vec{\imath}; \vec{\imath}) = 1, \quad \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = ||\vec{\jmath}||.||\vec{\jmath}||.\cos(\vec{\jmath}; \vec{\jmath}) = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = ||\vec{\imath}||.||\vec{\jmath}||.\cos(\vec{\imath}; \vec{\jmath}) = 0$$

Propriété 31. — *Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a*

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$$

Solution. En effet,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{u} &= ||\vec{u}||.||\vec{u}||.\cos(\underbrace{\vec{u};\vec{u}}_{=0\ [2\pi]})\\ &= ||\vec{u}||^2\end{aligned}$$

Proposition 4.5.

On dispose des définitions équivalentes suivantes. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a

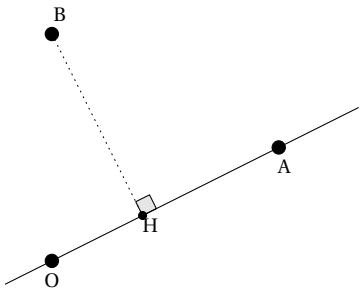
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2}{2}$.

Exemple 80. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solution. On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 3+1\times 4 = 10$.

Proposition 4.6.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient A et B deux points du plan, tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. On note H le projeté orthogonal de B sur (OA).



Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \text{OA}\times\text{OH}$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont dans le même sens, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\text{OA}\times\text{OH}$ sinon.
On notera

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{\text{OA}}\times\overline{\text{OH}}$$

Exemple 81. — Soit ABCD un carré de centre O. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$.

Solution. Le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) est le point I milieu de [AB]. Alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \text{AB}\times\text{AI} = \frac{1}{2}\text{AB}^2$$

Propriété 32. — *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$, on a :*

- *Symétrie :* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- *Bilinéarité :* $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$ *et* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.

2) Applications géométriques

Proposition 4.7.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Proposition 4.8.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Méthode 4.1.

Pour déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$, on détermine le produit scalaire de deux manières différentes : avec les coordonnées, et avec la définition. Cela permet d'obtenir $\cos(\vec{u};\vec{v})$.

Exemple 82. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.

Solution. D'une part, on a

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

D'autre part, par définition

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u};\vec{v})$$

avec

$$||\vec{u}|| = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad ||\vec{v}|| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{10}}{2}\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, $(\vec{u};\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. D'après l'orientation, on en déduit donc que $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

Remarque 80. — Pour conclure, il manque une information de signe (pour déterminer une mesure de l'angle). On va donc introduire la notion de déterminant.

III. Déterminant dans une base orthonormée directe

Dans l'ensemble de cette partie, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ représente un repère orthonormé direct.

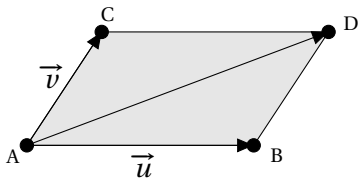
1) Définition

Définition 78. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **déterminant**, et on note $[\vec{u}, \vec{v}]$, le nombre réel

$$[\vec{u}, \vec{v}] = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\sin(\vec{u}; \vec{v})$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.
On le note également $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 81. — Soient A, B, C et D quatre points du plan, tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et ABDC est un parallélogramme.



Alors $[\vec{u}, \vec{v}]$ représente l'aire du parallélogramme ABDC.

Proposition 4.9. Avec coordonnées

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple 83. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Déterminer $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Solution. On a $[\vec{u}, \vec{v}] = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$.

2) Propriétés

Propriété 33. — *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$, on a :*

- *Antisymétrie :* $[\vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}]$.
- *Bilinéarité :* $[(\vec{u} + \vec{v}), \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}] + [\vec{v}, \vec{w}]$ *et* $[\vec{u}, (\vec{v} + \vec{w})] = [\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}, \vec{w}]$.

Proposition 4.10.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Démonstration.

- Si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$, alors soit $||\vec{u}|| = 0$, et donc $\vec{u} = \vec{0}$; soit $||\vec{v} = 0||$, et donc $\vec{v} = \vec{0}$; soit $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire $(\vec{u}; \vec{v}) = 0\ [\pi]$. Dans tous les cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, soit $||\vec{u}|| = 0$ ou $||\vec{v}|| = 0$, soit $(\vec{u}; \vec{v}) = 0\ [\pi]$, c'est-à-dire $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = 0$: ainsi, dans tous les cas $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$.

□

IV. Droites

1) Définitions

Définition 79. — Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan, et A et B deux points distincts du plan. On appelle :

- **droite vectorielle** dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$:
$$\mathscr{D}_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$
- **droite** (ou **droite affine**) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :
$$\mathscr{D}_{A,\vec{u}} = \left\{\text{M du plan},\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}\right\}$$
$\vec{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite.
- droite passant par A et B la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

Définition 80 (Vocabulaire)**.** —

- Des points sont dits **alignés** s'ils sont sur une même droite.
- Deux droites sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Remarque 82. — A partir de ces définitions, on peut redémontrer les résultats connus, par exemple que si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Définition 81. — Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle **vecteur normal** de la droite $\mathscr{D}$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

2) Représentations cartésiennes et paramétriques

Théorème 4.11.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. $M(x;y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $b(x-x_A)-a(y-y_A)=0$.
Cette écriture est appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.

Réciproquement, un ensemble ayant pour équation $ax+by+c=0$ est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Démonstration. Par définition, M est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, et donc si et seulement si $[\overrightarrow{AM},\vec{u}]=0$. Cela donne donc

$$(x-x_A)b-(y-y_A)a=0$$

La réciproque se fait également aisément, en prenant un point quelconque de la droite. □

Méthode 4.2.

Pour déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on écrit son équation sous la forme $bx - ay + c = 0$ et on cherche c avec les coordonnées de A.

Exemple 84. — Déterminer une équation cartésienne de la droite, passant par $A(1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution. Cette droite $\mathscr{D}$ a pour équation

$$2x - y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 2 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$$

et donc $2x - y + 1 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Méthode 4.3.

Pour déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on écrit son équation sous la forme $ax + by + c = 0$ et on cherche c avec les coordonnées de A.

Exemple 85. — Déterminer une équation cartésienne de la droite, passant par $A(1;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution. Cette droite $\mathscr{D}$ a pour équation

$$x + 2y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$$

et donc $x + 2y - 3 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Théorème 4.12.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul. Alors $M(x; y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette représentation est appelée **système d'équations paramétriques**.

Démonstration. $M(x; y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

□

Exemple 86. — Soit $\mathscr{D}$ la droite, passant par A(1;2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Alors $\mathscr{D}$ a comme système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Rappel 9. — *On appelle* ***médiatrice*** *du segment* [AB] *l'ensemble des points* M *a égale distance de* A *et* B.

Exercice 69. — Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB], avec A(1;2) et B(−1;4).

Solution. M$(x;y)$ est sur la médiatrice du segment [AB] si et seulement si AM = BM, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{AM} = \text{BM} &\Leftrightarrow \text{AM}^2 = \text{BM}^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = (x+1)^2+(y-4)^2 \\ &\Leftrightarrow -4x+4y-12=0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] est $-x+y-3=0$.

3) Intersection de deux droites

Proposition 4.13.

Deux droites peuvent avoir 0 (cas des droites parallèles), 1 (cas des droites sécantes) ou une infinité (cas des droites confondues) points d'intersection.

Méthode 4.4.

Pour déterminer l'intersection éventuelle de deux droites on peut utiliser

- Deux équations cartésiennes, et résoudre le système obtenu pour obtenir $(x;y)$;
- Une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques, et on injecte pour déterminer t.

On peut également utiliser deux systèmes d'équations paramétriques et obtenir les valeurs de t et t'.

Exemple 87. — Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $x+y+3=0$ et $-x+2y-6=0$. Déterminer les intersections éventuelles de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Solution. M$(x;y)$ est sur l'intersection si et seulement si

$$\begin{cases} x &+ y &+ 3 &= 0 \\ -x &+ 2y &- 6 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &+ y &+ 3 &= 0 \\ & 3y &- 3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -4 \\ y &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un unique point d'intersection : A(−4;1).

Exemple 88. — Soient $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x+2y+1=0$ et $\mathscr{D}'$ de système d'équations paramétriques $\begin{cases} x &= 2-t \\ y &= 1+t \end{cases}$. Déterminer les intersections éventuelles de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Solution. M$(x;y)$ est sur l'intersection si et seulement si

$$\begin{aligned} (2-t)+2(1+t)+1=0 &\Leftrightarrow 5+t=0 \\ &\Leftrightarrow t=-5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un unique point d'intersection : $x=2-(-5)=7$ et $y=1-5=-4$.

4) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Méthode 4.5.

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, on cherche M$(x;y)$ sur la droite vérifiant $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{u} = 0$.

Exemple 89. — Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A$(1;1)$ sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x+y-3=0$.

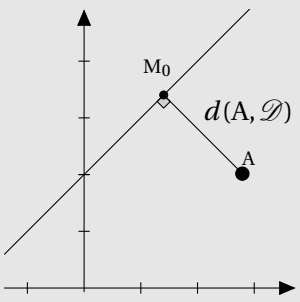
Solution. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. On cherche M$(x;y)$ vérifiant $x+y-3=0$ et tel que $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{u} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ (x-1)(-1)+(y-1)1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ainsi B$\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

5) Distance d'un point à une droite

Définition 82. — Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, et A un point. On appelle **distance** de A à la droite $\mathscr{D}$, et on note $d(\text{A},\mathscr{D})$, la distance AM_0, où M_0 est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.



Théorème 4.14.

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. Alors

$$d(A,\mathscr{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration. Notons $M_0(x_0; y_0)$ le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$. Par définition, $\overrightarrow{AM_0}$ et le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et donc

$$|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}| = M_0A||\vec{n}||$$

Ainsi,

$$d(A,\mathscr{D}) = M_0A = \frac{|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

Or, $\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = (x_A - x_0)a + (y_A - y_0)b = ax_A + bx_B - (ax_0 + bx_0)$. Or, puisque $M_0 \in \mathscr{D}$, $ax_0 + bx_0 + c = 0$. Ainsi

$$\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = ax_A + bx_B + c$$

et $||\vec{n}|| = \sqrt{a^2+b^2}$, ce qui donne le résultat. □

Exemple 90. — Déterminer la distance du point A(1;2) à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x+3y-7=0$.

Solution. On a

$$d(A,\mathscr{D}) = \frac{|2\times 1 + 3\times 2 - 7|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

V. Cercles

1) Définition

Définition 83. — Soit A un point du plan. Le **cercle** $\mathscr{C}_{A,r}$ de centre A et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble des points du plan à une distance r de A :

$$\mathscr{C}_{A,r} = \{M \text{ du plan, } AM = r\}$$

Remarque 83. — Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan. $M(x; y)$ est sur le cercle, de centre A et de rayon r si et seulement si $AM = r$, c'est-à-dire

$$(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = r^2$$

Cette écriture est appelée **équation cartésienne** du cercle.

Définition 84 (Equation cartésienne)**.** — Tout cercle du plan admet une équation du type $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Réciproquement, tout ensemble admettant une équation du type $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est un cercle.

Exemple 91. — Le cercle de centre A(1;1) et de rayon 1 a pour équation cartésienne $(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$, c'est-à-dire $x^2+y^2-2x-2y-1=0$.

2) Méthodes

Méthode 4.6.

Connaissant le centre A et le rayon r d'un cercle, pour déterminer une équation cartésienne, on dit que M$(x;y)$ est sur le cercle si et seulement si $AM^2=r^2$. On en déduit alors une équation cartésienne.

Exemple 92. — Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A(1;2) et de rayon 4. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Solution. M$(x;y)\in\mathscr{C}$ si et seulement si $AM^2=r^2$, et donc

$$\begin{aligned} AM^2=r^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-11=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est donc $x^2+y^2-2x-4y-11=0$.

Méthode 4.7.

Connaissant une équation cartésienne d'un cercle, on obtient le centre et le rayon en utilisant la forme canonique sur les termes de la forme x^2+ax et y^2+bx. On en déduira alors centre et rayon.

Exemple 93. — Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2+2x-6y+6=0$. Déterminer son centre et son rayon.

Solution. On factorise :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x-6y+6=0 &\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-6y+6=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-3)^2-9+6=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4=2^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A$(-1;3)$ et de rayon 2.

Proposition 4.15.

Soient A et B deux points distincts. Alors l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

Méthode 4.8.

Lorsqu'on connait les coordonnées des extrémités d'un diamètre, on utilise la proposition précédente pour déterminer une équation cartésienne.

Exemple 94. — Soient A(1;2) et B(−2;−3) deux points du plan. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

Solution. M$(x;y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)+(y-2)(y+3)+0 \\ &\Leftrightarrow x^2+x-2+y^2+y-6=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+x+y-8=0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $x^2+y^2+x+y-8=0$.

VI. Triangles et quadrilatères

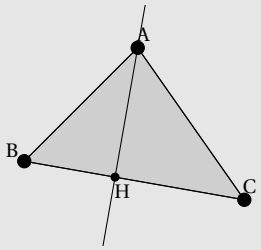
1) Triangle

Rappel 10. — *Un triangle* ABC *est dit*

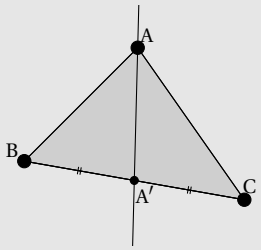
- ***rectangle*** *en* A *si* $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ [π]. *Le côté* [BC] *est alors appelé hypoténuse.*
- ***isocèle*** *en* A *si* AB = AC, *ce qui équivaut à* $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$.
- ***équilatéral*** *si* AB = AC = BC, *ce qui équivaut à* $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$.
- ***plat*** *si* A, B *et* C *sont alignés.*

Rappel 11. — ABC *désigne un triangle.*

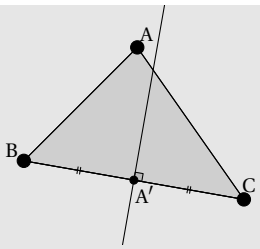
- *La* ***hauteur*** *issue de* A *est la droite passant par* A *et perpendiculaire à* (BC). *Le pied* H *de la hauteur issue de* A *est le point d'intersection de la hauteur issue de* A *avec* (BC).



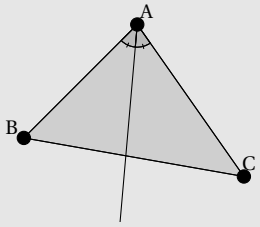
- *La* ***médiane*** *issue de* A *est la droite passant par* A *et par le milieu* A′ *du segment* [BC].



- *La* ***médiatrice*** *du segment* [BC] *est la droite passant par le milieu* A′ *de* [BC] *et perpendiculaire à* (BC).

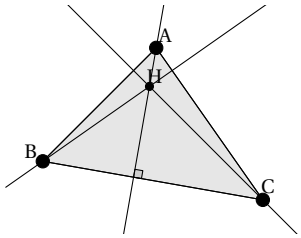


- *Une **bissectrice** de l'angle* $\widehat{\text{BAC}}$ *est une demi-droite passant par* A *divisant l'angle* $\widehat{\text{BAC}}$ *en deux angles égaux.*

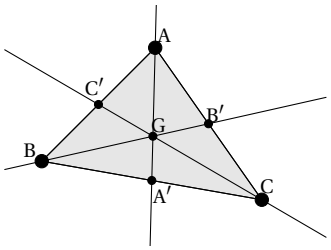


Rappel 12. — *Soit* ABC *un triangle.*

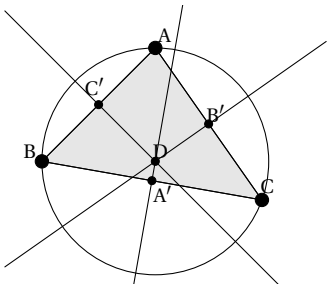
- *Les trois hauteurs sont concourantes en un point* H *appelé **orthocentre**.*
- *Les trois médianes sont concourantes en un point* G *appelé **centre de gravité**.*
- *Les trois médiatrices sont concourantes en un point* D *qui est le **centre du cercle circonscrit**.*
- *Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point* I *qui est le **centre du cercle inscrit**.*



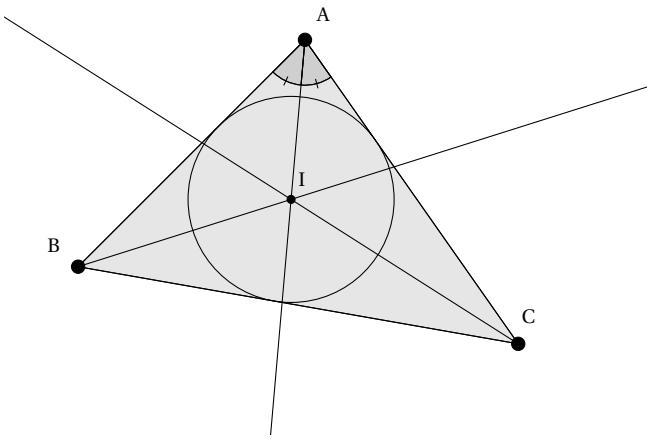
Orthocentre



Centre de gravité



Centre du cercle circonscrit



Centre du cercle inscrit

Propriété 34. —

- *Un triangle* ABC *est isocèle en* A *si et seulement si la hauteur issue de* A*, la médiatrice de* [BC]*, la bissectrice de l'angle* $\widehat{\text{BAC}}$ *et la médiane issue de* A *sont confondues.*
- *Un triangle* ABC *est rectangle en* A *si et seulement si* [BC] *est un diamètre de son cercle circonscrit.*

2) Quadrilatères

Rappel 13. —

- *Un* ***trapèze*** *est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.*
- *Un* ***parallélogramme*** *est un quadrilatère* ABCD *vérifiant* $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{DC}}$*, ou encore que ses diagonales se coupent en leur milieux.*
- *Un* ***losange*** *est un quadrilatère ayant tous ses côtés égaux, ou encore que ses diagonales se coupent perpendiculairement en leurs milieux.*
- *Un* ***rectangle*** *est un parallélogramme ayant un angle droit, ou encore que ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leurs milieux.*
- *Un* ***carré*** *est un rectangle losange.*

fFileExiststex/Chap4/Exo4

Exercices

Dans l'ensemble des exercices, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé.

Équations

Exercice 70. — Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques des droites suivantes :

1. la droite (AB), avec A(4;−1) et B(0;3).
2. la droite passant par C(1;2) et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
3. la droite passant par D(2;3) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
4. la droite passant par E(1;2) et parallèle à (FG), avec F(3;2) et G(1;−4).
5. la médiatrice de [AB], avec A(2;1) et B(−4;−7).

Solution.

1. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Une équation de (AB) est donc de la forme $-4x-4y+c=0$. Puisque A est sur la droite (AB), on a $-4\times4-4\times(-1)+c=0$, c'est-à-dire $c=12$. Ainsi, une équation cartésienne de (AB) est $-4x-4y+12=0$, soit $x+y-3=0$. Enfin, un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -1 + 4t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D_2). Une équation de (D_2) est donc de la forme $-x+4y+c=0$. Puisque C est sur la droite (D_2), on a $-1\times1+4\times2+c=0$, c'est-à-dire $c=-7$. Ainsi, une équation cartésienne de (D_2) est $-x+4y-7=0$. Enfin, un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

3. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal, donc une équation de (D_3) passant par D et de vecteur normal $\vec{n}$ est $2x-y+c=0$. Puisque D est sur la droite (D_3), on a alors $2\times2-1\times3+c=0$, soit $c=-1$. Ainsi, une équation de (D_3) est $2x-y-1=0$. Enfin, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D_3), donc un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

4. $\overrightarrow{\text{FG}}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D_4), passant par E et parallèle à (FG). Une équation de (D_4) est donc de la forme $6x-2y+c=0$. Puisque E est sur la droite (D_4), on a $6\times1-2\times2+c=0$, c'est-à-dire $c=-2$. Ainsi, une équation cartésienne de (D_4) est $6x-2y-2=0$, soit

$3x-y-1=0$. Enfin, un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x &= 1 &- 2t \\ y &= 2 &- 6t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

5. M$(x;y)$ est sur la médiatrice de [AB] si et seulement si AM = BM, soit AM^2 = BM^2. On obtient alors

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-1)^2=(x+4)^2+(y+7)^2 &\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+4+1=x^2+y^2+8x+14y+16+49\\ &\Leftrightarrow 12x+16y+60=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la médiatrice (D$_5$) de [AB] est donc $12x+16y+60=0$, soit $3x+4y+15=0$. Un vecteur directeur est alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$, et le milieu de [AB] I$(-1;-3)$ est sur la droite (D$_5$), donc un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x &= -1 &- 4t \\ y &= -3 &+ 3t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Exercice 71. — Déterminer une équation cartésienne, ainsi que le centre et le rayon des cercles suivants :

1. le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2+4x-8y+11=0$.
2. le cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon 4.
3. le cercle de diamètre [AB], avec A$(0;1)$ et B$(2;3)$.

Solution.

1. On constate que

$$\begin{aligned}x^2+y^2+4x-8y+11=0 &\Leftrightarrow x^2+4x+y^2-8y+11=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y-4)^2-16+11=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=9=3^2\end{aligned}$$

Ainsi, il s'agit du cercle, de centre A$(-2;4)$, et de rayon 3.

2. Une équation cartésienne du cercle de centre Ω et de rayon 4 est

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-11=0$$

3. M$(x;y)$ est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{BM}}=0$, soit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{BM}}=0 &\Leftrightarrow (x-0)(x-2)+(y-1)(y-3)=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y+3=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2-1-4+3=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2\end{aligned}$$

Ainsi, il s'agit du cercle, de centre I$(1;2)$ (milieu de [AB]), et de rayon $\sqrt{2}$.

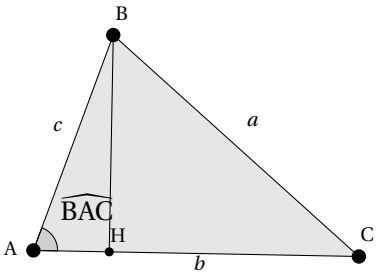
Triangles

Exercice 72. — Soient A, B et C trois points non alignés. On pose $a = \text{BC}$, $b = \text{CA}$ et $c = \text{AB}$. On note s l'aire du triangle ABC et p le demi périmètre du triangle $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1. Montrer la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{\text{BAC}})$.
2. Montrer que $s = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{\text{BAC}})$. Enoncer des formules analogues avec ab et ac.
3. Démontrer la formule des sinus :
$$\frac{a}{\sin(\widehat{\text{BAC}})} = \frac{b}{\sin(\widehat{\text{ABC}})} = \frac{c}{\sin(\widehat{\text{ACB}})}$$
4. Démontrer la formule de Héron :
$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Solution.

1. Remarquons que $a^2 = \text{BC}^2 = \overrightarrow{\text{BC}}^2$. En utilisant la relation de Chasles :
$$\begin{aligned} a^2 &= (\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AC}})^2 \\ &= \overrightarrow{\text{BA}}^2 + 2\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{AC}}^2 \\ &= c^2 - 2\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} + b^2 \\ &= c^2 - 2cb\cos(\widehat{\text{BAC}}) + b^2 \end{aligned}$$
On obtient également les deux autres formules de Al-Kashi :
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{\text{ABC}}) \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{\text{ACB}})$$
2. Notons H le pied de la hauteur issue de B



Par définition, $s = \frac{\text{AC}\times\text{AH}}{2} = \frac{b\times\text{AH}}{2}$. Or, dans le triangle AHB rectangle en H, on a $\sin(\widehat{\text{BAC}}) = \frac{\text{AH}}{\text{AB}} = \frac{\text{AH}}{c}$. On a finalement
$$s = \frac{b \times c\sin(\widehat{\text{BAC}})}{2}$$
On obtient de même
$$s = \frac{ab\sin(\widehat{\text{ACB}})}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{ac\sin(\widehat{\text{ABC}})}{2}$$
3. En utilisant le résultat précédent, on a donc
$$\frac{bc\sin(\widehat{\text{BAC}})}{2} = \frac{ab\sin(\widehat{\text{ACB}})}{2} = \frac{ac\sin(\widehat{\text{ABC}})}{2}$$

En multipliant par 2 et divisant par abc, on en déduit

$$\frac{\sin(\widehat{BAC})}{a} = \frac{\sin(\widehat{ACB})}{c} = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{b}$$

4. On part de la formule vue en 2, en utilisant la formule $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$, valable ici car les angles sont non orientés. On a alors

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC}) \\ &= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2(\widehat{BAC})} \\ &= \frac{1}{2}bc\sqrt{(1-\cos(\widehat{BAC}))(1+\cos(\widehat{BAC}))} \\ &= \sqrt{\frac{bc-bc\cos(\widehat{BAC})}{2}\,\frac{bc+bc\cos(\widehat{BAC})}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant les formules d'Al-Kashi, on a $cb\cos(\widehat{BAC}) = \frac{c^2+b^2-a^2}{2}$. On remplace :

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{2bc-c^2-b^2+a^2}{4}\,\frac{2bc+c^2+b^2-a^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2-(c-b)^2}{4}\,\frac{(c+b)^2-a^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(a-(c-b))(a+c-b)}{4}\,\frac{(c+b-a)(c+b+a}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a-c+b}{2}\,\frac{a-b+c}{2}\,\frac{c+b-a}{2}\,\frac{c+a+b}{2}} \\ &= \sqrt{(p-c)(p-b)(p-a)p} \end{aligned}$$

Exercice 73. — Soient A(0;1), B(2;3) et C(−4;−12). Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution. Le cercle circonscrit est le cercle, de centre Ω, intersection des médiatrices, et de rayon ΩA (ou ΩB ou ΩC). On détermine tout d'abord les équations de deux médiatrices par la méthode classique.

- La médiatrice de [AB] a pour équation $(x-0)^2+(y-1)^2 = (x-2)^2+(y-3)^2$, soit $4x+4y-12=0$, soit $x+y-3=0$.
- La médiatrice de [AC] a pour équation $(x-0)^2+(y-1)^2 = (x+4)^2+(y+12)^2$, soit $-8x-26y-159=0$.

On cherche le point d'intersection Ω des deux médiatrices : on résout ainsi le système

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ -8x - 26y - 159 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{79}{6} \quad \text{et} \quad y = -\frac{61}{6}$$

Pour obtenir le rayon du cercle, on calcule

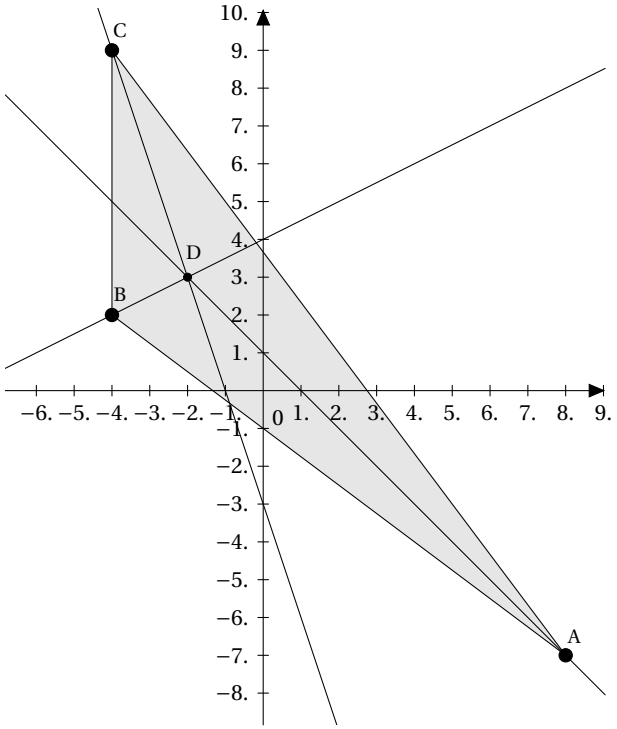
$$r = \Omega A = \sqrt{\left(\frac{79}{6}\right)^2 + \left(\frac{-61}{6}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{10730}{36}}$$

Une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$\left(x-\frac{79}{6}\right)^2+\left(y+\frac{61}{6}\right)^2=\frac{10730}{36}$$

Exercice 74. — Soient A(8;−7), B(−4;2) et C(−4;9). Déterminer une équation du cercle inscrit au triangle ABC.

Solution. Il faut déterminer les équations d'au moins deux bissectrices. Une figure :



Rappelons que M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ si et seulement si $d(\text{M};(\text{AB}))=d(\text{M};(\text{AC}))$.
On détermine tout d'abord les équations cartésiennes de (AB),(AC) et (BC) :

$$(\text{AB}):-9x-12y-12=0,\quad (\text{AC}):-16x-12y+44=0\quad\text{et}\quad (\text{BC}):x=-4$$

- M$(x;y)$ est sur la bissectrice de $\widehat{\text{BAC}}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} d(\text{M};(\text{AB}))=d(\text{M};(\text{AC})) &\Leftrightarrow \frac{|-9x-12y-12|}{15}=\frac{|-16x-12y+44|}{20}\\ &\Leftrightarrow \tfrac{-9x-12y-12}{15}=\tfrac{-16x-12y+44}{20}\quad\text{ou}\quad \tfrac{-9x-12y-12}{15}=-\tfrac{-16x-12y+44}{20}\\ &\Leftrightarrow 60x-60y-900=0\quad\text{ou}\quad -420x-420y+420=0\\ &\Leftrightarrow x-y-15=0\quad\text{ou}-x-y+1=0 \end{aligned}$$

  On dispose de deux bissectrices : l'intérieure, et l'extérieure. On utilise la représentation graphique et le signe du coefficient directeur pour conclure que l'équation de la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ est $-x-y+1=0$.
- On procède de même pour la bissectrice de $\widehat{\text{ABC}}$. On obtient alors $x-2y+8=0$.

- On détermine alors le centre du cercle inscrit en déterminant l'intersection des bissectrices, et donc en résolvant le système

$$\begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 8 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

  On note alors $\Omega(-2;3)$ le centre du cercle.

- Enfin, pour déterminer le rayon, il nous suffit de déterminer la distance du point Ω à l'une des droites (AB), (AC) ou (BC). On obtient

$$r = d(\Omega;(\text{AB})) = \frac{|-9\times(-2)-12\times 3-12|}{15} = 2$$

Bilan : le cercle circonscrit est le cercle, de centre $\Omega(-2;3)$ et de rayon 2. Il a pour équation cartésienne $(x-(-2))^2+(y-3)^2=2^2$, soit $\boxed{x^2+y^2+4x-6y+9=0}$.

Exercice 75. — La droite (AB) a pour équation $x-2y+3=0$, (AC) : $2x-y-3=0$ et (BC) : $x+2y+1=0$. Déterminer les coordonnées du sommet du triangle ABC, ainsi que celle de l'orthocentre.

Solution. Les sommets sont les différents points d'intersection des droites. On obtient ainsi A(3;3), $\text{B}\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ et C(1;−1). Pour déterminer l'équation des hauteurs, on rappelle que la hauteur issue de A coupe la droite (BC) perpendiculairement. Ainsi, $\overrightarrow{\text{BC}}$ est un vecteur normal, et la droite passe par A.

- La hauteur issue de A a pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Elle a donc pour équation cartésienne $3x-\frac{3}{2}y+c=0$, sachant que A est sur la hauteur. Ainsi, $3\times 3-\frac{3}{2}\times 3+c=0$, soit $c=-\frac{9}{2}$. Une équation de la hauteur issue de A est donc (en multipliant par 2 pour simplifier l'écriture) : $\mathscr{H}_\text{A}$: $6x-3y-9=0$, ou encore $2x-y-3=0$.
- De même, la hauteur issue de B a pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc pour équation cartésienne $-2x-4y+c=0$. Puisque B est dessus, on en déduit que $4-2+c=0$, soit $c=-2$. Ainsi, une équation cartésienne de $\mathscr{H}_\text{B}$ est $-2x-4y-2=0$, soit encore $x+2y+1=0$.
- L'orthocentre est l'intersection des hauteurs. En résolvant le système, on obtient alors

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Bilan : l'orthocentre a pour coordonnées (1;−1).

Exercice 76. — Soient A(1;1), B(3;7) et C(−1;3). Déterminer les coordonnées du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Vérifier que ces trois points sont alignés.

Solution. Le centre de gravité G a pour coordonnées $\left(\frac{x_\text{A}+x_\text{B}+x_\text{C}}{3};\frac{y_\text{A}+y_\text{B}+y_\text{C}}{3}\right)$. Ici,

$$\text{G}\left(\frac{1+3-1}{3};\frac{1+7+3}{3}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{G}\left(1;\frac{11}{3}\right)}$$

Pour l'orthocentre, on détermine, comme dans l'exercice précédent, les équations des hauteurs :

- La hauteur issue de A passe par A et a comme vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$. L'équation de la hauteur issue de A est donc $-4x-4y+c=0$, avec $-4-4+c=0$, soit $c=8$. Ainsi, $\mathscr{H}_A : -4x-4y+8=0$, soit $x+y-2=0$.
- De même, $\mathscr{H}_B : -2x+2y-8=0$, soit $x-y+4=0$.
- On résout alors le système pour obtenir les coordonnées de l'orthocentre :

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

L'orthocentre a donc pour coordonnées H$(-1;3)$.
Pour le centre du cercle circonscrit, on détermine l'équation des médiatrices :

— Soit en utilisant la propriété : M est sur la médiatrice du segment [AB] si et seulement si MA = MB.

— Soit en utilisant un vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et un point (le milieu de [AB]).

On a donc ici :

- M$(x;y)$ est sur la médiatrice de [AB] si et seulement si

$$\begin{aligned} AM = BM &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \text{ (ce sont des nombres positifs)} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-7)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-14y+49 \\ &\Leftrightarrow 4x+12y-56=0 \end{aligned}$$

  Une équation de la médiatrice de [AB] est donc $4x+12y-56=0$, soit encore $x+3y-14=0$
- De même, une équation de la médiatrice de [AC] est $-4x+4y-8=0$, soit encore $-x+y-2=0$.
- On résout alors le système pour obtenir les coordonnées de l'orthocentre :

$$\begin{cases} x+3y-14=0 \\ -x+y-2=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

Le centre du cercle circonscrit a donc pour coordonnées $\Omega(2;4)$.
Il nous reste à montrer qu'ils sont alignés. On constate que :

$$\overrightarrow{\Omega G}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega H}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$: les vecteurs sont colinéaires, et donc les points H, G et Ω sont alignés.

Remarque 84. — C'est un résultat général : ils sont alignés sur une droite appelée Droite d'Euler.

Autres

Exercice 77. — Soient A$(1;1)$, B$(3;0)$ et C$(3;3)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.
Calculer l'aire du parallélogramme, et la distance de C à la droite (AD).

Solution. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. En notant $D(x_D; y_D)$, alors on a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_D \\ 3 - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_D = 1 \quad \text{et} \quad y_D = 4$$

Ainsi, D a pour coordonnées $(1;4)$.

L'aire du parallélogramme ABCD est donné par $[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}]$, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\mathscr{A}_{ABCD} = 2 \times 3 - (-1) \times 0 = 6$$

L'aire du parallélogramme ABCD est donc de 6 unités d'aire. Cette aire est également donné par AD × CH, où H est le projet orthogonal de C sur (AD). Ainsi,

$$d(C,(AD)) = CH = \frac{\mathscr{A}_{ABCD}}{AD} = \frac{6}{3} = 2$$

Exercice 78 (Construction géométrique de l'inverse)**.** — Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère $M(t;0)$, avec $t > 1$.

1. Montrer que l'abscisse a d'un point de contact $P(a;b)$ de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par M vérifie $a = 1/t$.
2. Soit M un point d'abscisse $t > 1$ sur une droite graduée. Décrire une construction géométrique de N d'abscisse $1/t$.
3. Soit N un point d'abscisse $0 < t < 1$ sur une droite graduée. Décrire une construction géométrique de M d'abscisse $1/t$.

CHAPITRE 5

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Résumé

Ce chapitre est l'occasion de revenir sur un concept vu en Physique et en S.I : les équations différentielles linéaires. On verra différentes méthodes de résolution, et le lien avec les autres matières scientifiques.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les équations différentielles du premier ordre :
- Savoir trouver des primitives simples ..... □
- Savoir résoudre des équations du premier ordre sans second membre ..... □
- Savoir trouver la forme générale des équations du premier ordre avec second membre ..... □
- Savoir déterminer une solution particulière par la variation de la constante ..... □
- Savoir déterminer une solution particulière simple ..... □
- Savoir déterminer une solution particulière par le principe de superposition ..... □

② Concernant les équations différentielles du second ordre :
- Savoir résoudre les équations sans second membre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ..... □
- Savoir trouver la forme générale des équations du premier ordre avec second membre ..... □
- Savoir trouver une solution particulière avec second membre exponentielle-polynôme ..... □

③ Savoir résoudre un problème de Cauchy ..... □

Dans l'ensemble de ce cours, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera de manière générique $\mathbb{K}$ le corps d'arrivée des fonctions.

I. Notions d'équation différentielle

1) Généralités

Définition 85. — On appelle **équation différentielle** d'ordre n une égalité liant la variable réelle x, une fonction inconnue y, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et ses dérivées successives $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Remarque 85. — Si la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que l'équation est scalaire. C'est l'objectif de ce chapitre. On verra plus tard dans l'année les équations différentielles vectorielles, où la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$.

Exemple 95. — Les équations suivantes sont des équations différentielles scalaires du premier ordre

$$y' + xy = 3x, \qquad y' = \frac{1}{x}, \qquad y' = y^2 + y, \qquad y' = ay \ (a \in \mathbb{R})$$

$y'' + 3y' + 4y = e^x$ est une équation différentielle scalaire du second ordre.

Définition 86. — On appelle **solution maximale** d'une équation différentielle une fonction f satisfaisant l'équation différentielle, et définie sur un intervalle I maximal, c'est-à-dire une fonction ne pouvant être prolongée sur un intervalle plus grand.

Remarque 86. — Résoudre une équation différentielle, c'est trouver **l'ensemble** de ses solutions maximales.
On appellera alors **courbe intégrale** la courbe représentative d'une fonction maximale.

Remarque 87. — Nous allons cette année apprendre à résoudre certaines équations différentielles. Il arrive cependant très souvent qu'on arrive pas à exprimer les solutions d'une équation différentielle avec les fonctions usuelles. On essaie alors de représenter graphiquement une solution.

2) Problème de Cauchy

Définition 87. — Soit (E) une équation différentielle d'ordre n. On appelle **problème de Cauchy** la donnée de l'équation différentielle, et de n conditions initiales sur les valeurs de la fonction y et de ses dérivées en un réel x_0.

Exemple 96. — Par exemple, $y' = 3xy + 4$, avec $y(0) = 1$, est un problème de Cauchy.

3) Equations différentielles linéaires

Définition 88. — Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$(\text{E}) \ : \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

où $a_0, \cdots, a_n$ et f sont des fonctions continues sur un intervalle I.
f est appelé le **second membre** de l'équation différentielle linéaire.
Si f est la fonction nulle, on dit que l'équation linéaire est **homogène** ou **sans second membre**.
Si $a_0, \cdots, a_n$ sont des constantes, on dit que l'équation est à **coefficients constants**.

Exemple 97. — Les équations différentielles suivantes sont linéaires :

$$y' + 2xy = \mathrm{e}^x \qquad y'' + 2xy' + \ln(x)y = 1 \qquad y^{(3)} + y' = \frac{1}{x}$$

En revanche, $y' = y^2$ n'est pas linéaire.

II. Equations différentielles linéaires du premier ordre

1) Généralités

Définition 89. — Une équation différentielle du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple 98. — L'équation $y' = xy + \mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
L'équation $y' = 3y + 4x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants.

Définition 90. — Soit (E) $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y$. Il s'agit également d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 99. — Les équations homogènes associées aux deux exemples précédents sont $y' = xy$ et $y' = 3y$.

Théorème 5.1.

Soit (E) une équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, avec $y(x_0) = y_0$. Alors il existe une unique solution à ce problème de Cauchy.

Remarque 88. — Ainsi, il s'agira de trouver la seule solution si on dispose d'un problème de Cauchy.

2) Résolution d'une équation homogène

Théorème 5.2.

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y$. L'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

où A est une primitive de a sur I.

Démonstration. a étant continue sur I, elle y admet des primitives. On note A une primitive de a. Remarquons alors que f est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = a(x)f(x) &\Leftrightarrow f'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} = a(x)f(x)e^{-\mathrm{A}(x)} \quad \text{car } \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} > 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} + f(x)\left(-a(x)e^{-\mathrm{A}(x)}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (fe^{-\mathrm{A}})'(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ est une fonction constante sur I. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = k \Leftrightarrow f(x) = k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$$

Réciproquement, une fonction de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ est solution de (E). □

Exemple 100. — Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = xy$.

Solution. Soit a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = x$. Une primitive de a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{A} : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $y' = xy$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 79. — Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{x}$, avec $y(1) = 1$.

Solution. On note a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $a(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\mathrm{A} : x \mapsto \ln(x)$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation $y' = \frac{y}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\ln(x)} = kx, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Avec la condition $y(1) = 1$, on obtient $k \times 1 = 1$, c'est-à-dire $k = 1$. Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$$

3) Cas général

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on se ramène à une équation homogène, selon deux méthodes possibles.

Proposition 5.3.

Soit (E) $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire, avec a et b deux fonctions continues sur I.
Soit (E_0) l'équation différentielle homogène associée : (E_0) $y' = a(x)y$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^{A(x)}$, où A est une primitive de a et $k \in \mathbb{R}$.
Soit g une solution particulière de (E) : pour tout $x \in$ I, $g'(x) = a(x)g(x) + b(x)$.
Alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto g(x) + ke^{A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Soit g une solution particulière de (E).

- Soit f une solution de (E). Notons $h = f - g$. Alors, pour tout réel $x \in$ I

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= (a(x)f(x) + b(x)) - (a(x)g(x) + b(x)) \\ &= a(x)(f(x) - g(x)) \\ &= a(x)h(x) \end{aligned}$$

  Ainsi h est une solution de l'équation homogène associée (E_0).
- Réciproquement, soit h une solution de l'équation (E_0). On note $f = h + g$. Alors, pour tout réel $x \in$ I :

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x) + g'(x) \\ &= a(x)h(x) + (a(x)g(x) + b(x)) \\ &= a(x)(h(x) + g(x)) + b(x) \\ &= a(x)f(x) + b(x) \end{aligned}$$

  et donc f est solution de (E).

Ainsi, f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0), ce qui donne le théorème. □

Remarque 89. — Ainsi, connaissant une solution particulière de l'équation générale, il suffit de résoudre l'équation homogène associée, et d'ajouter à ses solutions la solution particulière.

Méthode 5.1.

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre (E) : $y' = a(x)y + b(x)$ sur un intervalle I.

① on résout l'équation différentielle homogène associée : (E_0) : $y' = a(x)y$.

② on cherche une solution particulière de (E).

③ on conclut quant à l'ensemble des solutions de (E).

Exemple 101 (Fondamental)**.** — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \neq 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Solution. On (E) l'équation $y' = ay + b$ et (E_0) l'équation homogène associée $y' = ay$.

- Une primitive de la fonction $x \mapsto a$ est $x \mapsto ax$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto ke^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

- Cherchons une solution particulière constante : soit $f : x \mapsto p$. Alors

$$\begin{aligned} f' = af + b &\Leftrightarrow 0 = a \times p + b \\ &\Leftrightarrow p = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de (E).

Bilan : l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 80. — Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2y + x$, avec $y(0) = 1$.

Solution. Comme précédemment, l'ensemble des solutions de l'équation $y' = 2x$ est

$$\mathscr{S}_0 = \{ x \mapsto ke^{2x}, \quad k \in \mathbb{R} \}$$

Le second membre étant $x \mapsto x$, cherchons une solution particulière de la forme $x \mapsto ax+b$. f est donc solution si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) = 2f(x) + x &\Leftrightarrow a = 2(ax+b) + x \\ &\Leftrightarrow (2a+1)x + 2b - a = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $2a+1 = 0$ et $2b - a = 0$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Bilan : l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2y + x$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto ke^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec l'hypothèse $y(0) = 1$, cela donne $k - \frac{1}{4} = 0$, et donc $k = \frac{1}{4}$.

Bilan : la solution de l'équation $y' = 2y + x$, avec $y(0) = 1$ est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$$

Méthode 5.2 (Principe de superposition).

Pour déterminer une solution particulière : Si on souhaite résoudre l'équation $y' + ay = f + g$, on peut chercher une solution particulière y_1 de $y' + ay = f$ et une autre y_2 de $y' + ay = g$. Alors, $y_1 + y_2$ est solution de $y' + ay = f + g$.

4) Méthode de variation de la constante

Méthode 5.3 (Variation de la constante).

Soit (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$. Les solutions de l'équation $y' = a(x)y$ sont $x \mapsto ke^{A(x)}$ où A est une primitive de a.

Pour déterminer une solution particulière de (E), on cherche une solution sous la forme $x \mapsto k(x)e^{A(x)}$,

où k est cette fois-ci une fonction dérivable sur l'intervalle, et non une constante.

Exemple 102. — Soit (E) l'équation différentielle $y' = 2xy + x$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont $x \mapsto ke^{x^2}$. Cherchons une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto k(x)e^{x^2}$, où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. f vérifie donc, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) = 2xf(x) + x &\Leftrightarrow k'(x)e^{x^2} + k(x)(2xe^{x^2}) = 2xk(x)e^{x^2} + x \\ &\Leftrightarrow k'(x) = xe^{-x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $k : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, on obtient ainsi une solution particulière de (E) :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et les solutions de (E) sont alors

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto ke^{x^2} - \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque 90. — Dans le cas précédent, on aurait pu chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax + b$, ce qui était plus efficace.

Exercice 81. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(e^x + 1)y' = e^x y + 2x(e^x + 1)^2$$

Solution. Pour tout réel x, $e^x + 1 > 0$, l'équation est donc équivalente à l'équation

$$\text{(E)} \quad y' = \frac{e^x}{e^x + 1}y + 2x(e^x + 1)$$

- La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \ln(e^x + 1)$. Ainsi, l'équation homogène $y' = \dfrac{e^x}{e^x + 1}y$ admet comme solutions

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ x \mapsto ke^{\ln(e^x+1)} = k(e^x + 1), \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

- Cherchons une solution particulière par variation de la constante. On cherche une solution f de la forme $f : x \mapsto k(x)(e^x + 1)$, où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors $f' : x \mapsto k'(x)(e^x + 1) + k(x)e^x$ et l'équation différentielle (E) s'écrit

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}f(x) + 2x(e^x + 1) &\Leftrightarrow k'(x)(e^x + 1) + k(x)e^x = k(x)(e^x + 1)\frac{e^x}{e^x + 1} + 2x(e^x + 1) \\ &\Leftrightarrow k'(x)(e^x + 1) = 2x(e^x + 1) \\ &\Leftrightarrow k'(x) = 2x \end{aligned}$$

En prenant comme primitive $k : x \mapsto x^2$, on obtient donc une solution particulière de (E) : $f : x \mapsto k(x)(e^x + 1) = x^2(e^x + 1)$.

Bilan : l'ensemble des solutions de (E) est donc

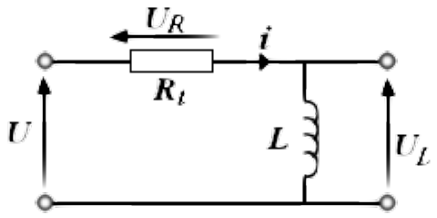
$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto x^2(\mathrm{e}^x+1) + k(\mathrm{e}^x+1), \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

5) En physique et S.I.

En électronique, il y a deux cas classiques d'équation différentielle du premier ordre : le circuit RL et le circuit RC.

Proposition 5.4.

Soit le circuit RL suivant :



En régime transitoire, la tension $\mathrm{U_L}$ vérifie $\mathrm{U_L} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et la tension $\mathrm{U_R}$ vérifie $\mathrm{U_R} = \mathrm{R}_t i$. D'après la loi des mailles, $\mathrm{U} = \mathrm{U_R} + \mathrm{U_L}$, et donc i vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$\mathrm{U} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}_t i = \mathrm{L}i' + \mathrm{R}_t i$$

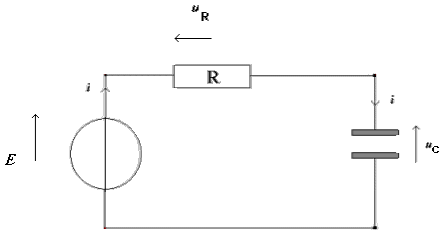
Ainsi, si $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0$ est constante, et en supposant comme condition initiale $i(0) = 0$, on obtient

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = \frac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{R}_t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{R}_t t}{\mathrm{L}}}\right)$$

On pose alors $\tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}_t}$ la constante de temps du circuit.

Proposition 5.5.

Soit le circuit RC suivant :



En régime transitoire, la tension $\mathrm{U_R}$ vérifie $\mathrm{U_R} = \mathrm{R}i$, et la tension $\mathrm{U_C}$ vérifie $i = \mathrm{C}\frac{\mathrm{dU_C}}{\mathrm{d}t}$. D'après la loi des mailles, $\mathrm{E} = \mathrm{U_R} + \mathrm{U_C}$, et donc $\mathrm{U_C}$ vérifie l'équation différentielle

$$\mathrm{E} = \mathrm{RC}\frac{\mathrm{dU_C}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{U_C}$$

Ainsi, si E est constante, et en supposant comme condition initiale $\mathrm{U_C}(0) = 0$ (condensateur déchargé),

on obtient

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad \mathrm{U_C}(t) = \mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}\right)$$

On pose alors $\tau = \mathrm{RC}$ la constante de temps du circuit.

III. Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

1) Généralités

Définition 91. — Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b et c sont des réels ou des complexes, et d une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple 103. — L'équation $y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant.
L'équation $y'' + xy' + y = 4x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, mais pas à coefficients constants.

Définition 92. — Soit (E) $ay'' + by' + cy = d(x)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Il s'agit également d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Exemple 104. — L'équation homogène associée à l'équation $y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^x$ est $y'' + 3y' - y = 0$.

Théorème 5.6.

Soit (E) une équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$ ($a \neq 0$), avec $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$. Alors il existe une unique solution à ce problème de Cauchy.

Remarque 91. — Ainsi, il s'agira de trouver la seule solution si on dispose d'un problème de Cauchy.

2) Résolution de l'équation homogène

Définition 93. — Soit (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ une équation du second ordre à coefficients constants sans second membre. On appelle **équation caractéristique** de l'équation (E) l'équation du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c = 0$.

Dans le cas général complexe, les solutions sont faciles à obtenir :

Théorème 5.7.

Soit (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ une équation du second ordre à coefficients constants sans second membre, et $az^2 + bz + c = 0$ son équation caractéristique. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, on note z_1 et z_2 les deux racines complexes de l'équation caractéristique. Alors les

solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ae^{z_1 x} + Be^{z_2 x}$$

où A et B sont des complexes.

- Si $\Delta = 0$, on note z_0 la racine double de l'équation caractéristique. Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto (Ax + B)e^{z_0 x}$$
où A et B sont des complexes.

Dans le cas où a, b et c sont réels, on souhaite obtenir les solutions à valeurs réelles. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 5.8.

Soit (E) l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$, où α et β sont les racines de l'équation caractéristique et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0$, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto (Ax + B)e^{\alpha x}$, où α est la racine double de l'équation caractéristique et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$, on note $z_1 = k + i\omega$ et $z_2 = k - i\omega$ les racines complexes de l'équation caractéristique. Alors, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{kx}$.

Exemple 105. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Solution. L'équation caractéristique de l'équation est $x^2 - 2x - 3 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$. Ains, l'équation caractéristique possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' - 3y = 0$ s'écrit

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ae^{-x} + Be^{3x}, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 82 (Fondamental)**.** — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$.

Solution. Son équation caractéristique est $x^2 + \omega^2 x = 0$, de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$. Elle possède donc deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-2i\omega}{2} = -\omega i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2i\omega}{2} = i\omega$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^0 = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 83. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + y = 0$.

Solution. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0$, de racine double $x = -1$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{-x}, \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

3) Cas général

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, on se ramène à une équation homogène.

Proposition 5.9.

Soit (E) $ay'' + by' + cy = d(x)$ une équation différentielle linéaire, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et d une fonction continue sur I.
Soit (E_0) l'équation différentielle homogène associée : (E_0) $ay'' + by' + cy = 0$.
Soit g_0 une solution particulière de (E) : pour tout $x \in \mathrm{I}$, $ag_0''(x) + bg_0'(x) + cg(x) = d(x)$.
Alors l'ensemble des solutions de (E) sur I s'écrit $g + g_0$, avec g une solution de l'équation homogène associée :

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto g_0(x) + g(x), \quad g \text{ solution de } (\mathrm{E}_0)\right\}$$

Méthode 5.4.

Pour déterminer une solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $\mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$, avec P un polynôme de degré n, on cherche une solution de la forme

- $x \mapsto \mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ si γ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto x\mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ si γ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto x^2\mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ si γ est racine double de l'équation caractéristique ;

où Q est un polynôme de degré n.
On peut utiliser cette méthode si le second membre est un polynôme ($\gamma = 0$) ou une exponentielle (P de degré 0).

Remarque 92. — De manière générale, on cherche une solution particulière de la même forme que le second membre, éventuellement en augmentant le degré d'un polynôme.

Exemple 106. — Déterminer les solutions de l'équation $y'' + y = x + 1$.

Solution. L'équation homogène s'écrit $y'' + y = 0$, qui a comme solution

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x), \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

(cas vu précédemment, où $\omega = 1$). Puisque $x + 1 = (x+1)\mathrm{e}^{0x}$, et que 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, cherchons une solution particulière de la même forme, c'est-à-dire cherchons c et d deux réels tels que $f : x \mapsto cx + d$ soit solution de l'équation. En injectant dans l'équation (et puisque $f'' = 0$), on obtient

$$cx + d = x + 1 \Leftrightarrow c = 1 \quad \text{et} \quad d = 1$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x+1$ est solution particulière.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation $y'+y=x+1$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto x+1+\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x), \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 84. — Déterminer les solutions de l'équation $y''-4y'+4y=\mathrm{e}^{2x}$.

Solution. Notons (E) : $y''-4y'+4y=\mathrm{e}^{2x}$ et (E_0) son équation homogène $y''-4y'+4y=0$.

- L'équation caractéristique de l'équation homogène est $r^2-4r+4=(r-2)^2$ qui admet donc 2 comme racine double. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto (\mathrm{A}x+\mathrm{B})\mathrm{e}^{2x}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Puisque 2 est racine double de (E_0), on ne peut pas chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto c\mathrm{e}^{2x}$, ni même $x \mapsto (cx+d)\mathrm{e}^{2x}$ puisque celles-ci sont solutions de l'équation homogène. On cherche alors une solution de la forme $f : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}$. On obtient

$$f' : x \mapsto (2ax^2+(2b+2a)x+2c+b)\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto (4ax^2+(8a+4b)x+2a+4c+4b)\mathrm{e}^{2x}$$

En injectant dans l'équation (E), on a alors

$$(4ax^2+(8a+4b)x+2a+4c+4b)\mathrm{e}^{2x}-4(2ax^2+(2b+2a)x+2c+b)\mathrm{e}^{2x}+4(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}$$

Soit, après simplification $2a=1$ et donc $a=\frac{1}{2}$. b et c sont quelconques, et c'est normal puisque $x \mapsto (cx+d)\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation homogène. Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière de (E).

Bilan : l'équation (E) admet comme solutions sur $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}+(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\mathrm{e}^{2x}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Remarque 93. — Le principe de superposition s'applique aussi dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constant : si on cherche une solution particulière de l'équation $ay''+by'+cy=d_1+d_2$, il suffit de trouver une solution particulière y_1 de $ay''+by'+cy=d_1$ et une solution particulière y_2 de $ay''+by'+cy=d_2$; une solution de l'équation de départ est alors y_1+y_2.

Méthode 5.5.

Si le second membre est lié aux fonctions trigonométriques, on écrit $\cos(x)=\Re(\mathrm{e}^{ix})$ et $\sin(x)=\Im(\mathrm{e}^{ix})$, et on se ramène à une équation dont le second membre est une exponentielle.

Exemple 107. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'+y=\cos(x)$.

Solution. L'équation homogène associée est $y'+y=0$, de solution

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière de l'équation $y'+y=\mathrm{e}^{ix}$, de la forme $f : x \mapsto a\mathrm{e}^{ix}$ (puisque $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$

n'est pas solution de l'équation homogène). En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} f'+f=\mathrm{e}^{ix} &\Leftrightarrow ai\mathrm{e}^{ix}+a\mathrm{e}^{ix}=\mathrm{e}^{ix}\\ &\Leftrightarrow a(1+i)=1\\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de $y'+y=\mathrm{e}^{ix}$ est

$$\begin{aligned} x\mapsto\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\mathrm{e}^{ix} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(\cos(x)+i\sin(x))\\ &= \frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+i\left(\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)\end{aligned}$$

La partie réelle de la solution précédente (puisque $\cos(x)=\Re(\mathrm{e}^{ix})$) donne alors une solution particulière de $y'+y=\cos(x)$.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation $y'+y=\cos(x)$ est donc

$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+k\mathrm{e}^{-x},\quad k\in\mathbb{R}\right\}$$

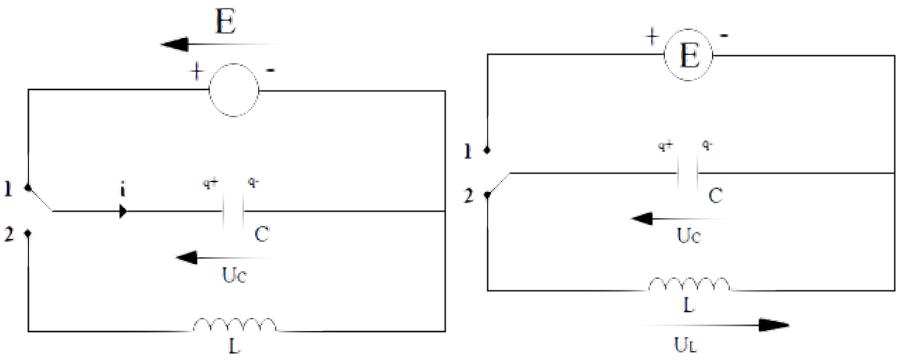
Remarque 94. — Le second membre étant trigonométrique, on aurait pu chercher une solution particulière de la forme $x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$, en identifiant les parties "cosinus" et les parties "sinus".

4) En physique et S.I.

Les cas des circuits LC et RLC mènent à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.

Proposition 5.10.

Soit le circuit LC suivant :



Après avoir chargé le condensateur (première image), on bascule l'interrupteur pour déclencher la décharge de celui-ci à travers la bobine.
En régime transitoire, la tension U_L vérifie $U_L=L\frac{di}{dt}$ et la tension U_C vérifie $U_C=\frac{q}{c}$ avec $i=\frac{dq}{dt}$. D'après la loi des mailles, $0=U_C+U_L$, et donc, en dérivant cette équation par rapport au temps, i vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i=0$$

qui s'écrit encore

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\mathrm{LC}} i = 0$$

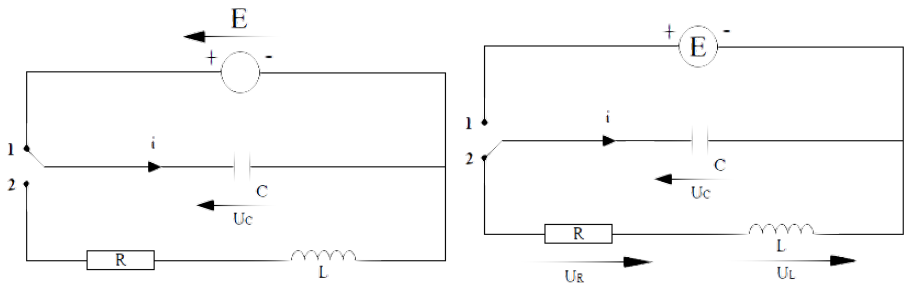
En notant $\omega = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$, l'équation s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 i = 0$, qui a comme solutions

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t) = \mathrm{C}\cos(\omega t + \varphi)$$

On détermine alors les constantes grâce aux conditions initiales.
$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ représente la période.

Proposition 5.11.

Soit le circuit RLC suivant :



Après avoir chargé le condensateur (première image), on bascule l'interrupteur pour déclencher la décharge de celui-ci à travers la bobine et la résistance.
En régime transitoire, la tension $\mathrm{U_L}$ vérifie $\mathrm{U_L} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, la tension $\mathrm{U_C}$ vérifie $\mathrm{U_C} = \frac{q}{c}$ avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $\mathrm{U_R} = \mathrm{R}i$.
D'après la loi des mailles, $0 = \mathrm{U_R} + \mathrm{U_C} + \mathrm{U_L}$, et donc, en dérivant cette équation par rapport au temps, i vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{C}} i = 0$$

qui s'écrit encore

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{LC}} i = 0$$

En notant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$ la pulsation propre du circuit et $\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}$, où $\mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}$ est le facteur de qualité, l'équation s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0$.
On dispose de trois cas, selon le signe du discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{\mathrm{Q}^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{\mathrm{Q}^2} - 4\right)$:

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $\mathrm{Q} < \frac{1}{2}$, on obtient des solutions de la forme

  $$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = \mathrm{A}e^{k_1 t} + \mathrm{B}e^{k_2 t}$$

  avec k_1, k_2 solutions de l'équation caractéristique. Le régime est dit **apériodique**. k_1 et k_2 sont strictement négatives, et sont généralement notés $-\frac{1}{\tau_+}$ et $-\frac{1}{\tau_-}$.
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $\mathrm{Q} = \frac{1}{2}$, on obtient des solutions de la forme

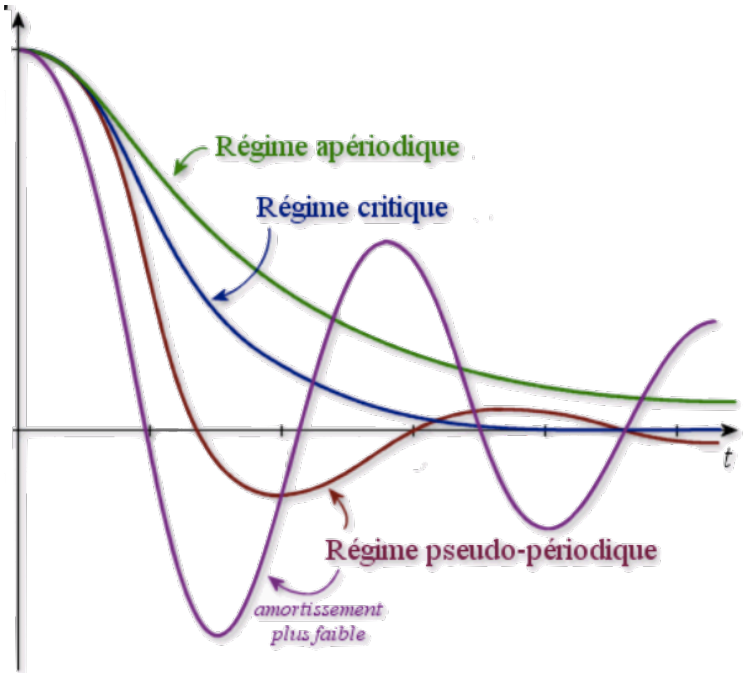
  $$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = (\mathrm{A}t + b)e^{k_0 t}$$

où $k_0 = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$ est la racine double de l'équation caractéristique. Ce régime est appelé **régime critique**.

- Enfin si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{2}$, on obtient des solutions de la forme

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$, appelée pseudo-pulsation. Le régime est dit **pseudo-périodique**.



fFileExiststex/Chap5/Exo5

Exercices

Équations différentielles

Exercice 85. — Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 2\mathrm{e}^x$.
2. $x' + x = \sin(2t)$.
3. $y' - y = t\mathrm{e}^{-t}$.
4. $y' - y = 2t\,\mathrm{ch}(t)$.

Solution. Pour l'ensemble de cet exercice, l'idée est de trouver des solutions particulières de la même forme globale que le second membre, ou d'appliquer le principe de superposition pour la quatrième.

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est
$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$
Puisque $x \mapsto \mathrm{e}^x$ n'est pas solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto a\mathrm{e}^x$, où $a \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation (E_1) : $y' + y = 2\mathrm{e}^x$, on obtient alors
$$a\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x \Leftrightarrow a = 1$$
Ainsi, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution particulière de l'équation (E_1).
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_1) est donc
$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \mathrm{e}^x + k\mathrm{e}^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$
2. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est
$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto k\mathrm{e}^{-t}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$
Puisque $t \mapsto \sin(t)$ est trigonométrique, on peut chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En injectant dans l'équation (E_2) : $x' + x = \sin(2t)$, on obtient alors
$$-2a\sin(2t) + 2b\cos(2t) + a\cos(2t) + b\sin(2t) = \sin(2t) \Leftrightarrow (2b+a)\cos(2t) + (b-2a-1)\sin(2t) = 0$$
Cela implique $2b + a = 0$ et $b - 2a - 1 = 0$, soit $a = -\frac{2}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$. Ainsi, $t \mapsto \frac{-2\cos(2t)+\sin(2t)}{5}$ est solution particulière de l'équation (E_1).
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_2) est donc
$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \frac{-2\cos(2t) + \sin(2t)}{5} + k\mathrm{e}^{-t}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$
Remarque : on aurait aussi pu résoudre l'équation $x' + x = \mathrm{e}^{2it}$, puis prendre la partie imaginaire.
3. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est
$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto k\mathrm{e}^{t}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ n'est pas solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire de la même forme que le second membre).
En injectant dans l'équation (E_3) : $y' - y = t\mathrm{e}^{-t}$, on obtient alors

$$(-at + (a-b))\mathrm{e}^{-t} - (at+b)\mathrm{e}^{-t} = t\mathrm{e}^{-t} \Leftrightarrow -2at + (a-2b) = t$$

Par identification, on a alors $-2a = 1$ et $a - 2b = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Ainsi, $t \mapsto \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t}$ est solution particulière de l'équation (E_1).
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t} + k\mathrm{e}^{t}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

4. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \mapsto k\mathrm{e}^{t}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarquons que le second membre s'écrit

$$2t\,\mathrm{ch}(t) = 2t\frac{\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}}{2} = t\mathrm{e}^{t} + t\mathrm{e}^{-t}$$

Utilisons le principe de superposition, et cherchons des solutions particulières de $y' - y = t\mathrm{e}^{t}$ et $y' - y = t\mathrm{e}^{-t}$.

— Pour $y' - y = t\mathrm{e}^{-t}$, d'après l'équation 3, une solution particulière est $t \mapsto \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t}$.

— Pour $y' - y = t\mathrm{e}^{t}$, remarquons que $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$ est une solution de l'équation homogène associée. On ne doit donc pas chercher une solution de la forme $t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{t}$, mais plutôt $t \mapsto (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{t}$.
Après remplacement dans l'équation, cela donne

$$(at^2 + (2a+b)t + b + c)\mathrm{e}^{t} - (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{t} = t\mathrm{e}^{t}$$

soit, après simplification

$$2at + b = t$$

Après identification, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et c est quelconque (puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$ est solution de l'équation homogène associée). Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{t}$ est solution de $y' - y = t\mathrm{e}^{t}$.

Par superposition, la fonction $t \mapsto \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{t}$ est solution de l'équation (E_4) : $y' - y = 2t\,\mathrm{ch}(t)$.
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_4) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{t} + k\mathrm{e}^{t}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 86. — Résoudre l'équation différentielle :

$$xy' - 2y = x^2\ln(x)$$

Solution. Remarquons que l'équation n'a un sens que sur $\mathbb{R}_+^*$, vu le second membre. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \neq 0$ et

l'équation est donc équivalente à l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - \frac{2}{x} y = x\ln(x)$$

La fonction $x \mapsto 2\ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ x \mapsto k\mathrm{e}^{2\ln(x)} = k\mathrm{e}^{\ln(x^2)} = kx^2, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Procédons à une variation de la constante pour déterminer une solution particulière. On cherche ainsi une fonction $k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable, pour laquelle $f : x \mapsto k(x)x^2$ est solution de (E). f est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$f' : x \mapsto k'(x)x^2 + 2k(x)x$$

Ainsi, f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = x\ln(x) \quad &\Leftrightarrow \quad k'(x)x^2 + 2k(x)x - \frac{2}{x}k(x)x^2 = x\ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad k'(x)x^2 = x\ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad k'(x) = \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Une primitive de $k' : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $k : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x))^2$. Ainsi, une solution particulière est

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x))^2 x^2 = \frac{1}{2}(x\ln(x))^2$$

Bilan : l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}(x\ln(x))^2 + kx^2, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 87. — Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.
2. $xy' + y = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. L'objectif de cet exercice est d'appliquer la méthode de la variation de la constante.

1. Puisque $1 + x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, l'équation s'écrit également

$$(\mathrm{E}_1) : \quad y' - \frac{2x}{1+x^2} y = (1+x^2)$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \ln(1+x^2)$, et donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ x \mapsto k\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)} = k(1+x^2), \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons une solution particulière par variation de la constante. On cherche f de la forme $f : x \mapsto k(x)(1+x^2)$, avec k une fonction dérivable. On a alors

$$f' : x \mapsto k'(x)(1+x^2) + k(x)(2x)$$

et l'équation (E_1) s'écrit alors

$$k'(x)(1+x^2) + k(x)(2x) - \frac{2x}{1+x^2} k(x)(1+x^2) = (1+x^2) \Leftrightarrow k'(x)(1+x^2) = (1+x^2)$$

Ainsi, $k'=1$ et $k : x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$. Ainsi, une solution particulière de (E_1) est donc $x \mapsto k(x)(1+x^2) = x(1+x^2)$.
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto x(1+x^2) + k(1+x^2), \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Puisque $x \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation s'écrit également

$$(E_2) : \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\ln(x)$, et donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto ke^{-\ln(x)} = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière par variation de la constante. On cherche f de la forme $f : x \mapsto k(x)\frac{1}{x}$, avec k une fonction dérivable. On a alors

$$f' : x \mapsto k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}$$

et l'équation (E_1) s'écrit alors

$$k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}k(x)\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x}k'(x) = \frac{e^x}{x}$$

Ainsi, $k'(x) = e^x$. La fonction $k : x \mapsto e^x$ convient, et $x \mapsto k(x)\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière de (E_2).
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_2) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{e^x}{x} + \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 88. — Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$.
3. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(2x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Solution.

1. Notons (E_1) l'équation $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ qui a pour racine double $r = 1$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto (at+b)e^t, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Appliquons le principe de superposition :

— Pour $y'' - 2y' + y = t^2$, cherchons une solution particulière de la forme $f : t \mapsto at^2 + bt + c$. En injectant, on obtient

$$2a - 2(2at+b) + at^2 + bt + c = t^2 \Leftrightarrow at^2 + (b-4a)t + c + 2a - 2b = t^2$$

Par identification des coefficients, on obtient ainsi $a = 1$, $b = 4$ et $c = 6$. Ainsi, $f : t \mapsto t^2 + 4t + 6$ est solution particulière de $y'' - 2y' + y = t^2$.

— Pour $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2t}$, on cherche une solution particulière de la forme $g : t \mapsto a\mathrm{e}^{2t}$. En injectant, on obtient

$$4a\mathrm{e}^{2t} - 2(2a\mathrm{e}^{2t}) + a\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t} \Leftrightarrow a = 1$$

Ainsi, $g : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2t}$.

Par superposition, la fonction $t \mapsto t^2 + 4t + 6 + \mathrm{e}^{2t}$ est solution particulière de (E_1).
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto t^2 + 4t + 6 + \mathrm{e}^{2t} + (at + b)\mathrm{e}^t, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

2. Notons (E_2) l'équation $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 5$ qui a pour discriminant $\Delta = -16$ et pour racines $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto (a\cos(2x) + b\sin(2x))\mathrm{e}^x, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Cherchons une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. En injectant, on obtient

$$2a - 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1 \Leftrightarrow 5ax^2 + (5b - 4a)x + 5c + 2a - 2b = x^2 + 1$$

Par identification des coefficients, on obtient ainsi $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{4}{25}$ et $c = \frac{23}{125}$. Ainsi, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{23}{125}$$

est solution particulière de (E_2).
Bilan : l'ensemble des solutions de (E_2) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{23}{125} + (a\cos(2x) + b\sin(2x))\mathrm{e}^x, \quad (a, b) \in \mathbb{R}\right\}$$

3. Notons (E_3) l'équation $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2$ qui a pour discriminant $\Delta = 1$ et pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{2x}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Appliquons le principe de superposition :

— Pour $y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$, cherchons une solution particulière de la forme $f : x \mapsto a\mathrm{e}^{-2x}$. En injectant, on obtient

$$4a\mathrm{e}^{-2x} - 3(-2\mathrm{e}^{-2x}) + 2a\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow 12a = -\frac{1}{2}$$

On obtient ainsi $a = -\frac{1}{24}$. Ainsi, $f : x \mapsto -\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

— Pour $y''-3y'+2=\frac{1}{2}e^{2x}$, puisque $x\mapsto e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de la forme $g:x\mapsto(ax+b)e^{2x}$. En injectant, on obtient

$$e^{2x}(4ax+(4a+4b))-3e^{2x}(2ax+(a+2b))+2e^{2x}(ax+b)=\frac{1}{2}e^{2x}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Ainsi, on peut prendre $b=0$ (cohérent car $x\mapsto e^{2x}$ est solution de l'équation homogène) et $g:x\mapsto\frac{1}{2}xe^{2x}$ est une solution particulière de l'équation $y''-3y'+2y=\frac{1}{2}e^{2x}$.

Par superposition, la fonction $x\mapsto-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}$.

Bilan : l'ensemble des solutions de (E_3) est donc

$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+ae^{x}+be^{2x},\quad(a,b)\in\mathbb{R}\right\}$$

Problèmes et sujets

Exercice 89 (ATS 2010)**.** — Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2y'-xy=-x^4-1$$

Solution. On doit diviser par x^2. On va donc résoudre l'équation sur deux intervalles distincts : $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Occupons-nous de $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation s'écrit alors

$$(E):\quad y'-\frac{1}{x}y=-x^2-\frac{1}{x^2}$$

$x\mapsto\ln(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x\mapsto\frac{1}{x}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathscr{S}_0=\left\{x\mapsto ke^{\ln(x)}=kx,\quad k\in\mathbb{R}\right\}$$

Utilisons la méthode de variation de la constante, et cherchons une fonction $k:\mathbb{R}^*+\to\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f:x\mapsto k(x)x$ soit solution de (E). On a alors

$$\begin{aligned}f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-x^2-\frac{1}{x^2}&\Leftrightarrow k'(x)x+k(x)-\frac{1}{x}k(x)x=-x^2-\frac{1}{x^2}\\&\Leftrightarrow k'(x)x=-x^2-\frac{1}{x^2}\\&\Leftrightarrow k'(x)=-x-\frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x\mapsto-x-\frac{1}{x^3}$ est $x\mapsto-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}$.

Ainsi, la fonction

$$f:x\mapsto\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)x=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2x}$$

est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Bilan : l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2x}+kx,\quad k\in\mathbb{R}\right\}$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, la solution particulière est la même. En revanche, une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x\mapsto\ln(-x)$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\ln(-x)} = -kx, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ ont donc la même forme :

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2x} + kx, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 90 (ATS 2013)**.** — Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \sin(x) + \sin(3x)$$

Solution. L'équation homogène associée a pour solution

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto a\sin(2x) + b\cos(2x), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Appliquons le principe de superposition pour déterminer une solution particulière.

— Pour l'équation $y'' + 4y = \sin(x)$, cherchons une solution de la forme $f : x \mapsto a\sin(x) + b\cos(x)$. En injectant dans l'équation, on obtient

$$-a\sin(x) - b\cos(x) + 4(a\sin(x) + b\cos(x)) = \sin(x) \Leftrightarrow 3a\sin(x) + 3b\cos(x) = \sin(x)$$

Par identification, on obtient $3a = 1$ et $3b = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{3}$ et $b = 0$. Ainsi, $f : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(x)$ est solution de l'équation $y'' + 4y = \sin(x)$.

— Pour l'équation $y''+4y = \sin(3x)$, cherchons une solution de la forme $f : x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x)$. En injectant dans l'équation, on obtient

$$-9a\sin(3x) - 9b\cos(3x) + 4(a\sin(3x) + b\cos(3x)) = \sin(3x) \Leftrightarrow -5a\sin(3x) - 5b\cos(3x) = \sin(3x)$$

Par identification, on obtient $-5a = 1$ et $-5b = 0$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{5}$ et $b = 0$. Ainsi, $f : x \mapsto -\frac{1}{5}\sin(3x)$ est solution de l'équation $y'' + 4y = \sin(3x)$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}\sin(x) - \frac{1}{5}\sin(3x)$ est une solution particulière de l'équation $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(3x)$.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(3x)$ sont

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto a\sin(2x) + b\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(x) - \frac{1}{5}\sin(3x), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 91. — Résoudre l'ensemble des équations différentielles des circuits RL, RC, LC et RLC.

Exercice 92 (Loi de refroidissement de Newton)**.** — *La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant à tout instant.*

A l'instant $t = 0$, une personne entre dans une salle de classe chauffée à 20°C, avec son gobelet de café chaud qui est à 80°C. On note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t.
On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$.

1. Expliquer pourquoi il existe une constante positive k telle que $\theta'(t) = k(20 - \theta(t))$ pour tout réel t positif.
2. Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t et k.
3. Après deux minutes, le café est à une température de 60řC. Donner une valeur approchée de k à

0,1.

4. A quel moment la personne pourra-t-elle boire son café, sachant qu'elle l'aime à 40řC ?

Exercice 93. — Soient a et b deux réels, I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ et h une fonction continue sur I à valeurs réelles. On considère l'équation

$$\text{(E)} : \quad x^2 y'' + axy' + by = h$$

1. Par le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que résoudre (E) revient à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Application : résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation

$$x^2 y'' + 3xy' + 2y = 1 + x^2$$

CHAPITRE 6

SYSTÈMES LINÉAIRES

Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'introduire rigoureusement la notion de système linéaire, déjà vue lors des années antérieures. On y voit, entre autre, la méthode de résolution du pivot de Gauss-Jordan.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir résoudre un système simple par substitution ..... □

② Savoir appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan pour transformer un système en un système triangulaire ..... □

③ Résoudre un système ayant une infinité de solutions avec un (ou plusieurs) paramètres ..... □

④ Savoir déterminer le rang d'un système ..... □

⑤ Savoir résoudre un système ayant un paramètre ..... □

I. Définitions et propriétés

1) Définitions

Définition 94. — Soient n et p deux nombres entiers non nuls. On appelle **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnus (ou système n fois p, $n \times p$) un système de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et les $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des nombres réels, et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des inconnues.

Le nombres a_{ij} est le **coefficient** de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équations (L_i).

Remarque 95. — Si $n = p$ on dit que le système (S) est **carré d'ordre** n.

Exemple 108. — Le système

$$(S_1)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = -2 & (L_2) \end{cases}$$

est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. C'est ainsi un système carré d'ordre 2.

Le système

$$(S_2)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 & (L_1) \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

2) Propriétés

Définition 95. — Soit

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- **Résoudre** le système (S), c'est trouver toutes les p-listes $(x_1, \cdots, x_p)$ de réels vérifiant les n équations $(L_1, \cdots, L_n)$.
- On dit qu'un système est **incompatible** s'il n'admet pas de solution.
- Deux systèmes (S) et (S′) sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.
- Le système (S) est dit **homogène** (ou **sans second membre**) si $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Dans ce cas, la p-liste $(0, \cdots, 0)$ est toujours solution de (S).

- On appelle **système homogène associé** à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.

Remarque 96. — Dans le cas où $p < n$, il y a plus d'équations que d'inconnues. Soit certaines équations sont redondantes (et on peut donc les supprimer), soit le système est incompatible.
Dans la suite, on ne s'intéressera qu'au cas $n \leqslant p$.

3) Résolution par substitution

Méthode 6.1.

La méthode par résolution consiste à écrire une des inconnues (par exemple x_1) en fonction des autres $(x_2, x_3, \cdots)$, puis à remplacer cette inconnue x_1 dans toutes les autres équations en fonction de $x_2, x_3, \cdots$. Cette méthode est efficace lorsqu'il y a peu d'inconnues ou d'équations.

Exemple 109. — Résoudre le système suivant :

$$(S_1)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 & (L_1) \\ -3x_1 + x_2 = 2 & (L_2) \end{cases}$$

Solution. En utilisant (L_2), on peut exprimer x_2 en fonction de x_1 : $x_2 = 3x_1 + 2$. On remplace alors cette égalité dans (L_1) pour en déduire la valeur de x_1. On obtiendra enfin la valeur de x_2 :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3(3x_1+2) = 1 & (L_1) \\ x_2 = 3x_1 + 2 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -7x_1 = 7 & (L_1) \\ x_2 = 3x_1 + 2 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & (L_1) \\ x_2 = -1 & (L_2) \end{cases}$$

Ainsi, le système admet une unique solution : $\{(-1;-1)\}$.

4) Systèmes triangulaires

Les système triangulaires sont les plus simples des systèmes, puisqu'ils se résolvent très facilement.

Définition 96. — On dit qu'un système (S) $n \times p$ est **triangulaire** si

$$\forall\, i \in \{1;\cdots;n\}, \forall\, j \in \{1;\cdots;p\} \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Ainsi, si $n < p$, le système est de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Si $n = p$, on a alors le système suivant :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + \cdots + a_{2n}x_n = b_n & (L_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ sont appelés les **pivots** du système.

Remarque 97. — Lorsque $n = p$ et que tous les pivots a_{ii} (pour $i \in \{1; \cdots; n\}$) sont non nuls, le système se résout par substitutions successives, de (L_n) à (L_1). Il y a alors une **unique n-liste solution**.

Méthode 6.2.

Dans le cas $n < p$, il y a une (ou plusieurs) inconnue(s) en trop. On choisit alors ces inconnues comme inconnues auxiliaires, et on résout comme pour la cas $n = p$.

Exemple 110. — Résoudre le système suivant :

$$(S)\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ \quad 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

Solution. Il y a 3 inconnues, pour deux équations. Exprimons x et y en fonction de z :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 - 3z \\ \quad 2y = 2 + 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = 1 + 2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{1}{2}z; 1+2z; z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque 98. — Bien évidemment, si on choisit une autre inconnue auxiliaire, le résultat ne sera pas sous la même forme, mais désignera bien le même ensemble de solutions.

II. Pivot de Gauss-Jordan

1) Exemple

On souhaite résoudre le système suivant

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 & L_1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 & L_2 \\ -x + y + 3z = 1 & L_3 \end{cases}$$

Pour faire cela, on va utiliser différentes opérations dites élémentaires, qui transforment le système (S) en un système équivalent, mais triangulaire cette fois-ci. Il ne restera alors plus qu'à résoudre le système triangulaire associé.

Ici :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & L_1 \text{ ligne Pivot} \\ & - & 6y & - & 2z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & 3y & + & 5z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & L_1 \\ & - & 6y & - & 2z & = & 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ & & & & 8z & = & 4 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'on résout :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & -\frac{1}{6} \\ z & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Ainsi, la solution de (S) est $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) Opérations élémentaires

Définition 97. — Soit (S) un système $n \times p$. On appelle **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: **échange** de la $i^{\text{ième}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ième}}$ ligne L_j.
- $L_i \leftarrow aL_i$ où $a \neq 0$: on **remplace** la $i^{\text{ième}}$ ligne par elle même **multipliée** par un nombre non nul a.
  Utilité : lorsqu'on a des fractions dans la ligne L_i, cela permet d'enlever les dénominateurs.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ où b est quelconque : on **remplace** la $i^{\text{ième}}$ ligne par la **somme** d'elle même et d'un multiple d'une autre ligne.
  Utilité : permet d'éliminer une inconnue.

Remarque 99. — En combinant la deuxième et la troisième opérations élémentaires, on obtient l'opération
$L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ où a est non nul, et b est quelconque.

Théorème 6.1.

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à (S), et a donc le même ensemble de solutions.

Remarque 100. — Ainsi, en combinant différentes opérations élémentaires, on ne change pas l'ensemble de solutions du système.

3) Pivot de Gauss-Jordan

Méthode 6.3.

En utilisant les opérations élémentaires comme dans l'exemple, on va résoudre un système (S) par la méthode du pivot de Gauss :

1. On élimine successivement des inconnues via les opérations élémentaires, pour transformer le système initial en un système triangulaire ;

2. On résout le système triangulaire par substitutions.

Exemple 111. —

- (Une unique solution)
$$(S)\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & (L_1)\\ 3x + y + 2z = 1 & (L_2)\\ 2x + 3y + z = 0 & (L_3)\end{cases}$$
- (Une infinité de solution)
$$(S)\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 0 & (L_4)\end{cases}$$
- (Aucune solution)
$$(S)\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 1 & (L_4)\end{cases}$$

Solution. On utilise la méthode du Pivot de Gauss, en n'oubliant pas d'indiquer les opérations effectuées.

-
$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & \text{ligne pivot}\\ -5y - 7z = -5 & L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ -y - 5z = -4 & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & \\ -5y - 7z = -5 & \text{ligne pivot}\\ -18z = -15 & L_3\leftarrow 5L_3-L_2\end{cases}$$

Le système est triangulaire avec tous ses pivots non nuls : on remonte celui-ci pour trouver une unique solution.
$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x = -\frac{1}{6}\\ y = -\frac{1}{6}\\ z = \frac{5}{6}\end{cases}$$
Ainsi,
$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)\right\}}$$

- On n'hésite pas à échanger des lignes pour avoir une ligne pivot pratique.
$$(S)\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 0 & (L_4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 & L_1\leftrightarrow L2\\ -y + 2z + 3t = 0 & \\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & \\ 5x + y + z - 2t = 0 & \end{cases}$$
Ainsi,
$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 & \text{ligne pivot}\\ -y + 2z + 3t = 0 & L_2\\ -8y + 7z - 4t = 0 & L_3\leftarrow 2L_3-3L_1\\ -8y + 7z - 4t = 0 & L_4\leftarrow 2L_4-5L_1\end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont les mêmes. On en élimine une, et on continue la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & \text{ligne pivot} \\ & & & - & 9z & - & 28t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 \end{array} \right.$$

On obtient un système triangulaire, qu'on résout en utilisant une variable auxiliaire (par exemple ici, t) :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{15}{9}t \\ y & = & -\frac{29}{9}t \\ z & = & -\frac{28}{9}t \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{5}{3}t; -\frac{29}{9}t; -\frac{28}{9}t; t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}}$$

- Le système est le même que précédemment, excepté la dernière ligne. Par les deux mêmes opérations, on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & \text{ligne pivot} \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & L_2 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 2 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \end{array} \right.$$

Les deux dernières lignes étant incompatibles, le système est incompatible. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$$

Remarque 101. — Un système linéaire admet :

- soit aucune solution (il est donc incompatible) ;
- soit une unique solution ;
- soit une infinité de solutions (quand il y a une (ou des) inconnues auxiliaires)

Définition 98. — Après avoir appliqué la méthode du pivot de Gauss, on obtient un système triangulaire. On appelle **rang** d'un système le nombre de pivot non nuls.

Exemple 112. — Dans les exemples précédents, le premier était de rang 3, et le deuxième est également de rang 3.

III. Systèmes de Cramer

1) Définition

Définition 99. — Un système carré d'ordre n est dit **de Cramer** s'il possède une unique n-liste solution.

Conséquence 2. — Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si son unique solution est la n-liste $(0,0,\cdots,0)$.

2) Systèmes de Cramer et pivot de Gauss

Théorème 6.2.

Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non-nuls, c'est-à-dire si et seulement si (S) est de rang n.

Exemple 113. — Montrer que le système suivant est de Cramer

$$(S)\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solution. En appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ -3y + 5z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ -y + 2z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -3y + 5z = 0 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ -y + 2z = 0 & \\ -z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

On a ainsi fait apparaitre les pivots $1, -1$ et -1 qui sont tous les trois non nuls : le système (S) est bien de Cramer.

3) Système de Cramer et système homogène associé

Théorème 6.3.

Un système (S) est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est aussi de Cramer.

Démonstration. En effet, le choix des pivots dans la méthode des pivots de Gauss ne dépend pas du second membre. □

Méthode 6.4.

Pour montrer qu'un système quelconque est de Cramer, il suffit donc de montrer que son système homogène associé l'est, ce qui est plus simple.

fFileExiststex/Chap6/Exo6

Exercices

Exercice 94. — Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 7x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} -3x + y + z - t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases} \quad (S_6)\begin{cases} -x + 3y - t = 0 \\ 2x - y + 2z + 2t = 0 \\ 5y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

Solution. On utilise la méthode du pivot de Gauss sur chacun des 6 systèmes. Lorsqu'un système va avoir une infinité de solutions, on utilise une (ou plusieurs) inconnue(s) auxiliaire(s). En général, on prendra les inconnues dans l'ordre inverse (par exemple, si les inconnues sont x_1, x_2, x_3, x_4, on essaiera de prendre dans l'ordre x_4, puis x_3,...). On obtient ici :

- Une unique solution pour S_1 : $\mathscr{S} = \{(1;-1;-1)\}$.
- Une unique solution pour S_2 : $\mathscr{S} = \{(-4;5;-3)\}$
- Une infinité de solution pour S_3, par exemple

$$\mathscr{S} = \{(1-z;1+z;z), z \in \mathbb{R}\}$$

  Remarque : on peut obtenir d'autres réponses possibles selon la variable auxiliaire que l'on prend.
- Aucune solution pour S_4, qui est en effet incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$.
- Une unique solution pour S_5 qui est un système homogène et de Cramer : $\mathscr{S} = \{(0;0;0;0)\}$.
- Une infinité de solution pour S_6, par exemple

$$\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{6}{5}z - t; -\frac{2}{5}z; z; t\right), (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 95. — Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d :

$$(S_1)\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \\ -3x + y + 3z = c \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 3x - 3y - 2z = a \\ -4x + 4y + 3z = b \\ 2x - 2y - z = c \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ 4x + 2y - z = c \\ x - 7z = d \end{cases}$$

Solution. On applique également la méthode du pivot de Gauss. La seule difficulté ici repose sur les lettres inconnues, qui compliquent les calculs. Il est cependant important de savoir résoudre un tel système, que l'on reverra en fin d'année dans les applications linéaires. On obtient ici :

- Une unique solution pour S_1 :
$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{a+b}{2}; \frac{-3b-c}{2}; \frac{a+2b+c}{2}\right)\right\}$$
- **Attention** : ici, selon les valeurs de a, b et c, les résultats sont différents. Il faut donc traiter **tous** les cas par **disjonction de cas**. Ainsi :
  - Si $c \neq 2a+b$, le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$.
  - Si $c = 2a+b$, le système possède une infinité de solutions, par exemple
$$\mathscr{S} = \left\{\left(3c+b+2y; y; 2c+b\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$$
- On doit également traiter par disjonction de cas :
  - Si $a+b \neq c+d$, le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$.
  - Si $a+b = c+d$, le système possède une unique solution :
$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{5d+7c-14a}{5}; \frac{27a-10d-11c}{5}; \frac{c-2a}{5}\right)\right\}$$

Exercice 96. — Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ les systèmes suivants sont de Cramer. Résoudre alors les systèmes.

$$(S_1)\begin{cases} (2-\lambda)x + 3y = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} (1-\lambda)x - y - z = 0 \\ -2x + (2-\lambda)y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + (-3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} (2-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = 0 \\ 2x - \lambda y - 4z = 0 \\ y - (3+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Solution.

Méthode 6.5.

Pour déterminer si un système à paramètre est de Cramer ou non, on applique la méthode du pivot de Gauss, en essayant de ne mettre le paramètre que sur le dernier pivot. On utilise ensuite le résultat classique : un système est de Cramer si et seulement si ses pivots sont tous non nuls.

- Pour (S_1), on a
$$(S_1) \sim \begin{cases} 3x + (2-\lambda)y = 0 \\ \left(9-(2-\lambda)^2\right)y = 0 \end{cases}$$
Ainsi, (S_1) est de Cramer si et seulement si $9-(2-\lambda)^2 \neq 0$. Or $9-(2-\lambda)^2 = (3-(2-\lambda))(3+(2-\lambda) = (1+\lambda)(5-\lambda)$. Donc (S_1) est de Cramer si et seulement si
$$\boxed{\lambda \notin \{-1;5\}}$$

- Pour (S_2), on a
$$(S_2) \sim \begin{cases} 2x - 2y + (-3-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y - \lambda z = 0 \\ (\lambda^2-1)z = 0 \end{cases}$$
Ainsi, (S_2) est de Cramer si et seulement si $-\lambda \neq 0$ et $\lambda^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$. Donc (S_2) est de Cramer si et seulement si
$$\boxed{\lambda \notin \{-1;0;1\}}$$

- Pour (S_3), on a
$$\begin{aligned}(S_3) &\sim \begin{cases} x - 2y + (5-\lambda)z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 & \\ (2-\lambda)x + 4z = 0 & \end{cases} \\ &\sim \begin{cases} x - 2y + (5-\lambda)z = 0 & \text{Ligne Pivot} \\ (2-\lambda)y + 3(\lambda-1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 2(2-\lambda)y + (-6+7\lambda-\lambda^2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1 \end{cases} \\ &\sim \begin{cases} x - 2y + (5-\lambda)z = 0 & \\ (2-\lambda)y + 3(\lambda-1)z = 0 & \text{Ligne Pivot} \\ (\lambda-\lambda^2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}\end{aligned}$$
Ainsi, (S_3) est de Cramer si et seulement si $2-\lambda \neq 0$ et $\lambda - \lambda^2 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$. Donc (S_3) est de Cramer si et seulement si
$$\boxed{\lambda \notin \{0;1;2\}}$$

- Pour (S_4), on a
$$\begin{aligned}(S_3) &\sim \begin{cases} 2x - \lambda y - 4z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (3-\lambda)x - 2y - 4z = 0 & \\ y - (3+\lambda)z = 0 & \end{cases} \\ &\sim \begin{cases} 2x - \lambda y - 4z = 0 & \text{Ligne Pivot} \\ (-4+3\lambda-\lambda^2)y + 3(3-\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - (3-\lambda)L_1 \\ y - (3+\lambda)z = 0 & \end{cases} \\ &\sim \begin{cases} 2x - \lambda y - 4z = 0 & \\ y - (3+\lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (-4+3\lambda-\lambda^2)y + 3(3-\lambda)z = 0 & \end{cases} \\ &\sim \begin{cases} 2x - \lambda y - 4z = 0 & \\ y - (3+\lambda)z = 0 & \text{Ligne Pivot} \\ (\lambda-\lambda^3)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - (-4+3\lambda-\lambda^2)L_2 \end{cases}\end{aligned}$$
Ainsi, (S_4) est de Cramer si et seulement si $\lambda(\lambda^2-1) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$. Donc (S_4) est de Cramer si et seulement si
$$\boxed{\lambda \notin \{-1;0;1\}}$$

CHAPITRE 7

NOMBRES RÉELS ET SUITES NUMÉRIQUES

Résumé

Dans ce chapitre, on reprend les notions connues sur les suites, ainsi que sur les limites de suites. On définit également les comparaisons de suites.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les suites :
- Connaître la méthode de représentation des suites ..... □
- Savoir démontrer des variations par étude de fonctions ..... □
- Savoir démontrer des variations par la méthode $u_{n+1} - u_n$ ..... □
- Savoir démontrer des variations par récurrence ..... □
- Savoir démontrer une majoration par récurrence ..... □
- Connaître les suites arithmétiques et géométriques ..... □

② Concernant les limites :
- Connaître la définition mathématique des limites ..... □
- Savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) ..... □
- Savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison ..... □
- Connaître les croissances comparées ..... □
- Savoir reconnaître les suites adjacentes ..... □

③ Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes ..... □

④ Savoir démontrer qu'une suite est négligeable par rapport à une autre ..... □

⑤ Savoir utiliser les équivalences pour déterminer une limite de suite ..... □.

I. Nombres réels

1) Ensembles usuels

Définition 100. — On dispose de plusieurs ensembles usuels :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers naturels relatif : $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- $\mathbb{D}$: l'ensemble des décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres ayant un nombre fini de décimales. On a également
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p}, \quad a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}$$
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

Remarque 102. — On peut définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble "limite" des décimaux ou des rationnels. Soit x un réel quelconque. On note alors
$$d_n = \left[10^n x\right] 10^{-n} \quad \text{et} \quad d'_n = \left[10^n x\right] 10^{-n} + \frac{1}{10^n}$$
Par exemple, si $x = \pi$, on a
$$d_1 = 3.1, \quad d'_1 = 3.2, \quad d_2 = 3.14, \quad d'_2 = 3.15, \cdots$$
Alors on a
$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad d_n \leqslant x \leqslant d'_n \quad \text{et} \quad |x - d_n| \leqslant 10^{-n}$$
Ainsi la suite (d_n) est une suite de décimaux qui se rapproche de x.
Cette définition n'est pas rigoureuse, mais donne une intuition de la construction des réels. (d_n) représente cependant une approximation décimale de x.

2) Propriétés de $\mathbb{R}$

Proposition 7.1.

On admet que $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonnés, c'est-à-dire :

- $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$.
- $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$.

A partir de ces propriétés, on obtient toutes les propriétés usuelles des inégalités.

Définition 101. — Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On appelle **majorant** de A tout nombre réel M tel que
$$\forall\ x \in A, \quad x \leqslant M$$

- On appelle **minorant** de A tout nombre réel m tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \geqslant m$$
- On appelle **maximum** de A le réel $a \in \mathrm{A}$ tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \leqslant a$$
- On appelle **minimum** de A le réel $b \in \mathrm{A}$ tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \geqslant b$$

Ainsi, un maximum ou un minimum est un élément de A, mais pas forcément un majorant ou minorant.

Dès lors qu'on a un majorant, on a une infinité de majorants (car tout nombre supérieur à un majorant est également un majorant). On peut s'intéresser (s'il existe) au plus petit des majorants :

Définition 102. — Soit A une partie **non vide** majorée de $\mathbb{R}$. On appelle (si elle existe) **borne supérieure** de A le plus petit des majorants.

Définition 103. — Soit A une partie **non vide** minorée de $\mathbb{R}$. On appelle (si elle existe) **borne inférieure** de A le plus grand des minorants.

L'ensemble des réels possède une propriété remarquable et essentielle :

Théorème 7.2. Théorème de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Ainsi, dès lors que la partie est non vide et possède un majorant, elle admet automatiquement une borne supérieure.

Remarque 103. — ⚠ Attention : une borne supérieure n'est pas forcément un maximum! Si on s'intéresse à l'ensemble
$$\mathrm{A} = \left\{1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
A est non vide ($0 \in \mathrm{A}$), et est majorée (par 1). Sa borne supérieure est 1, mais $1 \notin \mathrm{A}$, donc 1 n'est pas un maximum.

Propriété 35. — *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$*, et* ℓ *sa borne supérieure. Alors pour tout majorant* M *de* A*, on a* $\ell \leqslant \mathrm{M}$.

Démonstration. En effet, ℓ est le plus petit des majorants. □

Propriété 36. — *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$*, et* ℓ *sa borne supérieur. Alors, pour tout nombre réel* $m < \ell$*, il existe un élément* $a \in \mathrm{A}$ *tel que* $a \geqslant m$.

Démonstration. En effet, si ce n'est pas le cas, m est un majorant plus petit que ℓ, ce qui est impossible puisque ℓ est le plus petit des majorants. □

II. Généralités sur les suites

1) Définition et notations

Définition 104. — Une **suite numérique réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Notation 3. — Soit u une suite.

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

La suite u peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé **terme de rang** n de la suite u.

2) Trois types de définition de suites

On peut définir une suite de trois manières différentes.

a) Définition explicite

La suite peut être définie explicitement :

- v est la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- u est la suite définie par u_n est la $n^{\text{è}}$ décimale de π, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- w est la suite définie par

$$\begin{cases} w_n = 3n+2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ w_n = \dfrac{1}{n} + 4 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b) Définition par récurrence

Elle peut également être définie par récurrence :

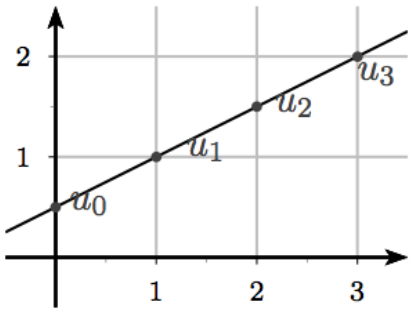
- u est la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$.
- $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

c) Définition implicite

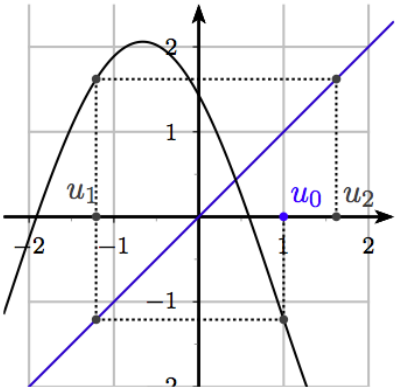
Une suite peut également être définie par une équation. Par exemple, soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 3$ par u_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = nx$.

3) Représentation graphique d'une suite

On représente une suite définie explicitement par l'ensemble des points $(n; u_n)$. On peut également représenter les suites définies par récurrence par une représentation "en toile d'araignée".



Définition $u_n = f(n)$



Définition par récurrence, $u_0 = 1$

III. Monotonie, majoration, minoration

1) Suites monotones

Définition 105. — Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) est une suite **croissante** si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n.
On dit que (u_n) est une suite **décroissante** si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n.
Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Remarque 104. —

- On a aussi des suites strictement croissantes ou strictement décroissantes.
- Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (par exemple).

2) Méthodes de recherche des variations d'une suite

a) Pour les suites $u_n = f(n)$

Théorème 7.3.

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration. Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$n < n+1 \implies u_n = f(n) \leqslant f(n+1) = u_{n+1}$$

□

Exemple 114. —

- Soit u la suite définie par $u_n = n^2$ pour tout n. La fonction $x \mapsto x^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est strictement décroissante, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Méthode 7.1.

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = f(n)$, on introduit la fonction f associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de u.

Exercice 97. — Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 4n + 2$. Déterminer la monotonie de u.

Solution. Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$. f étant un trinôme du second degré, on connait ses variations : ici, $a = 1 > 0$, $b = -4$ donc $-\frac{b}{2a} = 2$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;2]$ et est croissante sur $[2;+\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante pour $n \geqslant 2$.

b) Termes consécutifs

Théorème 7.4. Etude de la différence de deux termes consécutifs

Soit une suite u donnée. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est décroissante.

Théorème 7.5. Etude du quotient de deux termes consécutifs

Soit une suite u à termes **strictement positifs**, on peut utiliser :
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. > 1) alors la suite u est croissante (resp. strictement croissante).
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (resp. < 1) alors la suite u est décroissante (resp. strictement décroissante).

Remarque 105. — Cette méthode est, en général, reservée aux suites définies par des puissances.

Exemple 115. —

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2+1}$ pour tout n. Alors, pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ est strictement croissante. En effet, elle est à termes strictement positifs, et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{5^n}{2^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{2} > 1$$

Conséquence 3. —

- Si $a > 1$, la suite (a^n) est strictement croissante.
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est constante.
- Si $0 < a < 1$, la suite (a^n) est strictement décroissante.

Démonstration. Pour tout réel $a > 0$, on constate que la suite (a^n) est à termes strictement positifs. Enfin, en notant pour tout entier n, $u_n = a^n$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$$

Ainsi, la suite (a^n) est strictement croissante si $a > 1$, et strictement décroissante si $a < 1$. Elle est enfin constante si $a = 1$.

□

c) Par récurrence

Méthode 7.2.

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence P_n : "$u_{n+1} \geqslant u_n$" pour montrer que la suite est croissante, ou P_n : "$u_{n+1} \leqslant u_n$" pour montrer qu'elle est décroissante.

Exemple 116. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que la suite u est croissante.

Solution. Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n :"$u_{n+1} \geqslant u_n$".

- **initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$. Donc P_0 est vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow u_{n+1}+1 \geqslant u_n+1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+1} \geqslant \sqrt{u_n+1}$ car la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$

  Donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante.

3) Suites majorées, minorées, bornées

Définition 106. —

- Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n. m s'appelle un **minorant**.
- Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geqslant u_n$ pour tout n. M s'appelle un **majorant**.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels m et M tels que pour tout n :

$$m \leqslant u_n \leqslant M$$

Exemple 117. — La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée :

$$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Méthode 7.3.

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.

Exemple 118. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant 2$.

Solution. Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n : "$u_n \leqslant 2$".

- **initialisation** : $u_0 = 1 \leqslant 2$. P_0 est donc vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $$u_n \leqslant 2 \Rightarrow u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{4} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

  Donc $u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_n \leqslant 2$. La suite u est donc majorée par 2.

IV. Suites arithmétiques et géométriques

1) Suites arithmétiques

Définition 107. — Une **suite arithmétique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = u_n + a \text{ où } a \in \mathrm{R} \end{cases}$$

Le réel a est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 119. — La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 7.6.

Soit u une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison a. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + na$$

Démonstration. Soit P_n la proposition "$u_n = u_0 + na$" définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 + 0 \times a$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

  $$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} u_n + a \underbrace{=}_{\text{HR}} (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$$

  P_{n+1} est donc vraie.

- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

On peut également démontrer ce théorème par téléscopage. □

Remarque 106. — Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a, on a également

$$\forall\ (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)a$$

Exemple 120. — Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2-3n$.

Théorème 7.7.

Soit u une suite arithmétique, de raison a. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2} = (\text{nb de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration. Soit $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$. D'une part

$$S = u_p + (u_p + a) + (u_p + 2a) + \cdots + (u_p + (n-p)a)$$

et d'autre part

$$S = u_n + (u_n - a) + (u_n - 2a) + \cdots + (u_n - (n-p)a)$$

En sommant les deux égalités,

$$2S = (u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \cdots + (u_p + u_n)$$

Avec $n-p+1$ termes. On a donc $2S = (n-p+1)(u_p+u_n)$, ce qui donne le résultat.
On aurait pu également le démontrer par récurrence sur n. □

Exemple 121 (Classique)**.** — En s'intéressant à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Suites géométriques

Définition 108. — Une **suite géométrique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathrm{R} \end{cases}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 122. — La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 7.8.

Soit u une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration. Soit P_n la proposition "$u_n = u_0 \times q^n$" définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 q^0$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} q \times u_n \underbrace{=}_{\text{HR}} q \times (u_0 \times q^n) = u_0 \times q^{n+1}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

□

Remarque 107. — Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a également

$$\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 123. — Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 \times (-3)^n$.

Théorème 7.9.

Soit u une suite géométrique, de raison q. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{u_p - q u_n}{1-q} = \frac{\text{1er terme} - \text{terme à suivre}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration. Soit p un entier fixé. Soit P_n la proposition "$u_p + \cdots + u_n = \frac{u_p - q u_n}{1-q}$" définie pour tout entier $n \geqslant p$.

- Initialisation : $\frac{u_p - q u_p}{1-q} = u_p \frac{1-q}{1-q} = u_p$: P_p est donc vraie.
- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors

$$u_p + \cdots + u_n + u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{HR}} \frac{u_p - q u_n}{1-q} + u_{n+1} = \frac{u_p - q u_n + u_{n+1} - q u_{n+1}}{1-q} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} \frac{u_p - q u_{n+1}}{1-q}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant p$.

□

Exemple 124 (Classique)**.** — En s'intéressant à la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, on a

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q q^n}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

V. Limites de suites

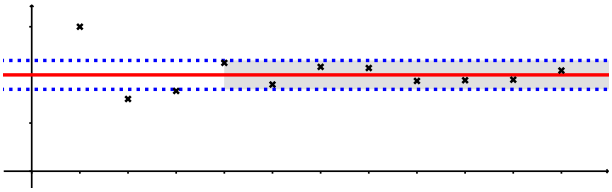
1) Limite finie

Définition 109. — Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** ℓ, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

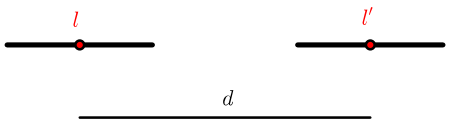


Exemple 125. — La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Propriété 37. — *Si une suite (u_n) a une limite finie, celle-ci est **unique**.*

Démonstration. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' et que $\ell \neq \ell'$. Donc la distance entre ℓ et ℓ' est non nulle. On la note d, et on s'intéresse aux deux intervalles $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$ et $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$. Par définition de la convergence, tous les termes de la suite sont dans ces deux intervalles à partir d'un certain rang. Or :



les deux intervalles sont disjoints, ce qui est absurde. □

2) Limite infinie

Définition 110. — Soit (u_n) une suite.

- Si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$, et on note

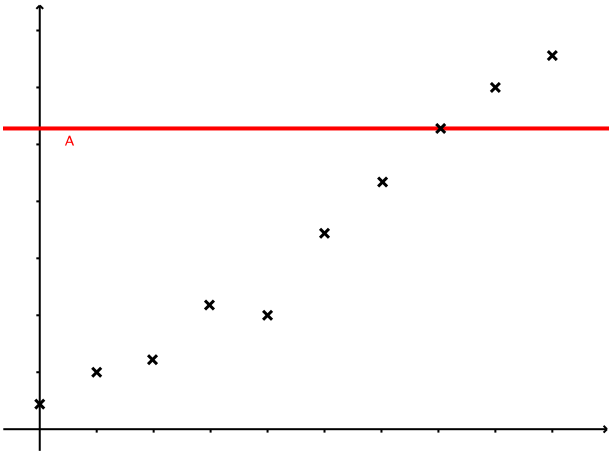
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- Si tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Exemple 126. — La suite u définie pour tout n par $u_n = n$ a pour limite $+\infty$, et la suite v définie pour tout n par $v_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$$

Algorithme 1. — Si une suite **croissante** (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) :

Algorithme 1 : SEUIL
Entrées : Saisir A (nombre positif)
Initialisation
:
$n \leftarrow 0$
U $\leftarrow u_0$
Tant que U $\leqslant$ A
  $n \leftarrow n+1$
  U $\leftarrow u_n$
FinTantque
Sorties : Afficher n

En scilab, pour la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$$

on obtient :

Programme Scilab 1 : Seuil pour une suite croissante

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 21/06/2015
// Résumé : programme déterminant le premier entier n tel que
// un > a, où a est un réel donné et u une suite de limite +oo
```

```
n=0;
u=1;
// Valeur de seuil
seuil=100;

while(u<=seuil)
  // On n'a pas dépassé le seuil.
  // On passe au rang suivant
  n=n+1;
  // On calcule le terme suivant de la suite
  u=1+u^2;
end

// Ainsi, n contient le premier rang à partir duquel u_n > seuil
```

3) Suite convergente

Définition 111. — On dit qu'une suite est **convergente** si elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** si elle possède une limite infinie.

4) Suite sans limite

Remarque 108. — Certaines suites ne possèdent aucune limite, que ce soit finie ou infinie.

Exemple 127. — La suite $((-1)^n)$ prend la valeur 1 aux termes pairs, et -1 aux termes impairs. Elle ne peut donc ni converger, ni diverger : elle ne possède donc pas de limite.

VI. Théorèmes sur les limites

1) Théorème de comparaison

Théorème 7.10.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration. Supposons au contraire que $\ell > \ell'$. En notant d la distance (non nulle) entre ℓ et ℓ', cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) se trouve dans l'intervalle $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$. Or, $v_n \geqslant u_n$, donc, à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \ell - \frac{d}{4}$. Donc l'intervalle $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$ ne contient aucun élément de la suite (v_n) à partir d'un certain rang : absurde. □

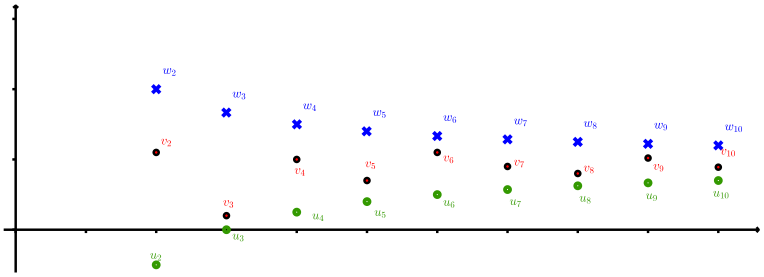
2) Théorème d'encadrement

Théorème 7.11. Théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et ℓ un réel. On suppose que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et

que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$



Remarque 109. — Ce théorème est également appelé théorème des gendarmes.

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
Par définition de la limite, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, u_n soit dans I. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, w_n soit dans I.
Mais alors, pour tout n plus grand que n_1 **et** n_2, $u_n \in$ I et $w_n \in$ I. Or, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et puisque I est un intervalle, on en déduit que pour tout n plus grand que n_1 et n_2, $v_n \in$ I.
Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on en déduit bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. □

Méthode 7.4.

Pour déterminer la limite d'une suite où $(-1)^n$ apparait, ou bien des cos ou sin, on appliquera (quasi) systématiquement le théorème d'encadrement.

Exemple 128. — Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$$

Solution. Pour tout $n \neq 0$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3$ et puisque $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n + 2}{n} \leqslant \frac{3}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n} = 0$$

Théorème 7.12.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ un réel. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration. Application du théorème d'encadrement. □

Exemple 129. — On constate que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite 0.

Théorème 7.13. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration. Démontrons le premier point. Soit A un réel strictement positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \in [a;+\infty[$. Or, puisque pour tout n, $u_n \geqslant v_n$, on a également $u_n \in [a;+\infty[$ pour $n \geqslant n_0$.
Par définition de la limite infinie, cela signifie donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ □

3) Convergence des suites monotones

Théorème 7.14. Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Démonstration. Si (u_n) est une suite croissante, constatons que l'ensemble

$$A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide et majorée (puisque la suite est majorée). Elle possède donc une borne supérieure qu'on note ℓ. On montre alors que ℓ est la limite de (u_n). □

Théorème 7.15.

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. La suite étant non majorée, quel que soit le réel a, on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à a. On a donc $u_N > a$.
Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > a$. Tous les termes de la suite u sont donc dans l'intervalle $]a;+\infty[$ a partir d'un certain rang. Ceci étant vrai pour tout a, par définition, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

□

Exemple 130. — La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante, non majorée : sa limite est $+\infty$.
La suite v définie pour tout $n > 0$ par $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante, majorée (par 1) : elle converge donc.

Théorème 7.16.

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite ℓ. Alors, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Notons $r = u_{n_0} - \ell > 0$. Par croissance de la suite u, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$. Mais alors, l'intervalle $]\ell - r; \ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite à partir de n_0. Cela contredit le fait que la suite u converge vers ℓ : ceci est absurde. □

VII. Opération sur les limites

1) Limites usuelles

Proposition 7.17.

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \ (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \ (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} |n| = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \ (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0 \ (\alpha \in \mathbb{R}_-^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

2) Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

3) Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe(ℓ').∞	-signe(ℓ').∞
$+\infty$	signe(ℓ).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(ℓ).∞	$-\infty$	$+\infty$

4) Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe(ℓ').∞	-signe(ℓ').∞
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

5) Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe(ℓ).∞	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe(ℓ).∞	$-\infty$	$+\infty$

6) Limite de (q^n)

Théorème 7.18.

Soit q un nombre réel. On s'intéresse à la suite (q^n).

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) ne possède pas de limite.

Démonstration. Tout part de l'inégalité de Bernoulli, qui se démontre à l'aide d'une récurrence : pour tout $x > 0$, et pour tout entier n, on a

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

- Si $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + x$ avec $x = q - 1 > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli

  $$q^n \geqslant 1 + nx = 1 + n(q-1)$$

  Or, puisque $q - 1 > 0$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} 1 + n(q-1) = +\infty$$

  Par théorème d'encadrement,

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

- Si $q = 1$, la suite (q^n) est la suite constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- Si $-1 < q < 1$, posons $\mathrm{Q} = \frac{1}{|q|} > 1$. Alors, d'après ce qui précède

  $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = +\infty$$

  Or, on a

  $$0 \leqslant |q|^n = \left(\frac{1}{\mathrm{Q}}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{Q}^n}$$

  Par théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = +\infty$ on a

  $$\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

- Si $q = -1$, la suite $(-1)^n$ vaut 1 pour les termes pairs, et -1 pour les termes impairs. Elle ne peut donc converger.
- Si $q < -1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$. Donc la suite $(|q|^n)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Or, la suite (q^n) prend des valeurs positives pour les termes pairs, et négatives pour les termes impairs. Elle ne peut donc pas avoir de limite.

□

Méthode 7.5.

Pour déterminer la limite d'une suite composée de puissances, on met les plus grandes puissances en facteur, et on utilise le résultat précédent.

Exercice 98. — Soit u la suite définie pour tout entier n par

$$u_n = \frac{3^n + 4^n}{3 \times 4^n + 2^n}$$

Déterminer la limite de la suite u.

Solution. Pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{4^n\left(1 + \frac{3^n}{4^n}\right)}{4^n\left(3 + \frac{2^n}{4^n}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{2}{4} < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$

Par somme et quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

7) Croissances comparées

Théorème 7.19.

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{\ln^b(n)} = +\infty$$

et de manière générale, pour $q > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

Démonstration. Voir chapitre Limite de fonctions. □

Exemple 131. — On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

Exercice 99. — Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\ln(n)}{n+1}$.

Solution. On constate que, pour tout $n>0$:

$$\frac{n+\ln(n)}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{\ln(n)}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Par somme, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\ln(n)}{n} = 1$. On a également $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(n)}{n+1} = 1$$

VIII. Suites adjacentes

Définition 112. — On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Exemple 132. — Les suites u et v définies pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Théorème 7.20.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration. On montre que la définition des suites adjacentes entraîne que, pour tout n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$: en effet, la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante par construction, et de limite 0 : cela implique que tous les termes de la suite $(v_n - u_n)$ sont positifs.
La suite (u_n) est donc croissante majorée : elle converge, vers une limite que l'on note ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante minorée : elle converge, vers ℓ'. Or, par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Par opération sur les limites, cela implique $\ell - \ell' = 0$, soit $l = l'$. □

Méthode 7.6.

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on montre qu'une est croissante, l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

Exercice 100. — Soient u et v deux suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Solution. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante. De même

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{nn!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$$

Après mise au même dénominateur

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} < 0$$

donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0 \quad \text{par quotient}$$

Bilan : les suites u et v sont bien adjacentes.

Remarque 110. — Etant adjacentes, elles convergent, et ont la même limite. On peut montrer que leur limite commune est e.

IX. Comparaison de suites

L'idée de cette section est d'introduire des méthodes de comparaison de suites, permettant de déduire certains résultats sur les limites.

1) Négligeabilité

Définition 113. — Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, ou plus simplement $u_n = o(v_n)$, et on lit "u est un petit o de v au voisinage de $+\infty$.

Exemple 133. — On a $n = o(n^2)$.

Solution. En effet, $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Propriété 38 (Opérations sur la négligeabilité)**.** — *Soient u, v et w trois suites non nulles à partir d'un certain rang.*

1. *(Multiplication par un réel) Si $u_n = o(v_n)$ alors pour tout réel k, $ku_n = o(v_n)$.*
2. *(Quotient) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$ et $\frac{u_n}{w_n} = o\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$.*
3. *(Transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*

④ *(Somme) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.*

Remarque 111. — Attention : pour la somme, il faut que les suites soient négligeables par rapport à une même suite.

Exercice 101. — Montrer que $e^{-n} = o(n^4)$ et que $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Solution. Remarquons que
$$\frac{e^{-n}}{n^4} = \frac{1}{e^n n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par quotient.}$$
Enfin, $\ln(n) = o(n^4)$ et $n^2 = o(n^4)$ (par croissances comparées). Par somme, $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Remarque 112. — Une suite vérifiant $u = o(1)$ est une suite qui tend vers 0.

Proposition 7.21. Croissances comparées

On peut écrire les croissances comparées ainsi : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:
$$n^\alpha = o(e^n), \qquad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad \text{si } \alpha < \beta, \quad n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{et} \quad e^n = o(n!)$$

2) Équivalence

Définition 114. — Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si
$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exemple 134. — On a $n^2 + n \sim n^2$.

Solution. En effet, pour $n \geqslant 1$:
$$\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque 113. — On dispose d'une autre définition : u et v sont équivalentes si et seulement si
$$u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)$$
En effet,
$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conséquence 4. — Soient deux suites u et v équivalentes. Alors

- Si u converge vers ℓ, v converge également vers ℓ.
- Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, v est également de signe constant et de même signe à partir d'un certain rang.

Propriété 39 (Opérations sur les équivalents)**.** — *Soient u, v, w et x quatre suites non nulles à partir d'un certain rang.*

① *(Compatibilité avec la multiplication) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.*

② *(Compatibilité avec le quotient) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.*

③ *(Compatibilité avec les puissances) Si les suites u et v sont strictement positives, et telles que $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.*

Démonstration. Les preuves se font en utilisant la définition. Par exemple, remarquons que

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

□

Remarque 114. — ⚠ Attention : en général, on ne peut ni ajouter, ni soustraire des équivalents.

Exercice 102. — Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4}$$

Solution. Puisque $\ln(n) = o(n^4)$, on a $\ln(n) + n^4 \sim n^4$. De même, $1 - n^4 \sim -n^4$. Par quotient

$$\frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4} \sim \frac{n^4}{-n^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4} = -1$$

Proposition 7.22. Formule de Stirling

On dispose d'un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque 115. — On retrouve, grâce à ce résultat, que $q^n = o(n!)$.

fFileExiststex/Chap7/Exo7

Exercices

Sens de variation, majoration, minoration

Exercice 103. —

- Soit u la suite définie pour tout n par $u_n = \frac{n-1}{n+2}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- Etudier le sens de variation des suites $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$,$\left(\frac{2^n}{n}\right)$ et $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

Solution.

- Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-1}{n+1+2} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{n}{n+3} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+3)(n+2)}$$

Puisque pour tout entier naturel n, $n+2>0$ et $n+3>0$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}-u_n > 0$.
Bilan : la suite (u_n) est strictement croissante.

- Notons les suites respectivement v, w et z. De la même manière, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $n-1 \geqslant 0$ et donc $n-1+n^2 \geqslant 0$ (car $n^2 \geqslant 0$). Ainsi

$$\forall\ n \geqslant 1,\ v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Bilan : la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{2^{n+1}n - 2^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

Pour $n \geqslant 1$, on a $2^n > 0$, $n-1 \geqslant 0$ et $n(n+1) > 0$. Par quotient, pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$.
Bilan : la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour tout entier n, on a

$$z_{n+1} - z_n = \frac{n+1}{2(n+1)-1} - \frac{n}{2n-1} = \frac{(n+1)(2n-1)-n(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{-1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $2n-1>0$ et $2n+1>0$ donc par quotient,

$$\forall\ n \geqslant 1,\ z_{n+1} - z_n < 0$$

Bilan : la suite (z_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

Exercice 104. — Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, ou bornées.

- La suite u définie par $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.
- La suite v définie par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

Solution.

Méthode 7.7.

On peut calculer les premiers termes pour avoir une idée d'un majorant M ou minorant m. On calcule ensuite $u_n - \mathrm{M}$ ou $u_n - m$ et on étudie le signe de cette différence.

- Pour tout entier n, on a $n+2>0$ et $2n+1>0$ donc par quotient,

$$\forall\ n,\ u_n > 0$$

Il semblerait qu'elle soit majorée par 2. Calculons $u_n - 2$:

$$\forall\ n,\ u_n - 2 = \frac{n+2}{2n+1} - 2 = \frac{n+2-2(2n+1)}{2n+1} = \frac{-n}{2n+1}$$

Pour tout entier n, $-n \leqslant 0$ et $2n+1>0$ donc $u_n - 2 \leqslant 0$.
Bilan : $\forall\ n,\ 0 < u_n \leqslant 2$.
Remarque : on peut aussi montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

- Pour tout entier $n>0$, on a $n^2+2>0$ et donc

$$\forall\ n \geqslant 1,\ v_n > 0$$

Constatons également que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{n^2+2}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{2}{n} = n + \frac{2}{n} \geqslant n$$

car $\frac{2}{n} > 0$.
Or la suite w définie pour tout n par $w_n = n$ n'est pas majorée. Par comparaison, la suite v n'est pas majorée.
Bilan : v est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

Suites et récurrence

Exercice 105. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

Solution.

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 2$".
  - Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 2$. La proposition P_0 est donc vraie.
  - Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Mais alors

$$2 \leqslant 2+u_n \leqslant 4$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+u_n} \leqslant \sqrt{4}$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

- Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
  - Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$. On a donc $1 < \sqrt{3}$: la proposition Q_0 est donc vraie.
  - Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n. Montrons que Q_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Mais alors

$$2+u_n \leqslant 2+u_{n+1}$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2+u_n} \leqslant \sqrt{2+u_{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est croissante.

Exercice 106. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que
$$\forall\ n,\ u_n > n^2$$
3. Conjecturer, puis démontrer, une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

- Constatons que pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2n + 3) - u_n = 2n + 3$$

et $2n+3 > 0$ pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est strictement croissante.

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n > n^2$".
  - Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 > 0^2$. La proposition P_0 est donc vraie.
  - Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n > n^2$. Mais alors

$$u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$$

soit,

$$u_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n > n^2$.

- Après calcul des premières valeurs, il semblerait que $u_n = (n+1)^2$. Montrons-le par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n = (n+1)^2$".
  - Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 = (0+1)^2$. La proposition P_0 est donc vraie.
  - Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n = (n+1)^2$. Mais alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = \underbrace{(n+1)^2}_{\text{H.R.}} + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

  La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n = (n+1)^2$.

Exercice 107. — On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ \forall\ n,\ u_{n+1} &= \sqrt{4u_n - 3} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution.

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$1 \leqslant u_n \leqslant 3$".
  - Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $1 \leqslant 2 \leqslant 3$. La proposition P_0 est donc vraie.
  - Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Mais alors $4 \leqslant 4u_n \leqslant 12$ puis $1 \leqslant 4u_n - 3 \leqslant 9$ soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{4u_n - 3} \leqslant \sqrt{9}$$

  c'est-à-dire

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

  La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

- Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
  - Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{7}$. On a donc $2 < \sqrt{7}$: la proposition Q_0 est donc vraie.
  - Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n. Montrons que Q_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Mais alors

$$4u_n - 3 \leqslant 4u_{n+1} - 3$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{4u_n-3} \leqslant \sqrt{4u_{n+1}-3}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 108. — Les suites suivantes sont elles arithmétiques ? géométriques ?

1. La suite u définie pour tout n par $u_n = 3n+5$.
2. La suite v définie pour tout n par $v_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.
3. La suite w définie pour tout n par $w_n = 3\times 2^n$.

Solution.

Méthode 7.8.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1}-u_n$. Pour montrer qu'elle est géométrique, on part de u_{n+1} pour essayer de montrer qu'elle s'écrit qu_n.
Pour montrer qu'une suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, on calcule les premiers termes et on les utilise pour le montrer.

- Remarquons que, pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n = 3$. La suite (u_n) est donc arithmétique, de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
- On a $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ et $v_2 = \frac{3}{5}$. On remarque alors que

  $$v_1 - v_0 = 0 \text{ et } v_2 - v_1 = -\frac{2}{5} \neq v_1 - v_0$$

  La suite v n'est donc pas arithmétique.
  De même, on a

  $$\frac{v_1}{v_0} = 1 \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

  La suite v n'est pas géométrique.
- Remarquons que, pour tout entier n, $w_{n+1} = 3\times 2^{n+1} = 2\times 3\times 2^n = 2\times w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique, de raison 2 et de premier terme $w_0 = 3$.

Exercice 109. — Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Sachant que $r = 2$, et $u_4 = 30$, déterminer u_0 et u_8. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_8$.
- Sachant que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$, déterminer r et u_0. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Sachant que $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$, déterminer q et u_4.

Solution.

Méthode 7.9.

On utilise les propriétés d'une suite arithmétique et géométrique, dont l'écriture en fonction de n.

- On a $u_0 = u_4 + (0-4)r = 30 - 8 = 22$. De même, $u_8 = u_4 + (8-4)r = 30 + 8 = 38$. Enfin, d'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :
$$u_0 + \cdots + u_8 = 9 \times \frac{u_0 + u_8}{2} = 9 \times 30 = 270$$
- De même, on a $u_4 = u_2 + (4-2)r$, c'est-à-dire $35 = 15 + 2r$, ce qui donne $r = 10$. On a alors
$$u_0 = u_2 + (0-2)r = 15 - 20 = -5$$
et enfin
$$u_0 + \cdots + u_4 = 5 \times \frac{u_0 + u_4}{2} = 5 \times 15 = 75$$
- (v_n) étant géométrique, on a $v_3 = qv_2$, soit $q = \frac{v_3}{v_2} = \frac{7}{5}$. Mais alors,
$$u_4 = qu_3 = \frac{7}{5} \times 7 = \frac{49}{5}$$

Exercices bilans

Exercice 110. — Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_0 = 2$ et
$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$$

1. Démontrer que si $u_{n+1} = 1$ alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 1$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, puis exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. Si on a $u_{n+1} = 1$, alors $\dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} = 1$, c'est-à-dire $5u_n - 1 = u_n + 3$, soit $4u_n = 4 \Leftrightarrow u_n = 1$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $u_n = 1$. D'après ce qui précède, on a alors $u_{n-1} = 1$, puis $u_{n-2} = 1$, et ainsi, $u_0 = 1$. Or, $u_0 = 2$, c'est donc absurde.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n \neq 1$.
2. Remarquons tout d'abord que la suite v est bien définie, puisque $u_n \neq 1$. Pour montrer que v est arithmétique, calculons $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier n :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$
soit
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3 - 4}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

Ainsi, la suite v est arithmétique, de raison $\frac{1}{4}$, et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi,

$$\forall\ n,\ v_n = 1 + \frac{n}{4}$$

3. Pour tout n, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, donc $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$, soit $u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} = 1 + \frac{4}{4+n} = \frac{8+n}{4+n}}$$

Exercice 111. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique? Géométrique?
2. Démontrer que si $u_{n+1} = -2$ alors $u_n = -2$. En déduire que pour tout n,
$$u_n \neq -2$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Quelle est sa raison?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Que vaut u_{10}?

Solution.

1. On a $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{4}{3}$. On constate alors que $u_1 - u_0 = -\frac{5}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{5}{6} \neq u_1 - u_0$. Donc u n'est pas arithmétique. De même,
$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{3} \neq \frac{u_1}{u_0}$$
Ainsi, la suite u n'est pas géométrique.
2. Si $u_{n+1} = -2$, alors $\frac{2}{1+u_n} = -2$, c'est-à-dire $2 = -2(1 + u_n)$ et donc $4 = -2u_n \Leftrightarrow u_n = -2$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $u_n = -2$. D'après ce qui précède, on a alors $u_{n-1} = -2$, puis $u_{n-2} = -2$, et ainsi, $u_0 = -2$. Or, $u_0 = 3$, c'est donc absurde.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n \neq -2$.
3. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$".
   - Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $0 \leqslant 3 \leqslant 3$. La proposition P_0 est donc vraie.
   - Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. Mais alors $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 4$ soit, en appliquant la

fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{2}{1} \geqslant \frac{2}{1+u_n} \geqslant \frac{2}{4}$$

c'est-à-dire

$$3 \geqslant 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant 0$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

4. (a) D'après la question 2, on sait que pour tout n, $u_n \neq -2$, et donc $u_n + 2 \neq 0$. La suite (v_n) est donc bien définie.

   (b) On a $v_0 = \frac{2}{5}$, $v_1 = -\frac{1}{5}$ et $v_2 = \frac{1}{10}$. Ainsi, la suite v semble géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Démontrons-le : pour tout entier n, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

   et donc

$$v_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n}\frac{1+u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n+2} = -\frac{1}{2}v_n$$

   Ainsi, la suite v est géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{5}$.

   (c) On a donc, pour tout entier n,

$$v_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (d) Puisque $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$, on a alors

$$v_n(u_n+2) = u_n - 1 \text{ soit } u_n(v_n-1) = -1-2v_n \text{ et donc } u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1} = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$$

   Bilan :

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = \frac{1+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5\times 2^n + 5\times(-1)^n}{5\times 2^n - 2\times(-1)^n}}$$

Exercice 112. — On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \frac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Calculer $v_0; u_1; v_1; u_2; v_2$. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

4. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant v_n$.
5. Montrer que (u_n) est décroissante, et (v_n) est croissante.
6. Montrer que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant 1$, et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$.

7. Montrer que pour tout n,
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$
En déduire que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Solution.

1. Rapidement on a $v_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $v_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{17}{12}$ et $v_2 = \frac{24}{17}$.
2. Faisons une récurrence liée. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$".
   - Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_0 \leqslant 2$. Ainsi, P_0 est vraie.
   - Supposons P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est également vraie. Par hypothèse de récurrence, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ et en additionnant ces deux inégalités
   $$2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \text{ soit } 1 \leqslant \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant 2$$
   donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En appliquant la fonction inverse, qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a
   $$1 \geqslant \frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} \text{ et donc } 2 \geqslant \frac{2}{u_{n+1}} \geqslant 1$$
   Ainsi, P_{n+1} est vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
3. Pour tout entier n, on a
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{u_n + v_n}{2}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n}$$
et donc
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 8}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 8}{2(u_n + v_n)}$$
Or $v_n = \frac{2}{u_n}$ donc $u_n v_n = 2$. Donc $8 = 4u_n v_n$. Ainsi,
$$u_{n+2} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. Puisque, pour tout entier n, $u_n \geqslant 1 > 0$ et $v_n \geqslant 1 > 0$, on a $2(u_n + v_n) > 0$ et donc, par quotient, $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$. Puisqu'on a également $u_0 - v_0 = 1 \geqslant 0$, on en déduit :
$$\forall\, n,\ u_n \geqslant v_n$$
5. Constatons que, pour tout entier n,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}$$
D'après le résultat précédent, on en déduit donc que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier n. Donc (u_n) est décroissante.

Enfin, puisque $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$, en appliquant la fonction inverse qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{u_n} \text{ soit } v_{n+1} \geqslant v_n$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout entier n, la suite (v_n) est croissante.

6. Notons, pour tout entier n, $w_n = u_n - v_n$. On a alors, pour tout entier n,

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\leqslant 0} - \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

La suite (w_n) est donc décroissante. Ainsi, pour tout entier n,

$$w_n \leqslant w_0 = 1$$

On a donc, d'après ce qui précède et la question 4., pour tout entier n,

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant 1$$

Or, quand $x \in [0;1]$, on a $x^2 \leqslant x$, donc

$$\forall\ n,\ (u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$$

7. Pour tout entier n, on a

$$2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \text{ et donc } 4 \leqslant 2(u_n + v_n) \leqslant 8$$

soit, en appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2(u_n + v_n)} \geqslant \frac{1}{8}$$

Enfin, puisque $(u_n - v_n)^2 \geqslant 0$,

$$\frac{(u_n - v_n)^2}{4} \geqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{8}$$

En utilisant le résultat de la question 6, on obtient finalement que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

Soit alors P la proposition définie, pour tout entier n, par P_n : "$u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$".

- Pour $n = 0$, on a $u_0 - v_0 = 1$ et $\frac{1}{4^0} = 1$. Donc $u_0 - v_0 \leqslant \frac{1}{4^0}$ et P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie. D'après ce qui précède, on a

  $$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

  Par hypothèse de récurrence, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$. Donc

  $$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc pour tout entier n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Limites générales

Exercice 113. — Déterminer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$

Solution. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = n^3\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, par somme on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} -1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = -1$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. Par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Autre possibilité : d'après la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$$

2. $u_n = \dfrac{2n+1}{1-4n}$

Solution. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-4\right)} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-4\right)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 4 = -4$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

3. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n-1}$

Solution. Même méthode que précédemment. Pour $n \neq 0$, on a

$$u_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = n\frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4. $u_n = \dfrac{(-1)^n+4}{n^2}$

Solution. **Réflexe** : lorsqu'il y a $(-1)^n$, on pense directement au théorème d'encadrement.
Pour tout n, on a

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \neq 0$

$$3 \leqslant (-1)^n + 4 \leqslant 5$$

et donc

$$\frac{3}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n^2} \text{ car } n^2 > 0.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

5. $u_n = \dfrac{2(-1)^{n^3+1}}{n+2}$

Solution. Même réflexe que précédemment. Pour tout entier n,

$$-1 \leqslant (-1)^{n^3+1} \leqslant 1$$

donc

$$\frac{-2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n+2} \text{ (car } n+2>0)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) convege, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

6. $u_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$

Solution. Pour $n \neq 0$, on a

$$u_n = n^3\left(3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3} = 3$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. Par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

7. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2-3n}$

Solution. Pour tout $n \neq 0$, on a

$$u_n = \frac{n\left(-3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n}-3\right)} = \frac{\left(-3+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}-3\right)}$$

Par somme et produit,

$$\lim_{n\to+\infty} -3+\frac{1}{n} = -3 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}-3 = -3$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-3}{-3} = 1$$

8. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n+1}$

Solution. Pour tout $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = n\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}$$

Par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

9. $u_n = \dfrac{2^n+4^n-5^n}{3^n+2\times 5^n}$

Solution. **Réflexe** : lorsque l'on a des puissances ainsi, on met en facteur la plus grande puissance, et on se ramène à des suites de la forme (q^n). Ici, pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{5^n\left(\frac{2^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}-1\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+2\right)} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}$$

Puisque $-1<\frac{2}{5}<1$, $-1<\frac{4}{5}<1$ et $-1<\frac{3}{5}<1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n-1 = -1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+2 = 2$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{2}$$

10. $u_n = \dfrac{2\times 3^n-4^n}{7^n-1}$

Solution. Pour tout entier n,

$$u_n = \frac{4^n\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)}{7^n\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)} = \left(\frac{4}{7}\right)^n \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

Puisque $-1 < \frac{4}{7} < 1$, $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{1}{7} < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

Par somme, produit et quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{-1}{1} = -1$$

et par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Suites et limites

Exercice 114. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

Solution.

1. Soit P_n la proposition définie pour tout entier n par "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$".
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$: P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie :

$$\begin{array}{rll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 3 & \\ \text{donc} & 1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 4 & \\ \text{et donc} & \frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{u_n+1} \geqslant \frac{1}{4} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{ainsi} & 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} & \text{soit } 3 \geqslant u_n \geqslant 0 \end{array}$$

   La proposition P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.

2.

(a) Puisque pour tout entier n, $0 \leqslant u_n$ alors $u_n + 2 \geqslant 2 \neq 0$. Ainsi (v_n) est bien définie.

(b) Montrons que la suite (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{2}{5}$.

(c) On a donc, pour tout entier n, $v_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Puisque pour tout entier n, on a $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$, alors

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1}$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$u_n = \frac{-1-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, par théorème, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1$$

Exercice 115. — On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier n, $w_n > 0$
   (d) Déterminer la limite de la suite (w_n).
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) est (v_n) sont adjacentes, et qu'elles ont la même limite que l'on notera l dans la suite du problème.
4. Soit t la suite définie pour tout entier naturel par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) Déterminer alors la valeur de l.

Solution.

1.

(a) Pour tout entier n, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 9v_n - (4u_n + 8v_n)}{12} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{w_n}{12}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$.

(b) Ainsi, pour tout entier n, on a $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

(c) Puisque $11 > 0$ et $\frac{1}{12} > 0$, pour tout entier n, $w_n > 0$.

(d) Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

2. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2v_n - 2u_n}{3} = \frac{2w_n}{3}$$

Puisque pour tout entier n, $w_n > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite u est bien croissante.
De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Ainsi, puisque pour tout n, $w_n > 0$, alors $v_{n+1} - v_n < 0$: la suite v est décroissante.

3. D'après les questions $1d$) et 2, on vient de démontrer que la suite u est croissante, v est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Les suites u et v sont bien adjacentes.
Par théorème, les deux suites adjacentes convergent, et convergent vers la même limite que l'on note l.

4.

(a) Pour tout n, on a

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n$$

La suite (t_n) est donc constante.

(b) La suite étant constante, pour tout entier n, $t_n = t_0 = 99$. Par somme et produit, puisque l désigne la limite de (u_n) et (v_n), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 3l + 8l = 11l$$

Ainsi, puisque la suite (t_n) est constante, on a $11l = 99$ et donc $l = 9$.
Bilan :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 9}$$

Exercice 116. — On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 20$, $v_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$$

1. Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - v_n$.

(a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique, à termes positifs.

(b) Déterminer la limite de (w_n), et exprimer w_n en fonction de n.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout entier n, on pose $t_n = 5u_n + 24v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et déterminer la limite de (u_n) et (v_n).

Solution.

1.
   (a) Pour tout entier n, on a
   $$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 5v_n}{6} = \frac{6u_n + 24v_n - (5u_n + 25v_n)}{30} = \frac{u_n - v_n}{30} = \frac{w_n}{30}$$
   La suite (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{30}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 20 - 1 = 19$. Puisque $w_0 > 0$ et $\frac{1}{30} > 0$, la suite (w_n) est donc à terme strictement positifs.
   (b) Ainsi, pour tout entier n, on a
   $$w_n = 19\left(\frac{1}{30}\right)^n$$
   Puisque $-1 < \frac{1}{30} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{30}\right)^n = 0$. Par produit,
   $$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

2. Pour tout entier n, on a
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - u_n = \frac{4v_n - 4u_n}{5} = -\frac{4w_n}{5}$$
   Puisque pour tout entier n, $w_n > 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite u est bien décroissante.
   De même,
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 5v_n}{6} - v_n = \frac{u_n - v_n}{6} = \frac{w_n}{6}$$
   Ainsi, puisque pour tout n, $w_n > 0$, alors $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite v est croissante.

3. D'après les questions 1*b*) et 2, on vient de démontrer que la suite u est décroissante, v est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Les suites u et v sont bien adjacentes.
   Par théorème, les deux suites adjacentes convergent, et convergent vers la même limite que l'on note l.

4.
   (a) Pour tout n, on a
   $$t_{n+1} = 5u_{n+1} + 24v_{n+1} = u_n + 4v_n + 4(u_n + 5v_n) = 5u_n + 24v_n = t_n$$
   La suite (t_n) est donc constante.
   (b) La suite étant constante, pour tout entier n, $t_n = t_0 = 124$. Par somme et produit, puisque l désigne la limite de (u_n) et (v_n), on obtient
   $$\lim_{n\to+\infty} t_n = 5l + 24l = 29l$$

Ainsi, puisque la suite (t_n) est constante, on a $29l = 124$ et donc $l = \frac{124}{29}$.
Bilan :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{124}{29}}$$

Enfin, puisque $u_n - v_n = w_n$ et $5u_n + 24v_n = t_n$, on obtient après résolution et pour tout entier n, que

$$u_n = \frac{t_n + 24w_n}{29} = \frac{124 + 456\left(\frac{1}{30}\right)^n}{29} \text{ et } v_n = \frac{t_n - 5w_n}{29} = \frac{124 - 95\left(\frac{1}{30}\right)^n}{29}$$

CHAPITRE 8

POLYNÔMES

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un objet qui servira régulièrement, et qui a déjà été vu, en partie, au lycée.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) ..... □
② Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme ..... □
③ Connaître le principe de la division euclidienne ..... □
④ Connaître la notion de racine, et de multiplicité ..... □
⑤ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ..... □
⑥ Connaître la notion de pôle d'une fraction rationnelle ..... □
⑦ Savoir déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle ..... □

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

I. Définitions

1) Notion de polynômes

Notation 4. — Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les fonctions $\begin{array}{rccc} X^i : & \mathbb{K} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & x^i \end{array}$ et la fonction $\begin{array}{rccc} X^0 : & \mathbb{K} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & 1 \end{array}$

Définition 115. — On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute somme finie d'applications précédentes, c'est-à-dire toute fonction s'écrivant sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$.

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et on note $\deg(P) = n$. Dans ce cas, a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.
- La **fonction polynôme associée** au polynôme P est la fonction, encore notée P, définie sur $\mathbb{K}$ par $P : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.
- Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Exemple 135. — Le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$ est un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 1. Sa fonction polynôme associée est la fonction $P : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi, $P(1) = 1^4 - 2 \times 1^2 + 1 = 0$.

Remarque 116. — Attention : la notation $P(X)$ représente une fonction (c'est une représentation **formelle**). On peut ainsi parler du polynôme $P(X) = X^2 - 1$ plutôt que de parler de la fonction polynôme P définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par $P(x) = x^2 - 1$.

Notation 5. — On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, $\mathbb{K}_1[X] = \{aX + b, (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$ et $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{K}^3\}$.

2) Degré

Propriété 40. — *Soient* P *et* Q *deux polynômes.*

- *Le degré d'un polynôme constant non nul est* 0.
- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Démonstration. On note n le degré de P et m le degré de Q. Ainsi, $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ et $Q(X) = b_m X^m + \cdots + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

- On a $(P+Q)(X) = a_nX^n + \cdots + a_0 + b_mX^m + \cdots + b_0$. Par construction, le degré de $P+Q$ est égale au plus grand des deux degrés, sauf si $n = m$ et $a_n = -b_m$, et dans ce cas, le degré est strictement inférieur à n. Dans tous les cas $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Quand on développe $P(X)Q(X)$, le terme de plus haut degré est le terme $a_nX^n b_mX^m = a_n b_m X^{n+m}$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$). Donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

□

Remarque 117. — Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, on dit qu'il est degré $-\infty$.

3) Dérivée d'un polynôme

Définition 116. — Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On appelle **polynôme dérivé**, et on note P', le polynôme définie par

$$P'(X) = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2X + a_1$$

Remarque 118. — On peut dérivée à nouveau P' et on note P'' ou $P^{(2)}$ la dérivée seconde de P. Plus généralement, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Exemple 136. — Soit $P(X) = 3X^3 + 2X^2 - 1$. Alors $P'(X) = 9X^2 + 4X$, $P^{(2)}(X) = 18X + 4$, $P^{(3)}(X) = 18$ et $P^{(4)}(X) = 0$.

Remarque 119. —

- Si $\deg(P) = n \geqslant 1$, alors $\deg(P') = n - 1$.
- Si $\deg(P) = n$, alors $\forall\ k > n, \quad P^{(k)} = 0$.

II. Egalité de polynômes et identification

1) Egalité de polynômes

Théorème 8.1.

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k$ deux polynômes. Alors $P = Q$ si et seulement si

$$n = m \quad \text{et} \quad \forall\ k \in [\![0; n]\!], \quad a_k = b_k$$

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré, et mêmes coefficients.

Exemple 137. — Soient $P(X) = 2X^2 + 3X - 1$ et $Q(X) = 2X^2 + aX - b$. Alors $P = Q$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 1$.

2) Application à l'identification

Exemple 138. — Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 3X + 2$. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Solution. Soit $Q(X) = (X-2)(aX^2 + bX + c)$. En développant,

$$Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX - 2aX^2 - 2bX - 2c = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$$

Pour que $P = Q$, par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-2a &= -1 \\ c-2b &= -3 \\ -2c &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= -1 \end{cases}$$

Ainsi, $P(X) = (X-2)(X^2 + X - 1)$.

Exercice 117. — Trouver deux réels a et b tels que,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Solution. En mettant au même dénominateur, on cherche a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2-1}$$

Par identification des coefficients, on a donc

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ains, pour tout réel x différent de 1 et -1, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

III. Racines d'un polynôme

1) Définition

Définition 117. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a un élement de $\mathbb{K}$. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Remarque 120. — Chercher les racines de P, c'est donc résoudre l'équation $P(X) = 0$

Exemple 139. — 1 est une racine du polynôme $P(X) = X^2 - 1$. En effet, $P(1) = 0$.

Définition 118. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a un réel. On dit que le polynôme P se **factorise** par $X-a$ (ou que $X-a$ **divise** P) s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$.

Exemple 140. — Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ se factorise par $X-1$. En effet, on a $P(X) = (X-1)(X^2+1)$.

Théorème 8.2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a un réel. Alors

a est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q(X) tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$.

Dans ce cas, on a alors $\deg(P) = \deg(X-a) + \deg(Q)$ c'est-à-dire $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Exemple 141. — Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X + 1$. Montrer que 1 est racine, puis factoriser P par $(X-1)$.

Solution. On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine. Par théorème, on peut donc factoriser P par $X-1$: il existe Q un polynôme tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. On cherche donc a, b et c tel que

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

Après développement, on obtient

$$X^3 - 2X + 1 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$

Par identification, on obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$. Ainsi

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$$

Définition 119 (Multiplicité d'une racine)**.** — On dit qu'une racine a d'un polynôme P est de **multiplicité** $k \in \mathbb{N}^*$ si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$. Une racine de multiplicité 1 est dite simple, de multiplicité 2 est dite double.

Exemple 142. — Montrer que 2 est racine double du polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$.

Solution. En effet, on a $P(2) = 0$, et puisque $P'(X) = 3X^2 - 6X$, on a également $P'(2) = 0$. Enfin, $P^{(2)}(X) = 6X - 6$ et $P^{(2)}(2) \neq 0$. 2 est donc bien une racine double de P.

Théorème 8.3.

a est une racine de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme P de degré n si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X-a)^k Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$.

Remarque 121. — Ainsi, si la racine est double, on peut mettre $(X-a)^2$ en facteur.

2) Nombre de racines d'un polynôme

Dans $\mathbb{C}$, on dispose d'un théorème fondamental en analyse :

Théorème 8.4. Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Démonstration. Théorème admis. □

Conséquence 5. — Ainsi, tout polynôme de degré n ($n \geqslant 1$) admet exactement n racines complexes, éventuellement non distinctes. Si P est de degré n, et de coefficient dominant a_n, il existe p racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_p$, tels que

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i} \quad \text{avec} \quad m_1 + \cdots + m_p = n$$

Conséquence 6. — Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Si P a $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Démonstration. En effet, P est au plus de degré n. Il ne peut pas admettre plus de n racines, sauf s'il est nul. □

Définition 120. — Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si et seulement si $P = AB \implies$ A ou B constant. Ainsi, on ne peut pas les factoriser.

Remarque 122. — Dans $\mathbb{C}[X]$, seuls les polynômes constants et de degré 1 sont irréductibles.

3) Cas des polynômes de degré 2 sur $\mathbb{R}[X]$

Théorème 8.5.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une unique racine réelle dite double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P ne possède pas de racines réelles, et ne se factorise donc pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 143. — Factoriser $P(X) = 2X^2 + 2X - 4$

Solution. On a $\Delta = 36 > 0$ donc le polynôme P possède deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$

Donc $P(X) = 2(X-1)(X+2)$.

Remarque 123. — Attention : on n'oubliera pas, lors de la factorisation, de mettre en facteur le coefficient de plus haut degré (dans l'exemple précédent, le 2).

Remarque 124. — Ainsi, dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes de degré 2, dont le discriminant est strictement négatif, sont irréductibles. On dispose alors du résultat suivant :

Proposition 8.6.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ est le produit de son coefficient dominant a_n, de polynômes unitaires de degré 1, et de polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatif.

4) Cas général

Méthode 8.1.

Lorsqu'on doit factoriser un polynôme P (ou déterminer ses racines) :

- On cherche des racines évidentes $(-2,-1,0,1,2)$ pour se ramener à un (ou des) polynôme(s) de degré 2.
- On factorise le polynôme P par $X-a$ où a désigne une racine évidente.
- Une fois ramené à un (ou des) polynômes de degré 2, on utilise la méthode classique du discriminant.

Exemple 144. — Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Déterminer les racines de P.

Solution.

- Premier étape : on cherche une "racine évidente" : $-2,-1,0,1,2$. Ici, on constate que $P(1) = 1-2-1+2 = 0$ donc 1 est racine évidente.
- Deuxième étape : on factorise P par $X-1$: on écrit $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. Donc Q peut s'écrire $aX^2 + bX + c$.
  On a alors
  $$P(X) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$
  Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :
  $$\begin{cases} a &= 1 \\ b-a &= -2 \\ c-b &= -1 \\ -c &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= -2 \end{cases}$$
  Donc $P(X) = (X-1)(X^2-X-2)$.
- Troisième étape : on détermine les racines du polynôme Q. Ici, Q est du second degré, dont le

discriminant vaut $\Delta = 9$. Donc Q possède deux racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

Donc $Q(X) = (X-2)(X+1)$

- Quatrième étape : on conclut. On a donc

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X+1)$$

et P possède trois racines réelles : $1, 2$ et -1.

Exercice 118. — Factoriser $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Solution. Remarquons que $P(1) = 0$ et $P(-2) = 0$. On peut donc factoriser par $(X-1)(X+2)$. Après factorisation, on obtient

$$P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+1)$$

et donc

$$P(X) = (X-1)(X+2)(X-i)(X+i)$$

Remarque 125. — Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ se factorise en $(X-1)(X+2)(X^2+1)$ car X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

5) Division euclidienne

Remarque 126. — Pour factoriser, plutôt que de procéder par identification, on peut également utiliser la division euclidienne.

Proposition 8.7.

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul. Alors, il existe deux polynômes uniques Q et R, avec $\deg R < \deg B$, tels que $A = BQ + R$. Le polynôme Q est le quotient, et R est le reste de la division euclidienne de A par B.

Remarque 127. — En pratique, on pose la division et on effectue la division comme pour la division entière.

Exemple 145. — Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 2X^2 - X + 2$ par $X - 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -2X^2 & -X & +2 & X\ -1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2\ -X\ -2 \\
\cline{1-2}
 & -1X^2 & -X & & \\
 & X^2 & -X & & \\
\cline{2-3}
 & & -2X & +2 & \\
 & & 2X & -2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Exercice 119. — Effectuer la division euclidienne de $2X^4 - X^3 + 3X - 5$ par $X^2 - X + 2$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$.

Solution. Par division euclidienne, on obtient

$$2X^4 - X^3 + 3X - 5 = (X^2 - X + 2)(2X^2 + X - 3) + (-2X + 1)$$

Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$. $\deg(R) < \deg((X-2)(X-3)) = 2$ et donc R s'écrit $aX + b$ avec a et b deux réels. On a donc

$$(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2 = (X-2)(X-3)Q(X) + aX + b$$

En prenant $X = 2$, on obtient $2a + b = (-1)^{2n} - 2 = -1$ et en prenant $X = 3$, on obtient $3a + b = -(1)^n - 2 = -3$. Ainsi, $a = -2$ et $b = 3$ et le reste s'écrit donc $-2X + 3$.

6) Relations racines-coefficients

Proposition 8.8.

Soient $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$, et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines complexes (éventuellement non distinctes). Alors

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Démonstration. En effet, par factorisation, on obtient

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 = a_n(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n)$$

En développant, on obtient

$$P(X) = a_n X^n + a_n(-\alpha_1 - \cdots - \alpha_n)X^{n-1} + \cdots + a_n(-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

On conclut par identification des coefficients. □

Conséquence 7. — Pour un polynôme de degré 2, $P(X) = aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0$), en notant z_1 et z_2 ses racines complexes, on a alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

IV. Fractions rationnelles

1) Définitions

Définition 121. — Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Le quotient $\frac{A}{B}$ est appelé **fraction rationnelle** à coefficient dans $\mathbb{K}$.
A est le numérateur de la fraction, et B le dénominateur.

Exemple 146. — Par exemple, $\dfrac{X^2+1}{X-2}$ est une fraction rationnelle.

Notation 6. — On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 8.9.

On munit $\mathbb{K}(X)$ de différentes relations :

- $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ si et seulement si $AD=BC$.
- $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD+BC}{BD}$ et $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$.

Remarque 128. — On remarque qu'il n'y a pas unicité de l'écriture d'une fraction rationnelle. Par exemple,

$$\frac{X^2+X^3}{X^2+X}=\frac{X+X^2}{X+1}$$

puisque $(X^2+X^3)(X+1)=(X^2+X)(X+X^2)$. On dit que ce sont des **représentants** de la même fraction rationnelle.
On dit alors qu'une fraction est **irréductible** si numérateur et dénominateur n'ont pas de facteurs irréductibles unitaires communs. Il existe alors un seul représentant irréductible d'une fraction rationnelle avec un dénominateur unitaire.

Méthode 8.2.

Pour déterminer un représentant irréductible d'une fraction rationnelle, on factorise numérateur et dénominateur et on simplifie les éventuels facteurs communs.

Exemple 147. — Mettre $\dfrac{X^2-1}{X^3-6X+5}$ sous forme irréductible.

Solution. En cherchant les racines, on obtient

$$X^2-1=(X-1)(X+1) \quad \text{et} \quad X^3-6X+5=(X-1)(X^2+X-5)$$

Ainsi,

$$\frac{X^2-1}{X^3-6X+5}=\frac{X+1}{X^2+X-5}$$

et la fraction est irréductible, puisque -1 n'est pas racine de X^2+X-5.

2) Degré et partie entière d'une fraction

On définit le degré d'une fraction rationnelle par analogie :

Définition 122. — Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B\neq 0$. Alors, on pose

$$\deg\left(\frac{A}{B}\right)=\deg A-\deg B$$

avec la convention $\deg(0) = -\infty$.

Remarque 129. — Ainsi, le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas de son représentant.

Propriété 41. — *Soient* F *et* G *deux fractions rationnelles de* $\mathbb{K}(X)$*, et* $k \in \mathbb{K}^*$.

1. $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
2. $\deg \frac{1}{F} = -\deg(F)$.
3. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$.
4. $\deg FG = \deg F + \deg G$.
5. $\deg(kF) = \deg(F)$.

Exemple 148. — Ainsi, la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X+1}{X^2+1}$ est de degré $\deg F = 1-2 = -1$.

Proposition 8.10. Partie entière

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $G \in \mathbb{K}(X)$, tel que $F = P + G$, avec $\deg(G) < 0$. Le polynôme P est appelé **partie entière** de F.

Méthode 8.3.

Pour déterminer la partie entière de $F = \frac{A}{B}$ (avec A, B des polynômes), on détermine la division euclidienne de A par B. En notant Q le quotient, et R le reste, on a alors

$$A = BQ + R \Leftrightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

avec $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$. Q représente donc la partie entière de F.

Exemple 149. — Déterminer la partie entière de $\dfrac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1}$.

Solution. Par division euclidienne, on obtient

$$X^3 - X^2 + 1 = (X^2+1)(X-1) - X + 2$$

avec $\deg(-X+2) < \deg(X^2+1)$. On a alors

$$\frac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1} = X - 1 + \frac{-X+2}{X^2+1}$$

et donc $X-1$ est la partie entière de $\dfrac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1}$.

3) Pôles et décomposition en éléments simples

Définition 123. — Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle. On appelle :

- **zéros** de F les racines du numérateur d'un représentant irréductible de F.
- **pôles** de F les racines du dénominateur d'un représentant irréductible de F.
- **multiplicité** d'un pôle la multiplicité de la racine correspondante du dénominateur d'un représentant irréductible de F.

Exemple 150. — Pour $F(X) = \dfrac{X^2-1}{X+2}$, 1 et -1 sont les racines de F, et -2 est un pôle simple de F.

Proposition 8.11. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. En prenant un représentant irréductible de F, on l'écrit sous la forme factorisée

$$F(X) = \frac{P(X)}{k\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i}}$$

où les a_i sont des nombres complexes, et les α_i des entiers naturels non nuls. Alors, il existe un unique polynôme E, et des uniques nombres complexes $c_{i,j}$, vérifiant

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{c_{i,j}}{(X-a_i)^j}\right)$$

Cette décomposition est appelée **décomposition en éléments simples** dans $\mathbb{C}$ de F.

Méthode 8.4.

Pour déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$, on écrit l'allure de la décomposition, puis on détermine les nombres complexes $c_{i,j}$ en utilisant différentes méthodes :

- On peut multiplier par $(X-a_i)^{\alpha_i}$ puis prendre $X = a_i$ pour déterminer les coefficients d'ordre le plus élevé.
- On peut utiliser les propriétés du polynôme (parité, imparité) pour déterminer certains coefficients.
- Enfin, on peut soit prendre des valeurs particulières (et résoudre un système), soit multiplier par X^k et prendre la limite en $+\infty$ pour déterminer certaines valeurs restantes.

Exemple 151. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X+1}{(X-i)X(X+2)^2}$$

Solution. Il existe quatre complexes a, b, c et d tels que

$$\frac{X+1}{(X-i)X(X+2)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{(X+2)^2}$$

En multipliant par $X-i$ et prenant $X = i$, on obtient

$$a = \frac{i+1}{i(i+2)^2} = \frac{1-7i}{25}$$

De même pour b et d (en multipliant respectivement par X et $(X+2)^2$), on obtient

$$b = \frac{1}{4}i \quad \text{et} \quad d = \frac{-2+i}{10}$$

Pour obtenir c, on peut multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$. On obtient alors $0 = a+b+c$, soit $c = -a-b = \frac{1}{25} + \frac{3}{100}i$.

Proposition 8.12. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Dans le cas réel, il faut se souvenir que les polynômes irréductibles ne sont pas uniquement de la forme $(X-a_i)$ mais peuvent être des polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif. Les décompositions s'écriront alors sous la forme $\frac{a}{(X-a_i)^p}$ avec $a \in \mathbb{R}$, ou $\frac{aX+b}{(aX^2+bX+c)^p}$ dans le cas d'un trinôme à discriminant strictement négatif.

Exemple 152. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X+1}{(X-2)(X^2+X+1)}$$

Solution. Le trinôme X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (car à discriminant strictement négatif). Ainsi, il existe trois réels a, b et c tels que

$$F(X) = \frac{a}{X-2} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

Par la méthode classique, on obtient $a = \frac{3}{7}$. Calculons alors $F(X) - \frac{3/7}{X-2}$:

$$\frac{X+1-3/7(X^2+X+1)}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{-3/7X^2+4/7X+4/7}{(X-2)(X^2+X+1)}$$

soit

$$\frac{X+1-3/7(X^2+X+1)}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{1}{7}\frac{-3X^2+4X+4}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{1}{7}\frac{(X-2)(-3X-2)}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{1}{7}\frac{-3X-2}{X^2+X+1}$$

Ainsi, $b = -\frac{3}{7}$ et $c = -\frac{2}{7}$.

fFileExiststex/Chap8/Exo8

Exercices

Exercice 120. — Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1)=0, P'(1)=1$ et $P''(1)=4$.

Solution. On cherche un polynôme de degré 2. On cherche donc a, b et c réels tels que $P(X)=aX^2+bX+c$. Ainsi, $P'(X)=2aX+b$ et $P''(X)=2a$. Ainsi, $P''(1)=4$ nous donne $a=2$. Puis $P'(1)=1$ nous donne

$$2a+b=1 \iff b=1-2a=-3$$

Enfin, $P(1)=0$ nous donne

$$a+b+c=0 \iff c=-a-b=1$$

Bilan : il y a un seul polynôme solution : $P(X)=2X^2-3X+1$.

Exercice 121. — Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1)=1$ et $P'(1)=0$.

Solution. De même, on cherche a, b et c trois réels tels que $P(X)=aX^2+bX+c$. Ainsi, $P'(X)=2aX+b$. Les deux conditions $P(1)=1$ et $P'(1)=0$ s'écrivent alors

$$a+b+c=1 \quad \text{et} \quad 2a+b=0 \iff b=-2a \quad \text{et} \quad c=1-a-b=1+a$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{P(X)=aX^2-2aX+(1+a), \quad a\in\mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 122. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{X^2+1}{X-1}$$

Solution. Pour tout réel x différent de 1, on a

$$ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$$

Ainsi

$$ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{x^2+1}{x-1} \iff \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}=\frac{x^2+1}{x-1}$$

Par identification des coefficients, on a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad \frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}}$$

Exercice 123. — Soit P le polynôme définie par $P(X) = (X-1)^4$. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier $k > 0$. Généraliser dans le cas où $P(X) = (X-a)^n$ ($a \in \mathbb{R}, n > 0$).

Solution. On constate que

$$P'(X) = 4(X-1)^3, \quad P''(X) = 4 \times 3(X-1)^2 = 12(X-1)^2, \quad P^{(3)}(X) = 12 \times 2(X-1) = 24(X-1)$$

$$P^{(4)}(X) = 24 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(X) = 0 \text{ si } n \geqslant 5$$

Ainsi, $P^{(k)}(1) = 0$ si $k \leqslant 3$ et $k \geqslant 5$, et $P^{(4)}(1) = 24$.
De manière plus générale, si $P(X) = (X-a)^n$, on a :

$$P^{(k)}(a) = 0 \text{ si } k \leqslant n-1 \text{ ou } k \geqslant n+1, \quad \text{et} \quad P^{(n)}(a) = n!$$

Exercice 124. — Pour tout réel x, soit $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Factoriser P.
2. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine de P, donc P est factorisable par $x-1$.
   P étant de degré 3, il existe trois réels a, b et c tels que

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

   Après développement, on a

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3x^3 - x - 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

   Par identification des coefficients, on a

   $$\begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= 0 \\ c-b &= -1 \\ -c &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 3 \\ c &= 2 \end{cases}$$

   Ainsi,

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

2. Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = 3x^2 + 3x + 2$. Q est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = -15 < 0$. Ainsi, Q est de signe constant, et est donc positif sur $\mathbb{R}$ ($3 > 0$). On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

   P est donc négatif sur $]-\infty; 1[$ et positif sur $]1; +\infty[$.

Exercice 125. — Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que $X + 2$ divise P.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.
4. Résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$.

Solution.

1. On constate que $P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = 0$. Ainsi, $X + 2$ divise P.
2. On cherche trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$, c'est-à-dire

$$X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = aX^3 + (b + 2a)X^2 + (c + 2b)X + 2c$$

Par identification des coefficients, on a

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b + 2a &= -2 \\ c + 2b &= -5 \\ 2c &= 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -4 \\ c &= 3 \end{cases}$$

Ainsi

$$P(X) = (X+2)(X^2 - 4X + 3)$$

3. Déterminons les racines de $Q(X) = X^2 - 4X + 3$. Son discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$. Ainsi, Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$

Ainsi, le polynôme P admet, quand à lui, trois racines : -2, 1 et 4.

4. Remarquons, puisque $e^x > 0$ que

$$e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0 \iff e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff P(e^x) = 0$$

D'après l'étude précédente, on en déduit que

$$e^x = -2 \quad \text{ou} \quad e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = 4$$

La première égalité est impossible. Les deux autres donnent $x = 0$ ou $x = \ln(4)$. Ainsi

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0, \ln(4)\}}$$

Exercice 126 (Tout seul)**.** — Factoriser, déterminer l'ensemble des racines, puis le signe des deux polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 23X + 20 \qquad Q(X) = X^3 - 13X - 12$$

Solution. On utilise la méthode classique : on cherche une solution particulière, on factorise et on conclut. On obtient ainsi :

- $P(X) = 2(X-1)(X+4)\left(X-\frac{5}{2}\right)$ et ses racines sont $-4, 1$ et $\frac{5}{2}$. On obtient le signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$\frac{5}{2}$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- $Q(X) = (X+1)(X+3)(X-4)$ et ses racines sont $-3, -1$ et 4. On obtient le signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		4	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 127 (Sur la somme et le produit des racines)**.** — Soit $P(X) = ax^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$) et possédant deux racines réelles, qu'on note α et β.

1. Factoriser P en fonction de α et β. En développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c.
2. Réciproquement, soient p et q deux nombres réels distincts. On pose $S = p+q$ et $P = pq$. Montrer que p et q sont les racines du polynômes $X^2 - SX + P$. Que se passe-t-il si $p = q$?
3. Déterminer l'âge de Boule et Bill, sachant que Bill est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28, et que le produit de leurs âges est égal à 192. (On pourra utiliser le fait que $784 = 28^2$).

Solution.

1. Puisque α et β sont les deux racines, on a

$$P(X) = a(X-\alpha)(X-\beta)$$

En développant, on a donc

$$P(X) = aX^2 + bX + c = aX^2 - a(\alpha+\beta)X + a\alpha\beta$$

Ainsi, par identification, on en déduit que

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

2. Notons $Q(X) = X^2 - SX + P = X^2 - (p+q)X + pq$. Alors

$$Q(p) = p^2 - (p+q)p + pq = 0 \quad \text{et} \quad Q(q) = q^2 - (p+q)q + pq = 0$$

Ainsi, p et q sont racines de Q, et ce sont donc ses deux racines (car il est de degré 2.). Si $p = q$ alors

$$Q(X) = X^2 - 2pX + p^2 = (X-p)^2$$

donc Q admet p comme racine double.

3. On note p l'âge de Boule et q l'âge de Bill. On a donc $p+q = 28$ et $pq = 192$. D'après la question précédente, p et q sont racines du polynômes

$$P(X) = X^2 - 28X + 192$$

dont le discriminant est $\Delta = (-28)^2 - 4\times 1\times 192 = 16$. Ainsi, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{28-\sqrt{16}}{2} = 12 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{28+\sqrt{16}}{2} = 16$$

Puisque Bill est le plus âgé, on en déduit que Bill a 16 ans et Boule 12 ans.

Exercice 128. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Solution. Les pôles sont $0, -1$ et -2 et sont simples. Il existe donc a, b et c trois réels tels que

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

Par les méthodes usuelles (on multiplie par X, puis on prend $X = 0$, on obtient :

$$a = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{-1\times(1)} = -1 \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{-2\times(-1)} = \frac{1}{2}$$

On peut alors écrit, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}$$

Par téléscopage :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}}$$

Exercice 129. — Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que X^2+2 divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution. Posons la division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$. Après calcul, on obtient

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2+2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + (-2\lambda + 6)$$

Ainsi, $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ si et seulement si le reste de la division est nul, soit si et seulement si $\boxed{\mu = 2 \quad \text{et} \quad \lambda = 3}$.

Exercice 130. — Calculer

$$\int_0^1 \frac{x-x^2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

Solution. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X-X^2}{X^3+X^2+X+1}$$

Remarquons que -1 est racine évidente du dénominateur. On a alors $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$. Il existe donc trois réels a, b et c tels que

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1}$$

Par la méthode classique (on multiplie par $X+1$ et on prend $X=-1$, on obtient $a=-1$. On obtient b et c en prenant deux valeurs quelconques. Ainsi, $b=0$ et $c=1$ et

$$\frac{X-X^2}{X^3+X^2+X+1} = \frac{-1}{X+1} + \frac{1}{X^2+1}$$

Ainsi, l'intégrale se calcule et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x-x^2}{x^3+x^2+x+1}\,dx &= \int_0^1 -\frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= [-\ln(x+1)]_0^1 + [\arctan(x)]_0^1 \\ &= -\ln(2) + \arctan(1) - \arctan(0) = -\ln(2) + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x-x^2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\pi}{4} - \ln(2)}$$

Remarquons que sur $[0;1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x-x^2}{x^3+x^2+x+1}$ est positive, et le résultat obtenu est également positif.

Exercice 131. — Développer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X-1}{X(X^2+1)^2}$$

Solution. Dans $\mathbb{R}(X)$, il existe donc cinq réels a, b, c, d et e tels que

$$\frac{X-1}{X(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}$$

Par la méthode classique, $a=-1$. En mettant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{X-1}{X(X^2+1)^2} + \frac{1}{X} = \frac{X^4+2X^2+X}{X(X^2+1)^2} = \frac{X^3+2X+1}{(X^2+1)^2}$$

de même

$$\frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} = \frac{(bX+c)(X^2+1)+dX+e}{(X^2+1)^2} = \frac{bX^3+cX^2+(b+d)X+c+e}{(X^2+1)^2}$$

Par identification des coefficients (puisque même dénominateur) :

$$\begin{cases} b & = & 1 \\ c & = & 0 \\ b+d & = 2 & \\ c+e & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & 1 \\ c & = & 0 \\ d & = 1 & \\ e & = & 1 \end{cases}$$

Ainsi, dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\boxed{\frac{X-1}{X(X^2+1)^2} = -\frac{1}{X} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{X+1}{(X^2+1)^2}}$$

Exercice 132 (*)**.** — Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ vérifiant $F^2 = X$.

Solution. Supposons qu'il existe une fraction rationnelle F vérifiant $F^2 = X$. Notons n son degré. Alors $\deg(F^2) = \deg(F \times F) = 2n$ et $\deg(X) = 1$. Puisque $F^2 = X$, on obtient alors $2n = 1$ soit $n = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde, puisqu'un degré est un entier relatif.
Bilan : il n'existe pas de fraction rationnelle F vérifiant $F^2 = X$.

CHAPITRE 9

MATRICES

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un objet très important, qui sera utilisé régulièrement et qui fera l'objet d'étude approfondie plus tard dans l'année.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) ..... □

② Connaître définition et propriétés des matrices inversibles ..... □

③ Savoir déterminer le rang d'une matrice ..... □

④ Savoir faire le lien entre système et matrice associée ..... □

⑤ Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice...

- par récurrence, en conjecturant l'allure générale ..... □
- par la formule du binôme de Newton ..... □
- par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée ..... □

I. Matrices

1) Définition

Définition 124. — Soient n et p deux entiers non nuls, et $\mathbb{K}$ représentant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau rectangulaire de nombres dans $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Big\} n \text{ lignes}$$

En général, lorsque A est une matrice à n lignes et p colonnes, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$. On écrit alors

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Notation 7. — L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 125. —

- On appelle **matrice ligne** $\begin{pmatrix} . & . & . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- On appelle **matrice colonne** $\begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- On appelle **matrice nulle** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $0_{n,p}$ (ou 0 quand il n'y a pas d'ambiguïté), la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

2) L'algèbre des matrices

a) Addition de matrices

Définition 126. — Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **somme** de la matrice A et de la matrice B la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée A + B définie par

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \forall\, j \in [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple 153. — Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Multiplication par un scalaire

Définition 127. — Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **produit** de la matrice A par le nombre λ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée λA, définie par

$$\lambda A = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Exemple 154. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4\\ 4 & -2\\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) Premières propriétés

Propriété 42. — *Soient* A, B *et* C *trois éléments de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *et* λ, μ *deux nombres de* $\mathbb{K}$.

- $A + B = B + A$ *(commutativité de l'addition).*
- $0 + A = A + 0 = A$ *(0 est le neutre de l'addition)*
- $A + (-A) = (-A) + A = A - A = 0$ *(−A est l'opposé de la matrice* A*.)*
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *et* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$ *(distributivités)*

Remarque 130. — Les différentes propriétés précédentes font de l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.

Remarque 131. — On peut manipuler, pour ces opérations, ainsi les matrices comme les nombres réels ou complexes. Par exemple, l'équation $X + A = B$ d'inconnue la matrice X, admet comme unique solution $X = B - A$. De même, l'équation $2X = A$ d'inconnue la matrice X admet comme unique solution $X = \frac{1}{2}A$.

d) Produit matriciel

Définition 128. — Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice $\mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, notée $A \times B$ ou AB, définie par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,m]\!],\ c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Remarque 132. —

- ⚠ Pour multiplier deux matrices, il faut qu'elles soient compatibles : lorsque l'on calcule AB il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- ⚠ La multiplication des matrices n'est pas **commutative** : en général, $AB \neq BA$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ⚠ Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut avoir $AB = 0$ sans pour autant que A et B soient nuls. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On dit que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est pas **intègre**.

Exemple 155. — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 43. — *Soient* A, B, C *trois matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées), et* λ *un élément de* $\mathbb{K}$.

- $A(BC) = (AB)C = ABC$ *(associativité de la multiplication)*
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$
- $(A+B)C = AC + BC$ *et* $C(A+B) = CA + CB$ *(distributivités)*

e) Transposition

Définition 129. — Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de la matrice A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA$, définie par

$${}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ c_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, la matrice ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A par symétrie, en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple 156. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 44. — *Soient* A *et* B *deux matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées) et* λ *un élément de* $\mathbb{K}$.

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ *et* ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$.
- ${}^t({}^tA) = A$ *et* ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

II. Matrices carrées

1) Définitions

a) Matrices carrées

Définition 130. — Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, plutôt que $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. De même, on notera 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 157. — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 131. — Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, on appelle **diagonale** de A les coefficients $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exemple 158. — Dans l'exemple précédent, la diagonale est $(1,-3)$.

b) Matrices diagonales et triangulaires

Définition 132. —

- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n où tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- La **matrice identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire supérieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire inférieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i < j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 133. — La matrice identité I_n est **neutre** pour la multiplication : quelle que soit la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AI_n = I_nA = A$.

c) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 133. — Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée.

- A est dite **symétrique** si

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, une matrice est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.

- A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n symétriques, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n antisymétiques.

Exemple 159. — La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

2) Puissances d'une matrice carrée

Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut alors calculer AB et BA (elles sont compatibles) et le produit est encore dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut alors définir la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

Définition 134. — Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit k un entier. On définit A^k de la manière suivante :

- Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.

- Si $k>0$, $A^k = \underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 45. — *Par définition, pour tout matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tous entiers p et q, $A^p\times A^q = A^{p+q}$.*

Remarque 134. — Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n diagonales, alors le produit AB est facile à calculer ; en effet, si $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n}\end{pmatrix}$, alors

$$AB=\begin{pmatrix} a_{1,1}\times b_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\times b_{n,n}\end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est une matrice diagonale $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$, alors pour tout entier p, on a

$$A^p=\begin{pmatrix} a_{1,1}^p & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^p\end{pmatrix}$$

Remarque 135. — ⚠ Puisque la multiplication des matrices n'est pas commutative, on n'a pas $(AB)^k = A^kB^k$. En effet, $(AB)^k = (AB)(AB)\cdots(AB)$ et il faut que $AB=BA$ pour pouvoir obtenir A^kB^k.

Définition 135. — Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B **commutent** si $AB=BA$.

Exemple 160. — La matrice I_n commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, $AI_n = I_nA = A$.

Théorème 9.1. Formule du binôme de Newton

Soient deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors, pour tout entier n, on a

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$$

Méthode 9.1.

Pour calculer A^p, on peut parfois utiliser la formule du binôme de Newton, en décomposant A sous la forme I_n+B avec B une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

Exemple 161. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution. On constate que $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^2 = 0$. Puisque I_3 et B commutent (*car* I_3 *commute avec toutes les matrices*), on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \underbrace{\binom{n}{2} B^2 + \cdots + \binom{n}{n} B^n}_{=0}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = I_3 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

résultat qui est également vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Méthode 9.2.

Pour calculer A^p, on peut également essayer de calculer les premières puissances, puis en déduire le résultat par récurrence sur p.

Exemple 162. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution. On constate que

$$A^0 = I_2 \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors P_n la proposition définie pour tout entier n par

$$P_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on démontre par récurrence sur n :

- Initialisation : puisque $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixé. Montrons alors P_{n+1} :

$$A^{n+1} = A^n \times A \underbrace{=}_{\text{par H.R.}} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 0,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Matrices inversibles

1) Définition

Définition 136. — Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, B est appelée **matrice inverse** de A, et est notée $B = A^{-1}$.

Notation 8. — On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrée d'ordre n inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 163. — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2$$

Remarque 136. — La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet, $I_n I_n = I_n I_n = I_n$.

2) Propriétés

Propriété 46. — *Soient* A *et* B *deux matrices carrées de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Si* $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *alors* $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- *Si* A *et* B *sont inversibles, alors* AB *est également inversible, et on a* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. Pour le premier point, on a en effet $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ donc A^{-1} est inversible et son inverse est A.
Pour le second point, on a $AB(B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Donc AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$. □

Pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 9.2.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle. S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0_n$ alors A n'est pas inversible.

Démonstration. Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons que A soit inversible, d'inverse A^{-1}. Alors

$$AB = 0_n \Rightarrow A^{-1}(AB) = O_n \Rightarrow B = 0_n$$

ce qui est absurde, puisque B n'est pas nulle. □

Remarque 137. — Si A et B sont toutes les deux non nulles, telles que $AB = 0_n$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

3) Règles de calcul

Propriété 47. — *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, *et* $C \in GL_n(\mathbb{K})$. *Alors*

$$AC = B \Leftrightarrow A = BC^{-1} \qquad CA = B \Leftrightarrow A = C^{-1}B$$

$$AC = BC \Leftrightarrow A = B \qquad CA = CB \Leftrightarrow A = B$$

Remarque 138. — ⚠ Cela n'est valable que si C est inversible ! Ce n'est pas forcément vrai si C n'est pas inversible. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a AC = BC et pourtant $A \neq B$.

Théorème 9.3.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier $AB = I_n$ ET $BA = I_n$. Seul un des sens est nécessaire.

Méthode 9.3.

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $A^{-1} = B$.

Exemple 164. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note également $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(I_2 + B)$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Solution.

1. On constate que
$$A(I_2 + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2. D'après ce qui précède, A est inversible, et $A^{-1} = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Ensemble $GL_2(\mathbb{R})$

Théorème 9.4.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté det(A).

Démonstration. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On suppose que $A \neq 0$ et donc $B \neq 0$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

- Si $ad - bc = 0$, alors $AB = 0_2$. Puisque $B \neq 0$, d'après un résultat précédent, A ne peut pas être inversible.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors $A \times \left(\frac{1}{ad-bc}B\right) = I_2$. D'après un résultat précédent, A est donc inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

□

Remarque 139. — Nous verrons plus tard dans l'année la notion de déterminant de manière plus générale.

IV. Systèmes linéaires et matrices

1) Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 165. — On s'intéresse au système

$$(S)\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

Notons alors $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$(S) \Leftrightarrow AX = Y$$

La matrice A est appelée **matrice associée** au système (S). Résoudre le système (S), c'est donc trouver

le vecteur colonne X.

Définition 137. — Soit (S) un système $n \times p$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On appelle **matrice associée** à (S) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors AX = Y, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

2) Inverse d'une matrice et système

Théorème 9.5.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne. Le système (S) AX = B admet une unique solution si, et seulement si, la matrice A est inversible.
Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Remarque 140. — Ainsi, pour résoudre un système (S), on peut introduire la matrice associée et résoudre une équation matricielle AX = B. Cela permet en général de simplifier les notations.

Conséquence 8. — Une matrice triangulaire supérieure A est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale sont non nuls.

Démonstration. En effet, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses pivots sont non nuls. □

Méthode 9.4.

Pour montrer qu'une matrice A est, ou n'est pas inversible, sans calculer son inverse, on résout matriciellement l'équation AX = 0 en appliquant la méthode du pivot de Gauss. Si on obtient une diagonale sans terme nul, la matrice sera inversible. On peut simplifier les écritures en écrivant (A|0) pour ne pas s'encombrer des inconnues.

Exemple 166. — Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Solution. On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}$$

Puisqu'un des termes sur la diagonale est nul, la matrice n'est pas inversible.
Pour A :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Les termes sur la diagonale étant non nuls, la matrice A est bien inversible.

Méthode 9.5.

Pour déterminer l'inverse d'une matrice, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss, mais en simplifiant les écritures. On écrit $(M|I_n)$ et on cherche à remplacer, par des opérations sur les lignes, M par I_n. A la place du I_n de départ, on aura alors M^{-1}.

Exemple 167. — Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution. On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette méthode de détermination de l'inverse d'une matrice est appelée **Réduction de Gauss-Jordan**, en hommage à *Carl Friedrich Gauss* et *Wilhelm Jordan*, mais était connue des Chinois au 1er siècle de notre ère, sous le nom *Fang cheng* dans *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique.*

Définition 138. — On appelle **rang** d'une matrice A, et on note rg(A) le rang du système associée AX = 0, où X représente le vecteur colonne des inconnues.

Propriété 48. — *On dispose des propriétés suivantes :*

- rg(A) = 0 *si et seulement si la la matrice est nulle.*
- rg(A) = 1 *si et seulement si toutes les colonnes de* A *sont colinéaires.*
- *Si la matrice* A *est carrée d'ordre n,* rg(A) = *n si et seulement si la matrice est inversible.*

fFileExiststex/Chap9/Exo9

Exercices

Calcul matriciel

Exercice 133. — Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Solution. Constatons que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = 9A - 18I_3$$

Ainsi,

$$\frac{1}{-18}(A^2 - 9A) = A\left(\frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{18}A\right) = I_3$$

Donc, A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{18}A$$

Exercice 134. — Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 9.6.

Pour déterminer A^n, on peut chercher une périodicité des puissances, c'est-à-dire un entier p tel que $A^p = A$ ou $A^p = I_n$.

Solution. On calcule les premières puissances de A et on constate que

$$A^2 = -I_2,\ A^3 = -A \text{ et } A^4 = I_2$$

Ainsi, $A^5 = A$, $A^6 = -I, \cdots$ donc on a une périodicité :

- Si $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k} = (A^4)^k = I_2^k = I_2$$
- Si $n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k+1} = A^{4k}.A = I_2.A = A$$
- Si $n = 4k+2$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k+2} = A^{4k}.A^2 = I_2.A^2 = A^2 = -I_2$$

- Si $n = 4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$), alors

$$A^n = A^{4k+3} = A^{4k}.A^3 = I_2.A^3 = A^3 = -A$$

Pour B, on constate que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B$$

Puis $B^3 = B^2.B = (2B).B = 2B^2 = 4B = 2^{3-1}$, $B^4 = B^3.B = (4B).B = 4B^2 = 8B = 2^{4-1}B$. On peut donc supposer que, pour tout $n \geqslant 1$, $B^n = 2^{n-1}B$, que l'on démontre par récurrence.
Soit P_n la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par "$B^n = 2^{n-1}B$".

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $B^1 = B$ et $2^{1-1}B = 2^0B = B$. Donc P_1 est vraie.
- **Hérédité** : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$, et montrons P_{n+1}.
  Par hypothèse de récurrence, $B^n = 2^{n-1}B$. Mais alors,

$$B^{n+1} = B^n.B \underbrace{=}_{\text{H.R.}} 2^{n-1}B.B = 2^{n-1}B^2 = 2^{n-1}.2B = 2^n.B = 2^{n+1-1}B$$

  P_{n+1} est donc vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\, n \geqslant 1,\ B^n = 2^{n-1}B \text{ et } B^0 = I_3$$

Exercice 135. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $I_3 + J$ où J est une matrice à déterminer.
2. Calculer J^2 et J^3. En déduire l'expression pour tout entier n de A^n en fonction de I_3, J et n.

Solution.

1. On constate que $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_3$. On va donc utiliser la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 3$.
   I_3 et J commutent, donc pour tout $n \geqslant 3$:

$$A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0}J^0 + \binom{n}{1}J^1 + \binom{n}{2}J^2 + \underbrace{\binom{n}{3}J^3 + \cdots + \binom{n}{n}J^n}_{=0_3 \text{ car } J^3 = 0_3}$$

   Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 3,\ A^n = 1.I_3 + n.J + \frac{n(n-1)}{2}J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que cette écrite est valide pour $n=0, n=1$ et également $n=2$. Donc :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 136. — Soient $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$, et $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Exprimer A sous la forme $\alpha\mathrm{I}_3+\beta\mathrm{J}$, où α et β sont deux réels.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Solution.

1. On constate que $\mathrm{A}=3\mathrm{J}-2\mathrm{I}$.
2. Calculons les puissances de J :

$$\mathrm{J}^2=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}=3\mathrm{J}$$

Ainsi, par un raisonnement par récurrence, on peut montrer que pour tout n, $\mathrm{J}^n=3^{n-1}\mathrm{J}$.
Puisque I_3 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall\, n\geqslant 1,\ \mathrm{A}^n=(3\mathrm{J}-2\mathrm{I})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3\mathrm{J})^k(-2\mathrm{I}_3)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\mathrm{J}^k\times(-2)^{n-k}$$

Or $\mathrm{J}^k=3^{k-1}\mathrm{J}$ pour $k\geqslant 1$ donc

$$\forall\, n\geqslant 1,\ \mathrm{A}^n=(-2)^n\mathrm{I}_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k3^{k-1}\mathrm{J}\times(-2)^{n-k}=(-2)^n\mathrm{I}_3+\mathrm{J}.\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-1}(-2)^{n-k}$$

Pour calculer la somme, on va se ramener à la formule du binôme de Newton pour les réels :

$$\forall\, n\geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-1}(-2)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{9^k}{3}(-2)^{n-k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}9^k(-2)^{n-k}=\frac{1}{3}\left((9-2)^n-(-2)^n\right)=\frac{1}{3}(7^n-(-2)^n)$$

Bilan : pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\mathrm{A}^n=(-2)^n\mathrm{I}_3+\frac{7^n-(-2)^n}{3}\mathrm{J}$, écriture également valable pour $n=0$.

Exercice 137. — Trouver toutes les matrices M diagonales d'ordre 3 telles que

$$\mathrm{M}^3+2\mathrm{M}^2-\mathrm{M}-2\mathrm{I}_3=0$$

Solution. On cherche une matrice solution diagonale, qu'on écrit $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$. Alors, M est solution si et seulement si

$$\mathrm{M}^3+2\mathrm{M}^2-\mathrm{M}-2=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a^3+2a^2-a-2 & 0 & 0\\ 0 & b^3+2b^2-b-2 & 0\\ 0 & 0 & c^3+2c^2-c-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi, M est solution si et seulement si a, b et c sont racines du polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$. Après étude, on trouve que les racines de P sont $1, -1$ et -2.
Bilan : M est solution si et seulement si M $(a,b,c) \in \{1;-1;-2\}^3$, ce qui fait un total de 27 matrices solutions.

Exercice 138. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$. En déduire que $I_3 - A$ est inversible, et déterminer son inverse.
4. De la même manière, montrer que $I_3 + A$ est inversible, et déterminer son inverse.

Solution.

1. On constate que $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$.
2. Puisque $A^3 = 0_3$ on peut écrire $A.A^2 = 0_3$. Par théorème, A est un diviseur de 0 et ne peut donc pas être inversible.
3. On développe (I_3 et A commutent) :
$$(I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3 - A^3 = I_3$$
puisque $A^3 = 0_3$. Ainsi, en notant $B = I_3 + A + A^2$, on peut écrire $(I_3 - A)B = I_3$. Par théorème, $I_3 - A$ est donc inversible, et son inverse est $B = I_3 + A + A^2$.
4. Par tâtonnement, on trouve que
$$(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3 + A^3 = I_3$$
Par théorème, $I_3 + A$ est également inversible, et son inverse est $I_3 - A + A^2$.

Remarque. — On utilise ici les identités remarquables assez générales :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^n - b^n - (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right) = (a+b)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^{2n-k}b^k$$

Exercice 139. — Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Solution. On utilise la méthode classique : on écrit $(A|I_3)$ et on applique les opérations du pivot de Gauss pour écrire $(I_3|B)$. Alors, $B = A^{-1}$.

$$(S)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$(S) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls, la matrice est inversible. On applique alors les opérations de la méthode du pivot de Gauss pour remontrer et obtenir I_3 à gauche :

$$(S) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right)$$

Ainsi, A est inversible, et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice B, elle est déjà triangulaire supérieure avec des pivots tous non nuls, elle est donc inversible. On remonte avec la méthode du pivot de Gauss et on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 140. — Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Solution. On applique la méthode du pivot de Gauss jusqu'à obtenir les pivots. Remarquons ici qu'on ne demande pas de calculer l'inverse si elle est inversible Ainsi

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Remarquons que $2-a-a^2$ s'annule si et seulement si $a = 1$ ou $a = -2$ et $a-1$ s'annule si $a = 1$.
Bilan : si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, les pivots sont non nuls et la matrice est donc inversible. Si $a = 1$ ou $a = -2$, la matrice n'est pas inversible.

Exercice 141. — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que pour tout n, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1} et u_n, et entre v_{n+1} et v_n.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaître les suites α et β. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, puis A^n pour tout n.

Solution.

1. On constate que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$. Ainsi

$$A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$$

   Donc, A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : "il existe u_n, v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on constate que $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$. Ainsi, P_0 est vraie, avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
   - Hérédité : on suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n. Montrons alors que P_{n+1} est vraie.
     Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. Mais alors

$$A^{n+1} = A^n A = (u_n A + v_n I_3)A = u_n A^2 + v_n A = u_n(A + 2I_3) + v_n A = (u_n + v_n)A + 2u_n I_3$$

     Ainsi, A^{n+1} s'écrit bien $u_{n+1}A + v_{n+1}I_3$, avec

$$u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n$$

     P_{n+1} est donc vraie ;

   D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n : A^n s'écrit $u_n A + v_n I_3$ avec

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ \forall\, n,\ u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n$$

3. Pour tout entier n, on constate que

$$\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) + 2u_n = 4u_n + 2v_n = 2\alpha_n$$

$$\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n = v_n - u_n = -\beta_n$$

   Ainsi, α est une suite géométrique, de raison 2 et de premier terme $\alpha_0 = 1$, et β est une suite géométrique de raison (-1) et de premier terme $\beta_0 = -1$. Donc

$$\forall\, n,\ \alpha_n = 2^n \text{ et } \beta_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Mais alors, puisque

$$u_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{3} \text{ et } v_n = \frac{\alpha_n - 2\beta_n}{3}$$

on en déduit donc

$$\forall\, n,\ u_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \text{ et } v_n = \frac{2^n - 2(-1)^{n+1}}{3}$$

et donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} A + \frac{2^n - 2(-1)^{n+1}}{3} I_3}$$

Exercice 142. — Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est elle pas inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices colonnes X telles que $AX = \lambda X$ lorsque λ prend les valeurs trouvées au 1.

Remarque : les λ trouvés s'appellent les valeurs propres de la matrice, et les vecteurs colonnes trouvés au 2 les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.

Solution. Notons $A_\lambda = A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

1. A_λ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or,

$$\det(A_\lambda) = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (2-\lambda-3)(2-\lambda+3) = (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

   Ainsi A_λ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 5$.

2. Il nous reste donc à résoudre les systèmes $AX = -X$ et $AX = 5X$.

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & -x \\ 3x & + & 2y & = & -y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

   On obtient les mêmes lignes. Ainsi, on obtient comme solution

$$\mathscr{S}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$AX = 5X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 5x \\ 3x & + & 2y & = & 5y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & - & 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

   On obtient les mêmes lignes (au signe près). Ainsi, on a les solutions :

$$\mathscr{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Suites et matrices

Exercice 143. — On considère les deux suites réels (u_n) et (v_n) définie par u_0, v_0 et pour tout n,

$$u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n$$

En introduisant une matrice A bien choisie vérifiant

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

démontrer successivement que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis $\mathrm{A} = 5\mathrm{I}_2 + \mathrm{J}$ avec $\mathrm{J}^2 = 0$. Déterminer alors A^n, puis l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Solution. Constatons que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrons alors par récurrence sur n la proposition définie pour tout entier n par "$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$".

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a bien $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On a montré précédemment que

  $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Donc

  $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}.\mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

  Ainsi, P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc montré que pour tout n, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
Il nous reste donc à calculer A^n pour tout entier n pour pouvoir conclure. Or, on constate que $\mathrm{A} = 5\mathrm{I}_2 + \mathrm{J}$ avec $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{J}^2 = 0_2$. D'après la formule du binôme de Newton (puisque I_2 et J commutent), pour tout $n \geqslant 2$, on a donc

$$\mathrm{A}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (5\mathrm{I}_2)^{n-k}\mathrm{J}^k = \binom{n}{0} 5^n \mathrm{I}_2 + \binom{n}{1} 5^{n-1}\mathrm{J} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (5\mathrm{I}_2)^{n-k}\mathrm{J}^k}_{=0_2}$$

Donc

$$\mathrm{A}^n = 5^n \mathrm{I}_2 + n5^{n-1}\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}$$

égalité également vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Enfin, puisque pour tout entier n, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (5^n + n5^{n-1})u_0 - n5^{n-1}v_0 \text{ et } v_n = n5^{n-1}u_0 + (5^n - n5^{n-1})v_0}$$

Exercice 144. — On considère la suite u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et pour tout n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $D = P^{-1}AP$? En déduire D^n.
2. Montrer que pour tout n, $D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de A^n.
3. Pour tout n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que pour tout n, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   (b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Solution.

1. On applique la méthode du pivot de Gauss tel qu'habituellement :

$$(P|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Les termes diagonaux sont tous non nuls, donc la matrice P est inversible, et

$$(P|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

   Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   Après calcul, on obtient alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   D étant diagonale, on en déduit donc que

$$\forall\, n,\ D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : "$D^n = P^{-1}A^nP$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $D^0 = I_3$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$. Donc P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.

On constate que $D^{n+1} = D^n D \underbrace{=}_{\text{H.R.}} P^{-1}A^nPD$. Or $D = P^{-1}AP$. Donc

$$D^{n+1} = P^{-1}A^nP(P^{-1}AP) = P^{-1}A^n\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$$

P_{n+1} est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et donc $\forall\ n,\ D^n = P^{-1}A^nP$. Mais alors

$$\forall\ n,\ A^n = PD^nP^{-1}$$

On connait P, P^{-1} et D^n. On en déduit donc A^n :

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} \frac{-3+(-1)^n+2^{n+3}}{6} & \frac{3-3(-1)^n}{6} & \frac{6+2(-1)^n-2^{n+3}}{6} \\ \frac{-3-(-1)^n+2^{n+2}}{6} & \frac{3+3(-1)^n}{6} & \frac{6-2(-1)^n-2^{n+2}}{6} \\ \frac{-3+(-1)^n+2^{n+1}}{6} & \frac{3-3(-1)^n}{6} & \frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6} \end{pmatrix}}$$

3. (a) Constatons que

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Mais alors, on peut montrer par récurrence sur n que

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$$

Soit Q_n la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$X_n = A^nX_0$".

- Initialisation : pour $n = 0$, $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$. Donc la proposition Q_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
  On vient de voir que $X_{n+1} = AX_n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$$

  La proposition Q_{n+1} est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout n, et $\forall\ n,\ X_n = A^nX_0$.

(b) Puisque $X_n = A^nX_0$, et qu'à la question 2., nous avons déterminé A^n, on peut en déduire ainsi que

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{-3+(-1)^n+2^{n+1}}{6}u_2 + \frac{3-3(-1)^n}{6}u_1 + \frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6}u_0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{3-(-1)^n-2^{n+1}}{6} + \frac{3-3(-1)^n}{6} + 2\frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6} = 3-2^n}$$

Remarque 142. — Cet exercice est très classique. Il utilise ce que l'on appelle la diagonalisation de la matrice A (en écrivant $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale - on reverra ça plus tard dans l'année) pour calculer les puissances n^{me} de la matrice A, et en déduire un résultat sur une suite.

CHAPITRE 10

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE L'ESPACE

Résumé

Ce chapitre est souvent délaissé par les élèves au concours.
Ce chapitre repose sur les bases connues des années précédentes, en les consolidant.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant le produit scalaire :
- Connaître la définition du produit scalaire ..... □
- Savoir calculer un produit scalaire dans le cas des coordonnées cartésiennes ..... □

② Concernant le produit vectoriel :
- Connaître la notion de produit vectoriel et les différentes méthodes de calcul ..... □
- Savoir utiliser le produit vectoriel pour déterminer l'aire d'un parallélogramme ..... □

③ Concernant le produit mixte :
- Connaître la notion de produit mixte et les différentes méthodes de calcul ..... □
- Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires ..... □
- Savoir utiliser le produit mixte pour déterminer le volume d'un parallélépipède ..... □

④ Concernant les plans :
- savoir déterminer une équation cartésienne de plan ..... □
- savoir déterminer un système d'équations paramétriques de plan ..... □
- savoir déterminer les intersections éventuelles de deux plans ..... □
- savoir déterminer la distance d'un point à un plan ..... □

⑤ Concernant les droites :
- savoir déterminer un système d'équations cartésiennes de droite ..... □
- savoir déterminer un système d'équations paramétriques de droite ..... □
- savoir déterminer la distance d'un point à une droite ..... □

⑥ Concernant les sphères :
- savoir déterminer une équation cartésienne de sphère ..... □
- savoir déterminer les caractéristiques d'une sphère connaissant une équation cartésienne ... □

I. Repérage dans l'espace

Dans cette partie, on revient sur les bases de la géométrie de l'espace.

1) Base de l'espace et repère

Rappel 14. — *Trois vecteurs de l'espace sont dits **coplanaires** si et seulement si on peut trouver trois représentants de ces vecteurs situés dans un même plan.*

Remarque 143. — On dira plus tard que si trois vecteurs sont coplanaires, la famille composée de ces trois vecteurs est **liées**. Sinon, on dira qu'elle est **libre**.

Définition 139. — On appelle **base** de l'espace la donnée de trois vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ non coplanaires. On dit que la base est

- **orthogonale** si et seulement si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- **orthonormée** ou orthonormale si et seulement si elle est orthogonale, et si $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

Proposition 10.1.

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe trois réels uniques x, y et z tels que

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$, y est appelé **ordonnée**, z est appelé la **côte** et (x, y, z) représente les **coordonnées cartésiennes** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On notera

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}(x; y; z)$$

Définition 140 (Repère)**.** — On appelle **repère** de l'espace la donnée d'un point O, appelé **origine** du repère, et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Le repère est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthogonale, et orthonormé si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée.

Proposition 10.2.

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point A de l'espace, il existe trois réels x, y et z uniques vérifiant

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

x est appelé abscisse du point A, y ordonnée du point A et z la côte du point A. Le triplet $(x; y; z)$ représente les **coordonnées cartésiennes** de A, et on note $A(x; y; z)$.

Remarque 144. — Toutes les formules de géométrie du plan ont leur équivalent dans l'espace. Ainsi, si on se donne un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, et $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points du plan,

alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \quad \text{si I milieu de [AB]}, \quad I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Exemple 168. — Soient A(1;2;1) et B(2;−1;1) deux points de l'espace. Déterminer les coordonnées du milieu de [AB] et les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

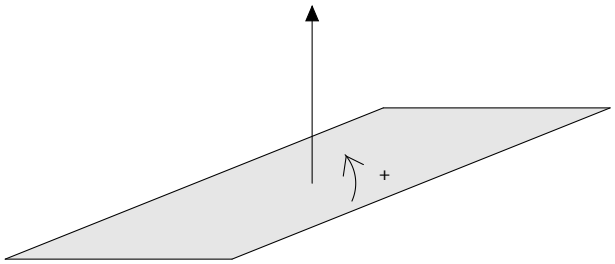
Solution. On a donc, en notant I le milieu de [AB] :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$$

2) Orientation

On souhaite orienter un repère de l'espace.

Remarque 145. — Si on se donne un plan et un vecteur $\overrightarrow{AB}$ non contenu dans ce plan, le sens direct est le sens trigonométrique si on regarde le plan depuis le point B, extrémité du vecteur extérieur.



Définition 141. — Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dite **directe** si $\sin(\vec{\imath}; \vec{\jmath}) > 0$, dans le plan contenant $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, orienté par le vecteur $\vec{k}$.

3) Produit scalaire dans l'espace

Définition 142. — On se donne une base **orthonormée** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On définit la **norme** d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ainsi, la distance entre deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ est donnée par

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple 169. — Soient A(1;2;1) et B(2;−1;1) deux points de l'espace dans un repère orthonormé. Déterminer la longueur AB.

Solution. On a
$$AB = \sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(1-1)^2} = \sqrt{10}$$

Définition 143. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2}{2}$$

Exemple 170. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solution. On a $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, puis
$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = 11, \quad ||\vec{u}||^2 = 6 \quad \text{et} \quad ||\vec{v}||^2 = 9$$
et donc
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{11-6-9}{2} = -2$$

Propriété 49. — *Le produit scalaire dans l'espace vérifie les même propriétés que dans le plan ; pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et réel λ, on a :*

- *homogénéité :* $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- *bilinéarité :* $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ *et* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
- *symétrie :* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- *positivité :* $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.
- *caractère défini :* $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Dans le cas où on dispose d'un repère orthonormé, on dispose d'une formule simple pour calculer le produit scalaire dans l'espace.

Proposition 10.3.

On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

Alors
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

Exemple 171. — Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times(-1)+2\times 2+3\times 2 = 9$$

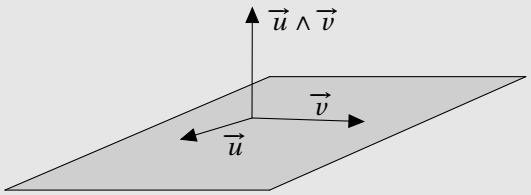
II. Produit vectoriel

1) Définition

Définition 144. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. On appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le **vecteur** vérifiant :

- la norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est
$$||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\left|\sin(\vec{u};\vec{v})\right|$$
- la direction de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- le triplet $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ est dans le sens direct

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.



Exercice 145. — Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace. Calculer les 9 produits vectoriels possibles en prenant deux couples ordonnées de vecteurs de la base.

Solution. On rapidement

$$\vec{\imath}\wedge\vec{\imath}=\vec{0},\quad \vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k},\quad \vec{\imath}\wedge\vec{k}=-\vec{\jmath}$$
$$\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}=-\vec{k},\quad \vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{0},\quad \vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{\imath}=\vec{\jmath},\quad \vec{k}\wedge\vec{\jmath}=-\vec{\imath},\quad \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$

2) Propriétés

Propriété 50. — *Soient $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, et λ un réel.*

- *antisymétrie :* $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$.
- *homogénéité :* $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
- *bilinéarité :*

$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}\quad et\quad \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$$

Démonstration. On utilise la définition du produit vectoriel. □

Remarque 146. — ⚠ Le produit vectoriel n'est pas associatif. En effet,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$$

On dispose d'une caractérisation des vecteurs colinéaires.

Proposition 10.4.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration. En effet, s'ils ne sont pas colinéaires, leur angle n'est pas égal à 0 ou π modulo 2π, et le sinus est donc non nul. S'ils sont colinéaires, par définition, leur produit vectoriel est nul. □

Proposition 10.5. Coordonnées cartésiennes

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée directe. Alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple 172. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée directe. Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Solution. On a

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \times (-1) - 3 \times 4 \\ 3 \times 3 - 2 \times (-1) \\ 2 \times 4 - 1 \times 3 \end{pmatrix}$$

soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -13 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Remarque 147. — On constate que, dans le plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \left|[\vec{u}\,;\vec{v}\,]\right|$$

Ainsi, l'aire du parallélogramme ABCD peut être calculée par $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||$.

III. Produit mixte

La notion de produit mixte étend la définition de déterminant à l'espace.

1) Définition

Définition 145. — Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle **produit mixte** des trois vecteurs, et on note $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}]$ ou $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ le nombre réel

$$[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Remarque 148. — Ainsi, le produit mixte, contrairement au produit vectoriel, est **un réel**.

Exemple 173. — Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée directe. Alors

$$[\vec{k};\vec{\jmath};\vec{\imath}] = (\vec{k}\wedge\vec{\jmath})\cdot\vec{\imath} = -\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = -1$$

Exercice 146. — Déterminer de même $[\vec{\imath};\vec{k};\vec{\jmath}]$ et $[\vec{\jmath};\vec{k};\vec{\jmath}]$.

Solution. On a rapidement

$$[\vec{\imath};\vec{k};\vec{\jmath}] = (\vec{\imath}\wedge\vec{k})\cdot\vec{\jmath} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = -1 \quad \text{et} \quad [\vec{\jmath};\vec{k};\vec{\jmath}] = (\vec{\jmath}\wedge\vec{k})\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$$

2) Propriétés

En utilisant les différentes propriétés du produit vectoriel et du produit scalaire, on obtient les propriétés suivantes :

Propriété 51. — *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ quatre vecteurs de l'espace, et λ un réel.*

- *on a* $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = [\vec{v};\vec{w};\vec{u}] = [\vec{w};\vec{u};\vec{v}]$.
- *homogénéité :* $[\lambda\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = [\vec{u};\lambda\vec{v};\vec{w}] = [\vec{u};\vec{v};\lambda\vec{w}] = \lambda[\vec{u};\vec{v};\vec{w}]$.
- *trilinéarité :* $[\vec{u}+\vec{a};\vec{v};\vec{w}] = [\vec{u};\vec{v};\vec{w}] + [\vec{a};\vec{v};\vec{w}]$, *et de même pour les deux autres variables.*
- *alterné :* $[\vec{v};\vec{u};\vec{w}] = -[\vec{u};\vec{v};\vec{w}]$ *et de même en inversant deux vecteurs consécutifs.*

On dispose, comme pour le produit vectoriel avec la colinéarité, d'une caractérisation de la coplanarité :

Proposition 10.6.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs. Alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = 0$.

Exercice 147. — Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}8\\-14\\7\end{pmatrix}$ sont coplanaires.

Solution. On constate que

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\-6\\4\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,] = -14\times 8 + (-6)\times(-14) + 4\times 7 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

Proposition 10.7. Coordonnées cartésiennes

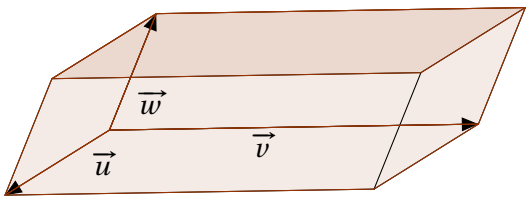
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace dans une base orthonormée directe.

Alors

$$[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x(y'z'' - y''z') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$$

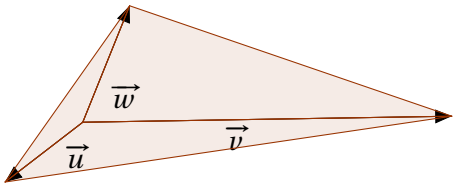
Démonstration. Cela découle des définition du produit scalaire et du produit vectoriel. □

Remarque 149. — Tout comme le déterminant dans le plan permet de calculer l'aire d'un parallélogramme, le produit mixte dans l'espace permet de calculer le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Ainsi, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non colinéaires, le parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ a pour volume



$$\mathcal{V}_P = \left|[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,]\right|$$

De même, le tétraèdre construit à partir de ces trois vecteurs a pour volume



$$\mathcal{V}_T = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,]\right|$$

IV. Plans

On se donne dans l'ensemble de cette section un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

1) Système d'équations paramétriques d'un plan

Définition 146. — Soient A un point de l'espace, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. On appelle **plan affine** $(A;\vec{u};\vec{v})$, ou encore plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \quad \text{avec} \quad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Définition 147. — Soient A et B deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace à égale distance de A et B est un plan, appelé **plan médiateur** du segment [AB].

Proposition 10.8.

Un point $M(x;y;z)$ est dans le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ non colinéaires si et seulement s'il existe $(t,t') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

Définition 148. — On appelle **système d'équations paramétriques** du plan $(A;\vec{u};\vec{v})$ le système

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \qquad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 174. — Déterminer un système d'équations paramétriques de plan passant par $A(1;2;3)$ et dirigés par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Solution. On a rapidement le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = 2 - t + t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \qquad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

Remarque 150. — Trois points non alignés A, B, C définissent un plan $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

2) Équation cartésienne d'un plan

Définition 149. — Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur **normal** du plan $\mathscr{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur inclus dans $\mathscr{P}$.

Remarque 151. — Il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, en utilisant la définition d'un plan vue précédemment.

Proposition 10.9.

Soient A un point de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{\text{AM}}$ orthogonal à $\vec{n}$ est le plan, passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Les points $\text{M}(x;y;z)$ de ce plan vérifient une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, appelée **équation cartésienne du plan**.
Réciproquement, l'ensemble des points $\text{M}(x;y;z)$ de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non tous nuls, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque 152. — ⚠ L'équation cartésienne d'un plan dans l'espace ressemble à l'équation cartésienne d'une droite dans un plan. Mais attention : une droite est donnée par deux équations cartésiennes de plan. Nous le verrons plus tard.

Méthode 10.1.

Pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan

- si on connait un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un point A, on écrit que $\text{M}(x;y;z)$ appartient au plan si et seulement si $ax+by+cz+d=0$, où d est à déterminer en utilisant les coordonnées de A.
- si on connait deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi qu'un point A :
  - soit on prend $\vec{u}\wedge\vec{v}$ comme vecteur normal et on applique la méthode précédente ;
  - soit on écrit que $\text{M}(x;y;z)$ appartient au plan si et seulement si $[\overrightarrow{\text{AM}};\vec{u};\vec{v}]=0$;
  - soit on forme un système d'équations paramétriques du plan et on élimine t et t'.

Exemple 175. — Soient A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1) et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}_1$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$, du plan (ABC), de $\mathscr{P}_2$ plan perpendiculaire à (ABC) passant par C, et du plan médiateur de [AB].

Solution. $\mathscr{P}_1$ a une équation de la forme $y-z+d=0$, avec $\text{O}\in\mathscr{P}_1$, c'est-à-dire $d=0$. Ainsi

$$\mathscr{P}_1 : y-z=0$$

Le plan (ABC) passe par A et est dirigé par $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non colinéaires. Ainsi, $\overrightarrow{n'}=\overrightarrow{\text{AB}}\wedge\overrightarrow{\text{AC}}$

est un vecteur normal. Puisque $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, (ABC) a une équation de la forme $x+y+z+d=0$. Or A $\in$ (ABC) donc $d=-1$:

$$(\text{ABC}) : x+y+z-1=0$$

Un plan $\mathscr{P}_2$ est perpendiculaire à (ABC) donc a pour vecteur normal (par exemple) $\overrightarrow{\text{CA}}$. Ainsi, $\mathscr{P}_2$ a une équation de la forme $x-z+d=0$, avec C $\in \mathscr{P}_2$, et donc $d=1$.

$$\mathscr{P}_2 : x-z+1=0$$

Enfin, le plan médiateur $\mathscr{P}_3$ de [AB] passe par I milieu de [AB] et a comme vecteur normal $\overrightarrow{\text{AB}}$. Ainsi, $\mathscr{P}_3$ a une équation de la forme $-x+y+d=0$, et passe par I$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$. Donc $d=0$ et $\mathscr{P}_3 : -x+y=0$.

Méthode 10.2.

Pour déterminer des vecteurs non colinéaires d'un plan ainsi qu'un point A :

- si on connait un système d'équation paramétrique, il suffit de prendre des valeurs quelconques pour t et t' pour obtenir un point, et de prendre les coefficients de t (respectivement de t') pour obtenir des vecteurs directeurs.
- si on connait un point A , un vecteur directeur u et un vecteur normal n, on obtient un deuxième vecteur directeur en prenant $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{n}$.
- si on connait deux points distincts du plan A et B, et un vecteur normal, on dispose de deux vecteurs directeurs : $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\wedge\overrightarrow{n}$.
- si on connait une équation cartésienne, on se ramène au cas précédent en récupérant un vecteur normal et deux points du plan.

Exemple 176. — Donner un point et deux vecteurs directeurs du plan d'équation $x-z+1=0$.

Solution. Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. De plus, A$(1;0;2)$ et B$(-1;0;0)$ sont deux points du plan. Ainsi, $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur du plan, et $\overrightarrow{\text{AB}}\wedge\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur du plan.

Bilan : A$(1;0;2)$ est un point du plan et $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs.

3) Distance d'un point à un plan

La formule est similaire à la distance d'un point à une droite dans le plan :

Proposition 10.10.

Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ (avec a,b,c non tous nuls), et A$(x_A;y_A;z_A)$ un point. La distance de A au plan $\mathscr{P}$ est la distance de A à son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$. Elle est

donnée par

$$d(\mathrm{A};\mathscr{P}) = \frac{|ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration. Même idée que pour la distance d'un point à une droite dans le plan. □

Exemple 177. — Déterminer la distance du point A(1;2;1) au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+2y-3z+2=0$.

Solution. En appliquant la formule précédente

$$d(\mathrm{A};\mathscr{P}) = \frac{|1+2\times 2-3\times 1+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

V. Droites

On se donne dans l'ensemble de cette section un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

1) Définitions

Définition 150. — Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace, et A et B deux points distincts de l'espace. On appelle :

- **droite vectorielle** dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$:
$$\mathscr{D}_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$
- **droite** (ou **droite affine**) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :
$$\mathscr{D}_{\mathrm{A},\vec{u}} = \left\{\mathrm{M\ du\ plan},\quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\vec{u}\right\}$$
$\vec{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite.
- droite passant par A et B la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Définition 151 (Vocabulaire)**.** —

- Deux droites sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Définition 152. — Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle **vecteur normal** de la droite $\mathscr{D}$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

2) Représentations paramétriques

Théorème 10.11.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul. Alors $M(x;y;z)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement

$$\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \\ z &= z_A + tc \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette représentation est appelée **système d'équations paramétriques**.

Démonstration. $M(x;y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \\ z &= z_A + tc \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

□

Exemple 178. — Soit $\mathscr{D}$ la droite, passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Alors $\mathscr{D}$ a comme système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3) Intersection de plans et représentation cartésienne

Proposition 10.12.

Soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteur normal respectif $\vec{n}$ et $\vec{n'}$. Alors, on dispose de trois cas possibles :

- soit les deux plans sont d'intersection vide : ils sont strictement parallèles, et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires et $\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$.
- soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus, et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires et $\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$.
- soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent en une droite dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$.

Définition 153. — Un système d'équations cartésiennes d'une droite est formé des équations $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d=0$ de deux plans non parallèles contenant cette droite.

Méthode 10.3.

Pour déterminer l'intersection de deux plans, on s'intéresse à leurs vecteurs normaux. S'ils ne sont pas colinéaires, leur intersection est une droite, dont on obtient un système d'équations cartésiennes.

Exemple 179. — Soient $\mathscr{P}_1 : 4x-2z+1=0$, $\mathscr{P}_2 : -2x+z=0$ et $\mathscr{P}_3 : x+y+z=2$. Déterminer les intersections deux à deux de ces trois plans.

Solution. Les vecteurs normaux respectifs de $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont $\vec{n}_1\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- $\vec{n}_1 = -2\vec{n}_2$. Donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles (et non confondues).
- $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants en une droite.
- $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants en une droite.

Méthode 10.4.

Pour déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on écrit que $M(x;y;z)$ est sur cette droite si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. On obtiendra trois équations cartésiennes, dont l'une est redondante. On en choisit deux pour obtenir le système d'équations cartésiennes.

Exercice 148. — Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Solution. $M(x;y;z)$ est sur la droite passant par $A(1;0;1)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, soit

$$\begin{cases} y-(z-1) &= 0\\ z-1-(x-1) &= 0\\ x-1-y &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, un système d'équations cartésiennes de la droite cherchée est

$$\begin{cases} y-z+1 &= 0\\ z-x &= 0 \end{cases}$$

4) Distance d'un point à une droite

La formule de la distance d'un point à une droite est légèrement différente :

Proposition 10.13.

Soit une droite $\mathscr{D}$, passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point du plan. Alors,

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\vec{u}||}$$

Exemple 180. — Soient $\mathscr{D}$ la droite passant par A(1;2;3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, et M(1;0;2).

Déterminer la distance de M à la droite $\mathscr{D}$.

Solution. Alors

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

et donc

$$d(\mathrm{A};\mathscr{D}) = \frac{||\vec{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AM}}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

VI. Sphères

Dans l'ensemble de cette section, on se place dans un repère orthonormal $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1) Définition

Définition 154. — Soit A un point de l'espace. La **sphère** $\mathscr{S}_{\mathrm{A},r}$ de centre A et de rayon $r\geqslant 0$ est l'ensemble des points de l'espace à une distance r de A :

$$\mathscr{C}_{\mathrm{A},r} = \{\mathrm{M\ de\ l'espace},\ \mathrm{AM}=r\}$$

Remarque 153. — On ne confondra pas la sphère avec la boule. La boule de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace à une distance inférieure ou égale à r de A.
On rappelle que le volume d'une boule est $\mathscr{V}_{\mathscr{B}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Remarque 154. — Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ un point de l'espace. $\mathrm{M}(x;y;z)$ est sur la sphère, de centre A et de rayon r si et seulement si $\mathrm{AM}=r$, c'est-à-dire

$$(x-x_\mathrm{A})^2+(y-y_\mathrm{A})^2+(z-z_\mathrm{A})^2=r^2$$

Cette écriture est appelée **équation cartésienne** de la sphère.

Définition 155 (Equation cartésienne)**.** — Toute sphère du plan admet une équation du type $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$. Réciproquement, tout ensemble admettant une équation du type $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ est une sphère.

Exemple 181. — La sphère de centre A(1;1;3) et de rayon 1 a pour équation cartésienne $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1^2$, c'est-à-dire $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6y+10=0$.

Méthode 10.5.

Connaissant l'équation cartésienne d'une sphère, on obtient le centre et le rayon en mettant les différents carrés sous forme canonique, comme pour l'équation cartésienne d'un cercle.

Exercice 149. — Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-10=0$.

Solution. En mettant sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-9=0 &\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+4y+z^2+2z-10=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+1)^2-1-10=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=16=4^2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc de la sphère de centre $A(1;-2;-1)$ et de rayon 4.

fFileExiststex/Chap10/Exo10

Exercices

Dans l'ensemble des exercices, $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé.

Équations et intersections

Exercice 150 (Équations cartésiennes de plan)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans suivant :

1. (ABC) où A(1;2;3), B(0;1;−2) et C(2;1;2).
2. plan médiateur du segment [AB], où A(1;2;3) et B(2;1;−1).
3. passant par A(−1;2;3) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$.
4. passant par A(2;1;3) et parallèle au plan d'équation $2x+3y+4z-18=0$.
5. passant par A(1;2;3) et orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.
6. de systèmes d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x &= 2 &+ &s &+ &2t \\ y &= 2 &+ &2s &+ &t \\ z &= 1 &- &s &- &t \end{cases} \qquad (t,s)\in\mathbb{R}^2$$
7. contenant la droite (d) et parallèle à (d') avec
$$(d):\begin{cases} 3x-y+z &= 1 \\ x-4y+z &= 2 \end{cases} \quad\text{et}\quad (d')\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x-y+z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 151. — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Déterminer une équation d'un plan parallèle à (Ox), d'un plan parallèle à (Oy) et d'un plan parallèle à (Oz)

Exercice 152 (Système d'équations cartésiennes de droite)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Déterminer un système d'équations cartésiennes des droites suivantes :

1. passant par A(1;2;3) et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
2. (AB) où A(1;2;3) et B(2;−1;2).
3. passant par A(1;2;3) et parallèle à la droite $d:\begin{cases} x+y-2z-1 &= 0 \\ x+2y+2z-2 &= 0 \end{cases}$.
4. perpendiculaire à (d) et (d') passant par A(1;2;3), avec
$$(d):\begin{cases} 3x-y+z &= 1 \\ x-4y+z &= 2 \end{cases} \quad\text{et}\quad (d')\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x-y+z &= 2 \end{cases}$$

Solution.

1. M$(x;y;z)$ est sur la droite (d_1) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ si et seulement $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\vec{0}$. On obtient alors
$$\begin{cases} y-2z+4 &= 0\\ -x+z-2 &= 0\end{cases}$$

2. M$(x;y;z)$ est sur la droite (d_2) passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. On obtient alors
$$\begin{cases} -y+3z-7 &= 0\\ x+z-4 &= 0\end{cases}$$

3. la droite étant parallèle à $d:\begin{cases} x+y-2z-1 &= 0\\ x+2y+2z-2 &= 0\end{cases}$, elle a un système d'équations cartésiennes de la forme $\begin{cases} x+y-2z+d &= 0\\ x+2y+2z+d' &= 0\end{cases}$. Puisque A est sur ma droite, on obtient $d=3$ et $d'=-11$. Ainsi, un système d'équations cartésiennes est
$$\begin{cases} x+y-2z+3 &= 0\\ x+2y+2z-11 &= 0\end{cases}$$

4. Concernant la droite (d), les vecteurs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à (d).
Ainsi, $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2\begin{pmatrix}3\\-2\\-11\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
De même, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et sont des vecteurs normaux à la droite (d_4) perpendiculaire à (d) et (d'). Ainsi, un système d'équations cartésiennes de (d_4) est
$$\begin{cases} 3x-2y-11z+d &= 0\\ 2x+y-3z+d' &= 0\end{cases}$$
Puisque A$\in(d_4)$, on en déduit que $d=34$ et $d'=5$ et donc
$$(d_4):\begin{cases} 3x-2y-11z+34 &= 0\\ 2x+y-3z+5 &= 0\end{cases}$$

Exercice 153 (Intersection)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Déterminer la nature des intersections suivantes :

1. de la sphère S de centre A$(1;-3;1)$ et de rayon 3, avec le plan $\mathscr{P}_1:x+y-3z=-3$ et avec le plan $\mathscr{P}_2:2x-y+2z+2=0$.
2. de la sphère de centre O et de rayon 2, et la droite D, dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ passant par A$(1;2;0)$.

3. des droites (d) et (d'), dont un système d'équations paramétriques est donné par :

$$(d):\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}, \quad \text{et} \quad (d'):\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6 + t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Méthode 10.6.

Pour déterminer la nature de l'intersection d'une sphère et d'un plan, on détermine la distance du centre de la sphère au plan, et selon sa valeur :

- si la distance est strictement supérieure au rayon, l'intersection est vide ;
- si la distance est égale au rayon, l'intersection est un point (cas du plan tangent à la sphère) ;
- si la distance est strictement inférieure au rayon, l'intersection st un cercle.

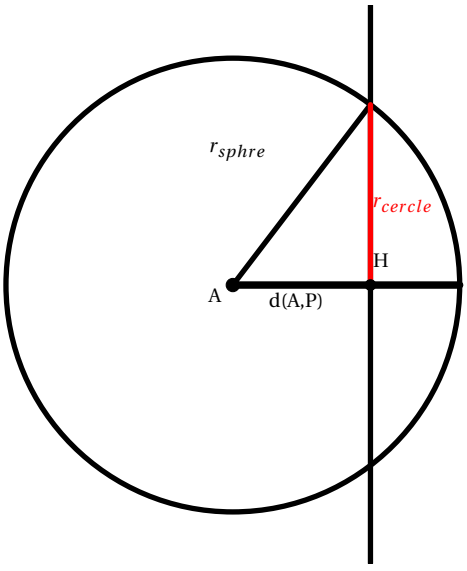
Méthode 10.7.

Pour déterminer l'intersection de deux droites dont on connait un système d'équations paramétriques, on égalise les coordonnées pour obtenir un système de trois équations à deux inconnues (t et t').

- si on n'obtient pas de solutions, les droites ne sont pas concourantes ;
- si on obtient une unique solution, les droites sont sécantes ;
- si on obtient une infinité de solution, les droites sont confondues.

Solution.

1. Dans le premier cas, $d(\text{A},\mathscr{P}_1) = \dfrac{|1-3-3+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{11}} = \dfrac{2\sqrt{11}}{11} < 3$. L'intersection est donc un cercle, contenu dans le plan $\mathscr{P}_1$.



Le centre du cercle est le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}_1$, et le rayon R vérifie, d'après le théorème de Pythagore $\text{R}^2 + d(\text{A},\mathscr{P}_1)^2 = 3^3$.

Anisi, $\overrightarrow{\text{AH}}$ doit être colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{\text{AH}}\wedge\vec{n} = \vec{0}$. En notant $\text{H}(x;y;z)$, on obtient

$\begin{pmatrix} -3y-z-8 \\ 3x+z-4 \\ x-y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sachant que $H \in \mathscr{P}_1$. En résolvant le système de 4 équations à 3 inconnues, on obtient $x = \frac{13}{11}$, $y = \frac{-31}{11}$ et $z = \frac{5}{11}$.

Bilan : l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ est le cercle, de centre $H\left(\frac{13}{11}; -\frac{31}{11}; \frac{5}{11}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{95}{11}}$.

Dans le deuxième cas, $d(A, \mathscr{P}_2) = \dfrac{|2+3+2+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3$. Ainsi, l'intersection de la sphère et du plan est un point (cas limite). Il s'agit du projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}_2$. Par le même raisonnement que précédemment, on obtient 4 équations et 3 inconnues ($\overrightarrow{AH} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ avec $2x - y + 2z + 2 = 0$). On résout et obtient $H(-1; -2, -1)$.

2. De la même manière, on calcule la distance de l'origine à la droite D. On obtient

$$d(O, D) = \frac{||\overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} < 2$$

L'intersection est donc deux points. En injectant le système d'équations paramétriques de la droite dans l'équation de la sphère, on obtient

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = \quad + t \end{cases} \quad \text{et} \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$$

soit $3t^2 + 6t + 1 = 0$. Cela donne deux valeurs de t, et donc deux points d'intersection :

$$H_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}; -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \quad \text{et} \quad H_2\left(\frac{-\sqrt{6}}{3}; 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

3. On égalise les coordonnées :

$$\begin{cases} 4 + t = 8 + 5t' \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \\ 4 - t = 6 + t' \end{cases} \sim t = -1 \quad \text{et} \quad t' = -1$$

Les droites sont donc sécantes en $H(3; 4; 5)$.

Résultats généraux

Exercice 154 (Identité de Lagrange)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. Montrer que $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{u} \cdot \vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$.
2. Montrer que
$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2$$

> **Remarque 155.** — Cette égalité est appelée **identité de Lagrange**

3. Montrer que si le vecteur $\vec{u}$ est unitaire (c'est-à-dire de norme 1), alors

$$||\vec{u}\wedge\vec{\imath}||^2+||\vec{u}\wedge\vec{\jmath}||^2+||\vec{u}\wedge\vec{k}||^2=2$$

En déduire alors que au moins l'un des nombres $||\vec{u}\wedge\vec{\imath}||$, $||\vec{u}\wedge\vec{\jmath}||$, $||\vec{u}\wedge\vec{k}||$ est supérieure à $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 155 (Plan bissecteur)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $\mathscr{P}_1 : 2x-4y+1=0$ et $\mathscr{P}_2 : 6x-2y-3z+2=0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Exercice 156 (Torseurs)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On appelle **torseur** de l'espace une application $\vec{M}$ qui à tout point P de l'espace, associe un vecteur $\vec{M}(P)$ de l'espace, vérifiant la relation de **Varignon** :

$$\forall\ (A,B)\text{ de l'espace},\quad \vec{M}(B)=\vec{M}(A)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Le vecteur $\vec{R}$ est appelé **résultante** de la fonction $\vec{M}$.

1. Montrer que si $\vec{R}$ et $\vec{S}$ sont des résultantes du même torseur $\vec{M}$, alors $\vec{R}=\vec{S}$. Ainsi, la résultante est **unique**.
2. Soit $\vec{M}$ un torseur. Montrer que pour tous points A et B de l'espace, on a

$$\vec{M}(A)\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{M}(B)\cdot\overrightarrow{AB}$$

(cette relation est appelée **équiprojectivité** du torseur).
3. On se donne un vecteur $\vec{R}$ de l'espace, un point A de l'espace et un vecteur $\vec{u}$ de l'espace. Montrer qu'il existe un unique torseur $\vec{M}$ de résultante $\vec{R}$ et tel que $\vec{M}(A)=\vec{u}$.
Ainsi, il suffit de connaître la résultante d'un torseur, et sa valeur en un point (le "moment en un point"). Ce torseur est en général noté $\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{u}\end{array}\right\}_A$.
4. Soient A un point de l'espace, et $\vec{R},\vec{R'},\vec{u}$ et $\vec{u'}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que

$$\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{u}\end{array}\right\}_A+\left\{\begin{array}{c}\vec{R'}\\ \vec{u'}\end{array}\right\}_A=\left\{\begin{array}{c}\vec{R}+\vec{R'}\\ \vec{u}+\vec{u'}\end{array}\right\}_A$$

5. Soient $\vec{M}$ et $\vec{M'}$ deux torseurs de résultantes respectives $\vec{R}$ et $\vec{R'}$. Montrer que le nombre

$$\vec{R}\cdot\vec{M'}(A)+\vec{R'}\cdot\vec{M}(A)$$

est indépendant du point A de l'espace choisi. On l'appelle le **coproduit** de ces torseurs.
Montrer que ce coproduit d'un torseur avec lui même est nul si et seulement si le torseur est glisseur, c'est-à-dire si le torseur est nul en un point.

CHAPITRE 11

ESPACES VECTORIELS

Résumé

Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile, et surtout, essentiel pour d'autres chapitres de l'année.
Il doit être maitrisé dans son ensemble.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :
- Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ..... □
- Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs ..... □
- Savoir montrer que deux espaces sont en somme directe ..... □
- Savoir montrer que deux espaces sont supplémentaires dans un espace vectoriel ..... □

② Maitriser la notion de base :
- Savoir montrer qu'une famille est libre ..... □
- Savoir montrer qu'une famille est génératrice ..... □
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel ..... □
- Connaître les bases canoniques des espaces usuels ..... □
- Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel ..... □
- Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base ..... □

③ Concernant les applications linéaires :
- Savoir montrer qu'une application est linéaire ..... □
- Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire ..... □
- Savoir démontrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective ..... □

Dans l'ensemble de ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels

1) Généralités

Définition 156. — Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi + est une **loi de composition interne** sur E si $\forall\ (x,y)\in \mathrm{E}^2, x+y\in \mathrm{E}$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si $\forall\ x\in \mathrm{E}, \forall\ \lambda\in\mathbb{R}, \lambda\cdot x\in \mathrm{E}$.

Exemple 182. — L'exemple le plus classique est l'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La loi d'addition de matrices est une loi de composition interne, et la multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ est une loi de composition externe.

Définition 157. — Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi interne, noté +, et d'une loi externe, noté $\cdot$. On dit que E est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** si les lois vérifient les propriétés suivantes :

- (commutativité de +) : $\forall\ (x,y)\in \mathrm{E}^2, x+y=y+x$.
- (associativité de +) : $\forall\ (x,y,z)\in \mathrm{E}^3, (x+y)+z=x+(y+z)$
- (neutre pour +) : il existe un élément, noté 0_E, tel que $\forall\ x\in \mathrm{E}, x+0_\mathrm{E}=0_\mathrm{E}+x=x$.
- (inverse pour +) : pour tout $x\in \mathrm{E}$, il existe un élément $y\in \mathrm{E}$, tel que $x+y=y+x=0_\mathrm{E}$. Cet élément est appelé *opposé* de x, et est noté $-x$.
- (neutre pour $\cdot$) $\forall\ x\in \mathrm{E}, 1.x=x$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \forall\ (x,y)\in \mathrm{E}^2, \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall\ x\in \mathrm{E}, (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$
- $\forall\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall\ x\in \mathrm{E}, \lambda.(\mu.x)=(\lambda\times\mu).x$.

Remarque 156. — Si E est un espace vectoriel, les éléments de E sont alors appelés les **vecteurs**, et les réels sont appelés les **scalaires**. L'élément 0_E est appelé vecteur nul.

Remarque 157. — Les quatre premières propriétés font de (E, +) ce qu'on appelle un **groupe abélien** ou groupe commutatif.

Remarque 158. — Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe est très souvent omis. On notera plus souvent $2x$ plutôt que $2\cdot x$.

Proposition 11.1.

Les ensembles $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) pour $n\geqslant 1$, munis de l'addition de vecteurs, et de la multiplication par un réel, sont des espaces vectoriels.

Démonstration. En effet, si $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ alors

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1+a_1\\ \vdots\\ b_n+a_n\end{pmatrix}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\ \vdots\\ (a_n+b_n)+c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\ \vdots\\ a_n+(b_n+c_n)\end{pmatrix}=A+(B+C)$$

$$A+0_{n,1}=\begin{pmatrix}a_1+0\\ \vdots\\ a_n+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+a_1\\ \vdots\\ 0+a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=A$$

$$A+(-A)=\begin{pmatrix}a_1+(-a_1)\\ \vdots\\ a_n+(-a_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=0_{n,1}$$

$$1.A=\begin{pmatrix}1.a_1\\ \vdots\\ 1.a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=A$$

$$\lambda.(A+B)=\lambda.\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(a_1+b_1)\\ \vdots\\ \lambda(a_n+b_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\lambda b_1\\ \vdots\\ \lambda a_n+\lambda b_n\end{pmatrix}=\lambda.\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\lambda.A+\lambda.B$$

$$(\lambda+\mu).A=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)a_1\\ \vdots\\ (\lambda+\mu)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\mu a_1\\ \vdots\\ \lambda a_n+\mu a_n\end{pmatrix}=\lambda.A+\mu.A$$

$$\lambda.(\mu.A)=\lambda.\begin{pmatrix}\mu a_1\\ \vdots\\ \mu a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mu a_1\\ \vdots\\ \lambda\mu a_n\end{pmatrix}=(\lambda\times\mu).A$$

□

Remarque 159. — En utilisant la même méthode, on peut prouver que :

- L'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})=\mathbb{K}^I$ d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un K-espace vectoriel.
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[X]$, ainsi que $\mathbb{K}_n[X]$, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- $\{0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé l'espace nul.
- enfin, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E\times F$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Ainsi, la plupart des ensembles usuels que l'on manipule sont des espaces vectoriels.

2) Règles de calculs

On se place ici dans un espace vectoriel E.

Proposition 11.2.

Pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$, on a

- $\lambda.0_E=0_E$ et $0.x=0_E$
- $(-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x)$.
- $x+(-y)=x-y$.

Théorème 11.3.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x \in E$. Alors

$$\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E \quad \text{ou} \quad \lambda = 0$$

3) Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 158. — On appelle **famille de vecteurs** de E une n-liste $(e_1, \cdots, e_n)$ d'éléments de E.

Exemple 183. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors (A, B) désigne une famille de deux vecteurs de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition 159. — Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. Soit x un vecteur de E. On dit que x est une **combinaison linéaire** de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ s'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

Les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont alors les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque 160. — Il n'y a pas forcément unicité de la combinaison linéaire.

Exemple 184. — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, $2.A - 3.B = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de A et B.

Méthode 11.1.

Pour montrer qu'un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on résout un système pour déterminer (ou non) les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.

Exemple 185. — Notons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que X est combinaison linéaire de A et B.

Solution. On écrit $X = \lambda A + \mu B$. On a alors

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3\mu \\ 2\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

On résout alors le système :

$$\begin{cases} \lambda - 3\mu = -5 \\ 2\lambda + \mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3\mu = -5 \\ 7\mu = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $X = A + 2B$.

II. Sous-espace vectoriel

1) Définition

Définition 160. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous ensemble de E non vide. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si les restrictions des lois + et · à F font de F un espace vectoriel.

Exemple 186. — Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 52. — *Soit* F *un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *Alors* $0_E \in F$ *et* F *est un espace vectoriel.*

Démonstration. Par définition, F est un espace vectoriel. Par propriété, si $x \in F$ (puisque F est non vide), alors $0.x \in F$ c'est-à-dire $0_E \in F$. □

Proposition 11.4.

Soit F un sous ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall\ (x,y) \in F^2, x+y \in F$ (F est stable par addition)
- $\forall\ x \in F, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire)

Remarque 161. —

- La première propriété se vérifie en général en montrant que le neutre 0_E est dans F.
- Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en une seule :

$$\forall\ (x,y) \in F^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x+y \in F$$

Méthode 11.2.

On utilise la proposition précédente pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exemple 187. — Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Solution. En effet,

- $O_{2,1} \in F$: il suffit de prendre $t = 0$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\lambda.A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

en prenant $t = \lambda a + b$.

Ainsi, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Théorème 11.5.

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire homogène de n équations à n inconnues. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice associée au système $\mathscr{S}$. Alors l'ensemble des solutions F du système $(\mathscr{S})$ s'écrit également

$$F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ MX = 0_{n,1}\}$$

avec $0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $F \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
- $0_{n,1} \in F$. En effet, $M.0_{n,1} = 0_{n,1}$ par définition de la matrice nulle.
- Soient X et Y dans F, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$M.(\lambda X + Y) = \lambda M.X + M.Y = 0_{n,1} + 0_{n,1} = 0_{n,1}$$

puisque $MX = MY = 0_{n,1}$. Donc $\lambda X + Y \in F$.

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. □

2) Sous-espaces engendrés

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition 161. — Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(e_1, \cdots, e_p)$, et on note $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi,

$$x \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \iff \exists\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \ x = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_p.e_p$$

Exemple 188. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda.A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Vect(A) est appelée **droite vectorielle**, car engendré par un seul vecteur non nul.

Théorème 11.6.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 53. — *Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de* E. *Alors*

- $\forall\ k \in [\![1, p]\!], e_k \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$
- $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille* $(e_1, \cdots, e_p)$. *Ainsi, si* F *est un sous-espace vectoriel contenant* $(e_1, \cdots, e_p)$, *nécessairement,* $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \subset F$.
- *Si* $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1})$ *et si* e_{p+1} *est combinaison linéaire des vecteurs* $e_1, \cdots, e_p$, *alors* $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- *Si* $(a_1, \cdots, a_p)$ *sont des réels tous non nuls, et si* $F = \text{Vect}(a_1 e_1, \cdots, a_p e_p)$, *alors* $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.

Exemple 189. —

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Vect}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
- Soient $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Vect}(A, B, C) = \text{Vect}(A, B)$ puisque $C = A + B$.

- Soit F un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs A et B précédents. Alors, nécessairement, $\text{Vect}(A,B) \subset F$.

3) Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 11.7.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection de F et G, $F \cap G$, est également un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels, ils contiennent 0_E. Ainsi, $0_E \in F \cap G$.
Enfin, soient u et v deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Comme u et v sont dans $F \cap G$, ils sont tous les deux dans F. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + v \in F$.
- De même, u et v sont dans G et comme G est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + v \in G$.

Ainsi, $\lambda u + v \in F \cap G$: $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

4) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 162. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de F et G, et on note $F+G$ l'ensemble

$$F+G = \{u+v, \quad u \in F, \quad v \in G\}$$

Ainsi, un élément de $F+G$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 190. — On a par exemple $\mathbb{K}u_1 + \mathbb{K}u_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$, en notant $\mathbb{K}u_1$ la droite vectorielle engendrée par u_1.

Proposition 11.8.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Tout d'abord, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, 0_E appartient à F et G. Mais alors $0_E + O_E \in F+G$, et donc $0_E \in F+G$.
Soient ensuite u et v deux éléments de $F+G$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$, avec $(u_F, v_F) \in F^2$ et $(u_G, v_G) \in G^2$. Mais alors, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + (v_F + v_G) = \underbrace{(\lambda u_F + v_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda u_G + v_G)}_{\in G} \in F+G$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F+G$: $F+G$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 162. — De manière générale, si $u \in F+G$, u peut avoir plusieurs écritures sous la forme $f+g$, avec $f \in F$ et $g \in G$: il n'y a pas forcément unicité.

Définition 163. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- On dit que la somme $F+G$ est **directe** si pour tout $u \in F+G$, il existe un unique couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $u = f+g$. Dans ce cas, on notera la somme $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.
- On dit que F et G sont **supplémentaires** s'ils sont en somme directe, et que leur somme donne l'espace E

tout entier, c'est-à-dire

$$F \bigoplus G = E$$

Remarque 163. — Ainsi, deux espaces F et G sont supplémentaires si tout élément de E s'écrit de manière unique $f+g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition 11.9.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $F+G = E$.

Démonstration. Seul le premier point est à démontrer (le deuxième étant une conséquence du premier).

• Supposons $F \cap G = \{0\}$. Soit u un élément de $F+G$, et deux décompositions $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $(f_1, f_2) \in F^2$ et $(g_1, g_2) \in G^2$. Mais alors

$$u - u = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = 0$$

et donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Or, $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$. Puisqu'ils sont égaux, on en déduit que $f_1 - f_2 \in F \cap G$ et $g_2 - g_1 \in F \cap G$, c'est-à-dire $f_1 - f_2 = 0$ et $g_2 - g_1 = 0$: ainsi, $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$ et la décomposition est unique.

• Réciproquement, supposons la somme directe. Soit $w \in F \cap G$. Remarquons qu'on peut écrit $w = w + 0 = 0 + w$ puisque $w \in F$ et $w \in G$. Par unicité de la décomposition, on en déduit que $w = 0$: ainsi, $F+G = \{0\}$.

□

Méthode 11.3.

Pour montrer qu'une somme $F+G$ est directe, on montre que $F \cap G = \{0\}$. Pour montrer que $F \bigoplus G = E$, on vérifie que $F \cap G = \{0\}$, et que pour tout élément $u \in E$, il existe au moins un couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $u = f+g$. On raisonne alors par analyse et synthèse : on suppose l'existence de la décomposition, que l'on trouve (analyse). On vérifie ensuite qu'elle convient (synthèse)

Exemple 191. — Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{K} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{K} \right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, puis que $F \bigoplus G = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

Solution.

- **Somme directe** : Soit $u \in F \cap G$. Il existe donc $(t, t') \in \mathbb{K}^2$ tels que $u = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix}$. Mais alors,

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = t' = 0$$

  Ainsi, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F \cap G = \{0\}$: la somme est directe.

- **Analyse** : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. On cherche t et t' tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix}$$

  soit $t' = y$ et $t = x - y$.

Synthèse : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. On constate que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}}_{\in G}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F+G$.

Bilan : F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

III. Base d'un espace vectoriel

1) Définition

Définition 164. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** de E si, pour tout vecteur x de E, il existe une *unique* n-liste $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ de réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$

Exemple 192. — Si $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$, alors tout élément de F s'écrit de manière unique sous la forme $t.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, la famille composée du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de F.

Méthode 11.4.
Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base d'un espace vectoriel E, on prend $x \in E$ et on résout $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = x$. S'il existe une unique solution, alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est bien une base de E.

Exemple 193. — Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche a et b tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout le système

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2a + 3b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y-2x \end{cases}$$

Le système est de Cramer, donc il possède une unique solution.
Bilan : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est bien une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition 165. — Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

  Si elle n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.
- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **génératrice** si $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = E$.

Méthode 11.5.

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = 0_E$ et on résout le système. S'il admet comme seule solution $(0, \cdots, 0)$ alors elle est libre, sinon elle est liée.

Exemple 194. — Montrer que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre.

Solution. On cherche a et b deux réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a+2b \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors $a = 0$ puis $b = 0$. Ainsi, la famille est libre.

Méthode 11.6.

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = x$ avec $x \in E$ et on résout le système. S'il admet au moins une solution alors elle est génératrice, sinon elle ne l'est pas et on exhibe alors un contre-exemple.

Remarque 164. —

- Une famille libre est une famille dans laquelle aucun vecteur ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Ainsi, tout vecteur est "utile" dans la famille.
- Une famille génératrice est une famille qui permet de récupérer, par combinaison linéaire, tout vecteur de E ; en revanche, plusieurs combinaisons linéaires peuvent mener au même vecteur : il n'y a pas forcément unicité de la décomposition.

Théorème 11.10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

Méthode 11.7.

Pour montrer qu'une famille est une base, il peut ainsi être judicieux de montrer d'une part qu'elle est libre, et d'autre part qu'elle est génératrice.

2) Base canonique des espaces vectoriels usuels

Remarque 165. — On s'intéresse à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les trois matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ permettent de décrire toutes les matrices de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: (e_1, e_2, e_3) représente une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Définition 166. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n$$

où $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ forme une **base**, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 166. — Il n'y a pas unicité de la base. Par exemple, dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment également une base.

Définition 167. — On verra plus tard que toute base (finie) d'un espace vectoriel possède le même nombre d'éléments : ainsi, dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les bases possèdent 2 vecteurs. On appelle ce nombre la **dimension** de l'espace vectoriel, et on le notera dim(E).

Exemple 195. — $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 2, et plus généralement $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension n.

Méthode 11.8.

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on détermine d'abord une base, et on conclut.

Exemple 196. — Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x + y = 0 \right\}$. Déterminer la dimension de F.

Solution. Remarquons qu'on peut écrire

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ y = -x \right\}$$

soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de F :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

et $\dim(F) = 1$.

Proposition 11.11.

On dispose des bases canoniques suivantes :

- La famille $(1, X, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.
- La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $E_{i,j}$ la matrice nulle sauf le coefficient en ligne i colonne j qui vaut 1. Ainsi, $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = n \times p$.

Démonstration. La démonstration se fait aisément, en utilisant les propriétés connues sur les matrices et les polynômes. □

Remarque 167. — Pour les polynômes, on dispose d'un résultat plus général. Si $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille de polynômes **échelonnés en degré**, c'est-à-dire tels que $\deg(P_i) = i$, alors la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV. Applications linéaires

1) Définition

Définition 168. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que

- $\forall\ (x, y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall\ x \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque 168. — On peut réunir les deux propriétés en une seule : $f : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si

$$\forall\ (x, y) \in E^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Méthode 11.9.

Pour montrer qu'une application f est une application linéaire, on prendra x et y dans E, $\lambda \in \mathbb{K}$, et on montre que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exemple 197. — Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Solution. En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda A + B) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda f(A) + f(B) = \lambda \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(\lambda A + B) = \lambda f(A) + f(B)$: f est une application linéaire

Notation 9. — L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Définition 169. —

- Si $F = E$, et si $f : E \to E$ est une application linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
- Si $F = \mathbb{R}$, et si $f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, on dit que f est une **forme linéaire**.

Exemple 198. — L'application $id_E : E \to E$ définie par $id_E : x \mapsto x$ est un endomorphisme de E.

Propriété 54. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, et* $f : E \to F$ *une application linéaire. Alors* $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 11.12.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration. Soient $x, y \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, en utilisant respectivement la linéarité de f puis de g :

$$g \circ f(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

□

2) Noyau d'une application linéaire

Définition 170. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **noyau** de f, et on note $\operatorname{Ker} f$, le sous-ensemble de E défini par

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$$

Théorème 11.13.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Puisque $f(0_E) = 0_F$, on a déjà $0_E \in \operatorname{Ker} f$. Ensuite, si x et y sont deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{x \text{ et } y \text{ dans } \ker f} \lambda 0_F + 0_F = 0_F$$

donc $\lambda x + y \in \operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Ker} f$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Méthode 11.10.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue x. On se ramène en général à un système.

Exemple 199. — Déterminer le noyau de l'application linéaire précédente.

Solution. Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$ si et seulement si

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_E$$

Donc, $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 11.14.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

Démonstration. Supposons f injective. Soit x tel que $f(x) = 0_F$ alors $f(x) = f(0_E)$. Par injectivité de f, $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. Soient x et x' tels que $f(x) = f(x')$. Par linéarité de f, $f(x - x') = 0_F$. Puisque $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, alors $x - x' = 0_E$ c'est-à-dire $x = x'$: f est injective. □

3) Image d'une application linéaire

Définition 171. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im} f$, le sous-ensemble de F défini par

$$\mathrm{Im} f = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

Théorème 11.15.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. Si $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Démonstration. Puisque $O_F = f(0_E)$, on a $O_F \in \mathrm{Im} f$. Soient a et b deux éléments de $\mathrm{Im} f$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque a et b sont dans $\mathrm{Im} f$, il existe x et y dans E tels que

$$a = f(x) \quad \text{et} \quad b = f(y)$$

Mais alors

$$\lambda a + b = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{\text{linéarité de } f} f(\lambda x + y)$$

Donc $\lambda a + b$ s'écrit $f(z)$ pour un certain $z \in E$: $\lambda a + b \in \mathrm{Im} f$. $\mathrm{Im} f$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F. □

Méthode 11.11.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on prend une base (par exemple, la base canonique) si possible et on déterminer l'image par f de cette base. On vérifie alors si la famille obtenue est libre. Si oui, c'est l'image, sinon, un vecteur est en trop. On l'enlève, et on réitère.

Exemple 200. — Déterminer l'image de l'application linéaire précédente.

Solution. Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, on prend $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi, $\operatorname{rg}(f) = 2$.

Théorème 11.16.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration. Par définition, f est surjective si et seulement si $f(E) = F$. Or, par définition, $f(E) = \operatorname{Im} f$. Donc f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$. □

Théorème 11.17.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est bijective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = F$.

Méthode 11.12.

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est bijective, on montrera que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et que $\operatorname{Im} f = F$.

Exemple 201. — Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

est bijective.

Solution. f est bien linéaire (c'est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminons noyau et image.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker} f$. Alors

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ainsi, $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et f est injective.

- Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$

La famille $(2e_1, e_2)$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) donc forme une base de Im f :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(2e_1, e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi, f est surjective.

Bilan : f est bien bijective.

Remarque 169. — On verra ultérieurement qu'en dimension finie, on dispose d'une propriété permettant d'être plus rapide pour démontrer qu'une application linéaire est bijective.

Définition 172. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme** de E dans F.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
- On note $Isom(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F, et $Aut(E)$ ou GL(E) l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 11.18.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in Isom(E,F)$. Alors f^{-1} est également une application linéaire et $f^{-1} \in Isom(F,E)$.

Démonstration. Soient x, y deux éléments de F et λ un élément de $\mathbb{K}$. Puisque f est bijective, il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = x$ et un unique $b \in E$ tel que $f(b) = y$. Donc $f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda x + y$ donc, par unicité de bijectivité de f, $\lambda a + b = f^{-1}(\lambda f(a) + f(b))$, c'est-à-dire

$$\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda x + y)$$

f^{-1} est bien linéaire. □

fFileExiststex/Chap11/Exo11

Exercices

Sous-espaces vectoriels

Exercice 157. — Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x+3y=0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2+y=0 \right\}$

Solution.

- F_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_1$ et pourtant $2x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin F_1$.
- F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, F_2 est non vide, puisque la matrice nulle y est. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de F_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') = \lambda(\underbrace{2x+3y}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{2x'+3y'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

Donc $\lambda u + v \in F_2$.

- F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_3$ (car $1^2 - 1 = 0$), et pourtant $2x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \notin F_3$ car $2^2 - 2 = 2 \neq 0$.

Exercice 158. — Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x+y=0 \text{ et } x-y-2z=0 \right\}$

Solution.

- F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En effet, F_1 est non vide puisque le vecteur nul y est. De plus, soient $u = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \\ x' \end{pmatrix}$ deux éléments de F_1, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ 2(\lambda x + x') \\ \lambda x + x' \end{pmatrix}$$

donc $\lambda u + v \in F_1$.

- F_2 est non vide, puisque le vecteur nul y est ($0+0=0$ et $0-0-2\times 0=0$). Soient $u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ deux éléments de F_2, et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors
$$\lambda u+v=\begin{pmatrix} \lambda x+x'\\ \lambda y+y'\\ \lambda z+z'\end{pmatrix}$$
qui vérifie
$$(\lambda x+x')+(\lambda y+y')=\lambda(\underbrace{x+y}_{=0 \text{ car } u\in F_2})+\underbrace{x'+y'}_{=0 \text{ car } v\in F_2}=0$$
$$\text{et } (\lambda x+x')-(\lambda y+y')-2(\lambda z+z')=\lambda(\underbrace{x-y-2z}_{=0 \text{ car } u\in F_2})+(\underbrace{x'-y'-2z'}_{=0 \text{ car } v\in F_2})=0$$
donc $\lambda u+v\in F_2$: F_2 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 159. — On se donne $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note
$$E=\{M\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AM=0\} \text{ et } F=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM=MA\}$$
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et que F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution. Tout d'abord, E et F sont non vide, puisque la matrice $O_{3,1}$ vérifie $AO_{3,1}=O$ et la matrice nulle O_3 vérifier $O_3A=AO_3=O_3$. Il est à montrer que ces deux ensembles sont stables par combinaisons linéaires.

- Soient $M,N\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, on constate que
$$A(\lambda M+N)=\lambda\underbrace{AM}_{=0}+\underbrace{AN}_{=0}=0$$
ainsi, $\lambda M+N\in E$ et E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- De même, soient $M,N\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors
$$(\lambda M+N)A=\lambda\underbrace{MA}=AM+\underbrace{NA}_{=AN}=\lambda AM+AN=A(\lambda M+N)$$
donc $\lambda M+N\in F$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 160. — Montrer que les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
1. $E=\{f\in\mathscr{F},\quad f(0)=0\}$.
2. $F=\{f\in\mathscr{F},\quad \exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall\,x\in\mathbb{R},\quad f(x)=ae^x+b\}$.

Exercice 161. — On note $\mathscr{F}=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathscr{P}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad f \text{ paire}\}$ et $\mathscr{I}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad f \text{ impaire}\}$.
1. Montrer que $\mathscr{P}+\mathscr{I}$ est directe.
2. En raisonnant par analyse et synthèse, montrer que
$$\mathscr{P}\bigoplus\mathscr{I}=\mathscr{F}$$

> **Remarque 170.** — Rappel : la méthode par analyse et synthèse consiste à partir du résultat : pour $f\in\mathscr{F}$ fixé, il existe $p\in\mathscr{P}$ et $i\in\mathscr{I}$ tel que $f=p+i$ et on cherche à exprimer p et i en fonction de f (*analyse*). On vérifie ensuite que les fonctions p et i obtenues vérifient bien les conditions demandées (*synthèse*).

Exercice 162. — Montrer que les espaces suivants sont des sous-espace vectoriels d'espaces vectoriels usuels :

1. $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(1) = 0\}$.
2. $F = \{P \in \mathbb{R}[X], \quad P(-X) = P(X)\}$.

Espace vectoriel engendré

Exercice 163. — On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2. Déterminer $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

Solution. Cherchons x et y deux réels tels que $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient $x = 1$ et $y = 2$. Ainsi, $u = e_1 + 2e_2$ est bien combinaison linéaire de e_1 et e_2.
De la même manière, on obtient $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3e_1 - 2e_2$ qui sont donc bien des combinaisons linéaires de e_1 et e_2.
Enfin, par définition, $\text{Vect}(e_1, e_2) = \left\{xe_1 + ye_2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 164. — On note $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, x)$.

Méthode 11.13.
Pour montrer une égalité d'espace avec des sous-espaces vectoriels, on procède par double inclusion : si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.
Enfin, rappelons que si $(e_1, \cdots e_n) \in F^n$, alors $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n) \subset F$, qui va nous servir ici.

Solution. Montrer que u et v sont dans $\text{Vect}(w, x)$. Par définition, $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(w, x)$.

Remarquons (ou démontrons selon la méthode de l'exercice précédent) que $u = 5w - x$ donc $u \in \text{Vect}(w, x)$. De même, $v = 4w - x$ donc $v \in \text{Vect}(w, x)$. Par définition de l'espace vectoriel engendré, on en déduit donc $\boxed{\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(w, x)}$.

De même, $w = u - v$ donc $w \in \text{Vect}(u, v)$, et $x = 4u - 5v$ donc $x \in \text{Vect}(u, v)$. Par définition de l'espace vectoriel engendré, on en déduit donc que $\boxed{\text{Vect}(w, x) \subset \text{Vect}(u, v)}$.

Par double inclusion, $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, x)$.

Famille libre, base

Exercice 165. — On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe une unique combinaison linéaire telle que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. On cherche donc à résoudre

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue λ_1, λ_2 et λ_3. On résout donc le système

$$(S) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = y \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases}$$

Ainsi

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases}$$

et donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y - x \\ \lambda_3 = z - y + x & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système triangulaire possède trois pivots non nuls : il est donc de Cramer, et le système (S) admet donc une unique solution. Ainsi, u s'écrit bien de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3 :

(e_1, e_2, e_2) forme bien une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 166. — La famille (e_1, e_2, e_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-elle libre, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} ?$$

Solution. Soient x, y, z trois réels vérifiant $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y - z \\ -x + 3y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout donc le système

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

soit

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y - z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 5y + 5z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Remarquons enfin que les deux dernières lignes sont les mêmes. Donc le système est dégénéré et admet donc une infinité de solution. Ainsi,

$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est liée}}$

Exercice 167. — Déterminer une base des sous-espaces vectoriels des exercices 1 et 2, ainsi que leur dimension.

Solution. On réécrit les espaces vectoriels pour reconnaitre une base. Ainsi, pour l'exercice 1,

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

et donc

$$F_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ forme une base de } F_2.$$

Pour l'exercice 2, on a directement que

$$F_1 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de F_1.

Enfin, après résolution,

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de F_2.

Applications linéaires

Exercice 168. — Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, le démontrer rigoureusement.

1. $f_1 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$
2. $f_2 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$
3. $f_3 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$
4. $f_4 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_4\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Solution.

- f_1 est une application linéaire. En effet, soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors
$$f_1(\lambda u + v) = f_1\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix}$$
ainsi,
$$f_1(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 + x_2) + (2y_1 + y_2) \\ \lambda(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \lambda f_1(u) + f_1(v)$$
- f_2 n'est pas linéaire. En effet,
$$f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
donc $2f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et pourtant
$$f_2\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 2f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
- f_3 est linéaire, et est un endomorphisme. Tout d'abord, elle va de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même. Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors
$$f_3(\lambda u + v) = f_3\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ (\lambda x_3 + y_3) - (\lambda x_1 + y_1) \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$f_3(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \\ \lambda(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) \\ \lambda(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_3 - y_2 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} = \lambda f_3(u) + f_3(v)$$
$\boxed{f_3 \text{ est bien un endomorphisme de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
- f_4 est également linéaire, et est une forme linéaire, car elle est à valeur dans $\mathbb{R}$. Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors
$$f_4(\lambda u + v) = f_4\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right)$$
donc
$$f_4(\lambda u + v) = (\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) + 3(\lambda x_3 + y_3) = \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (y_1 + 2y_2 + 3y_3) = \lambda f_4(u) + f_4(v)$$
Donc f_4 est linéaire et est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Noyaux, images

Exercice 169. — Soit f un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, dont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\4\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les antécédents de $\begin{pmatrix}-1\\-1\\8\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer une base du noyau, et de l'image de f.

Solution.

1. On cherche x, y et z tels que
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-3y-7z\\-x+2y+4z\\2x-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\8\end{pmatrix}$$
Après résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, on obtient une infinité de solutions :
$$\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix}5-2z\\2-3z\\z\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}\right\}$$
L'application f n'est donc pas injective puisqu'un élément admet une infinité d'antécédents.
De même, on cherche x, y et z tels que
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-3y-7z\\-x+2y+4z\\2x-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$
Après résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, on n'obtient aucune solution : la fonction f n'est donc pas surjective, puisque la matrice $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ n'est pas atteinte par f.
2. On a, en résolvant le système,
$$\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix}-2z\\-3z\\z\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$$
et $\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$. De plus, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique, on a
$$f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad f(e_2) = \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} \text{ et } f(e_3) = \begin{pmatrix}-7\\4\\1\end{pmatrix}$$
Si on cherche x, y, z trois réels tels que $xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, on obtient une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$
et $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 170. — Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur un chapitre ultérieur, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Solution.

1. Montrons que f est linéaire. Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) - 4(\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3) \\ \lambda(2x_1 + x_2 - 3x_3) + (2y_1 + y_2 - 3y_3) \\ \lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3) + (3y_1 + 2y_2 - 4y_3) \end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \lambda f(\mathrm{X}) + f(\mathrm{Y})$: f est bien une application linéaire, qui va de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On cherche à savoir si la famille est libre. On cherche donc x, y, z tels que $xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Après résolution (qui revient à étudier le noyau de f), on constate qu'il y a une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de Im f et

$$\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. f n'est pas surjective non plus, car son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) alors que l'espace d'arrivé est de dimension 3. Elle n'est donc pas bijective.
4. D'après les résultat de la question 2, on a

$$\dim(\mathrm{Ker} f) = 1 \text{ et } \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\ f) = 2$$

ainsi

$$\dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg}(f) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

qu'on appelle formule du rang.

Exercice 171. — Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y-z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective? surjective? bijective?
4. En anticipant sur un chapitre ultérieur, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Solution.

1. Montrons que f est linéaire. Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3) \\ \lambda(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) \end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \lambda f(\mathrm{X}) + f(\mathrm{Y})$: f est bien linéaire.

2. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} x+y-z \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On cherche à savoir si la famille est libre. On cherche donc x, y, z tels que $xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Après résolution (qui revient à étudier le noyau de f), on constate qu'il y a une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de Im f et

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. f est surjective en revanche. En effet, son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) et l'espace d'arrivée est de dimension 2 puisqu'il s'agit de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Elle n'est cependant pas bijective.
4. D'après les résultat de la question 2, on a

$$\dim(\text{Ker} f) = 1 \text{ et } \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) = 2$$

ainsi

$$\dim(\text{Ker} f) + \text{rg}(f) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

qu'on appelle formule du rang.

Exercice 172. — Soit $M=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ et $f:\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(A)=AM-MA$. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer image et noyau.

Solution. L'application f va bien de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, d'après les propriétés sur les produits de matrices. Soient $A, B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors

$$f(\lambda A+B)=(\lambda A+B)M-M(\lambda A+B)=\lambda AM+BM-\lambda MA-MB=\lambda(AM-MA)+(BM-MB)=\lambda f(A)+f(B)$$

f est donc une application linéaire, et est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\text{Ker} f$. Alors

$$f(A)=AM-MA=\begin{pmatrix}a&2a+3b\\c&2c+3d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\3c&3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix}-2c&2a+2b-2d\\-2c&2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

On a alors $c=0$ et $d=a+b$. Ainsi,

$$\text{Ker} f=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a+b\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

soit

$$\text{Ker} f=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

et la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est libre (donc forme une base de Ker f) car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Pour l'image, on note $E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Cette famille forme une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule donc l'image par f de cette base. Après calcul, on obtient

$$f(E_{1,1})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\quad f(E_{1,2})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\quad f(E_{2,1})=\begin{pmatrix}-2&0\\-2&2\end{pmatrix}\quad f(E_{2,2})=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

On constate que la famille est liée puisque $f(E_{1,1}) = f(E_{1,2}) = -f(E_{2,1})$. On peut donc enlever deux de ces vecteurs. La famille $(f(E_{1,1}), f(E_{2,1}))$ est libre (car les vecteurs sont non colinéaires) et forme donc une base de $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{2,2}))$$

Exercice 173 (Important)**.** — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f : P \mapsto P'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Solution. Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)' \\ &= (\lambda P)' + Q' \\ &= \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, et est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. On constate alors que $f(P) = 0$ si et seulement si $P' = 0$ c'est-à-dire P est constant. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{P(X) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]}$$

- La base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est $(1, X, \cdots, X^n, \cdots)$. On constate que

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\ p \geqslant 1, \quad f(X^p) = pX^{p-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(1), f(X), \cdots f(X^n), \cdots) \\ &= \operatorname{Vect}(0, 1, 2X, 3X^2, \cdots, nX^{n-1}, \cdots) \\ &= \operatorname{Vect}(1, X, X^2, \cdots, X^{n-1}, \cdots) \text{ par propriété de l'espace vectoriel engendré} \\ &= \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[X]}$ et f est surjective.
Remarque : on peut démontrer à la main que f est surjective sans déterminer son image : pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ quelconque, il suffit de prendre P une primitive de Q. Alors $f(P) = Q$.

Exercice 174. — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f : P \mapsto P(a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$) est une forme linéaire. Déterminer son noyau.

Solution. Montrons que f est linéaire. Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(a) \\ &= \lambda P(a) + Q(a) = \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ et est donc une forme linéaire.

Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Cela signifie que $f(P) = 0$, soit $P(a) = 0$. a est donc racine de P et s'écrit donc $P(X) = (X - a)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$.
Réciproquement, un tel polynôme vérifie $P(a) = 0$ et est dans le noyau de f.

Bilan :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(X - a)Q(X), \quad Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} = (X - a)\mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

Exercice 175 (Matrices symétriques et antisymétriques)**.** — On rappelle qu'on note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n antisymétriques. On définit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f : \mathrm{A} \mapsto \frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. En déduire que $\operatorname{Im} f = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
4. Justifier que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Démontrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \bigoplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser ce qui précède, ou procéder par analyse et synthèse

Solution.

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}) &= \frac{(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}) + {}^t(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B})}{2} \\ &= \frac{\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} + \lambda\,{}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B}}{2} \\ &= \lambda\frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} + \frac{\mathrm{B} + {}^t\mathrm{B}}{2} = \lambda f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}) \end{aligned}$$

   Ainsi f est linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, et est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathrm{B} \in \operatorname{Im} f$. B s'écrit $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{B} &= {}^t\frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} \\ &= \frac{{}^t\mathrm{A} + {}^t({}^t\mathrm{A})}{2} \\ &= \frac{{}^t\mathrm{A} + \mathrm{A}}{2} = \mathrm{B} \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Bilan : $\operatorname{Im} f \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Réciproquement, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, puisque ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$, on a

$$f(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}}{2} = \mathrm{A}$$

   Mais alors, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, $\mathrm{A} = f(\mathrm{A})$ donc $\mathrm{A} \in \operatorname{Im} f$.
   Bilan : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Im} f$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Im} f}$$

3. Soit $\mathrm{A} \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(\mathrm{A}) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} = 0$, soit ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$: ainsi $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors $f(\mathrm{A}) = 0$.
   Bilan :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

4. D'après ce qui précède, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Im} f$ donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   De même, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Remarque : on peut également montrer que les deux espaces sont des sous-espaces vectoriels par la méthode classique.
5.

- Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tA = A$ (car symétrique) mais aussi ${}^tA = -A$ (car antisymétrique). Mais alors
$$ {}^tA = A = -A \Leftrightarrow A = 0_n$$
Ainsi $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$.
- Raisonnons par analyse et synthèse. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = B + C$. En appliquant f qui est linéaire :
$$f(A) = f(B+C) = f(B) + f(C) = B + 0_n \text{ d'après 2 et 3}$$
Ainsi $B = f(A)$ et $C = A - B = A - f(A) = \frac{A - {}^tA}{2}$.
Synthèse : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = f(A) = \frac{{}^tA + A}{2}$ et $C = A - f(A) = \frac{A - {}^tA}{2}$. Alors
  - $B + C = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} = A$.
  - ${}^tB = {}^tf(A) = f(A) = B$ d'après la question 2. Donc B est symétrique.
  - ${}^tC = {}^t\frac{A - {}^tA}{2} = \frac{{}^tA - A}{2} = -C$ donc C est antisymétrique.

  Ainsi, $A = B + C$ avec $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$: $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Bilan : on a bien
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \bigoplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

CHAPITRE 12

LIMITES ET CONTINUITÉ

Résumé

On étend dans ce chapitre la notion de limite de suite au cas plus général des limites de fonctions. Cela permettra de commencer les études de fonctions, en étudiant le comportement asymptotique de celles-ci. On définit rigoureusement la notion déjà vue de continuité. C'est l'occasion de revoir le théorème des valeurs intermédiaires, et un corollaire important - le théorème de la bijection.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition des limites :
- Connaître les limites usuelles et les croissances comparées ..... □
- Savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites ..... □
- Savoir calculer la limite d'une composée de fonction ..... □
- Reconnaître les limites liées au taux d'accroissement ..... □

② Savoir lever les indéterminations classiques :
- polynômes et fractions rationnelles ..... □
- fonctions avec des radicaux ..... □
- les cas "∞/∞" ou "$0/0$" ..... □

③ Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) ..... □

④ Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) ..... □

⑤ Concernant la continuité :
- Savoir montrer qu'une fonction est continue en un point ..... □
- Savoir prolonger de manière continue une fonction en un point ..... □
- Savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente ..... □

⑥ Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ ..... □

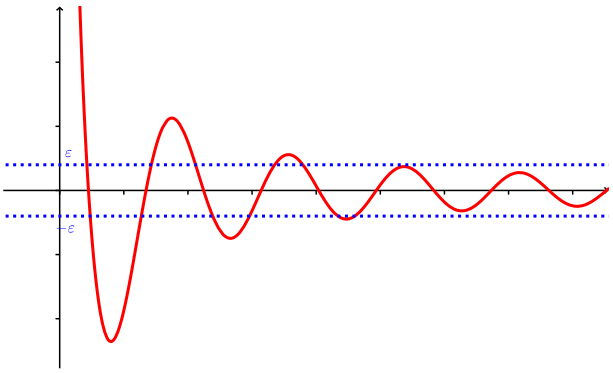
⑦ Savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque ..... □

I. Limites à l'infini

1) Limites nulles

Définition 173. — Si, pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut), la fonction f est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (soit $|f(x)| \leqslant \varepsilon$) lorsque x est suffisamment grand , on dit que f **a pour limite 0** quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = 0$$



Remarque 171. — Mathématiquement, on écrit donc

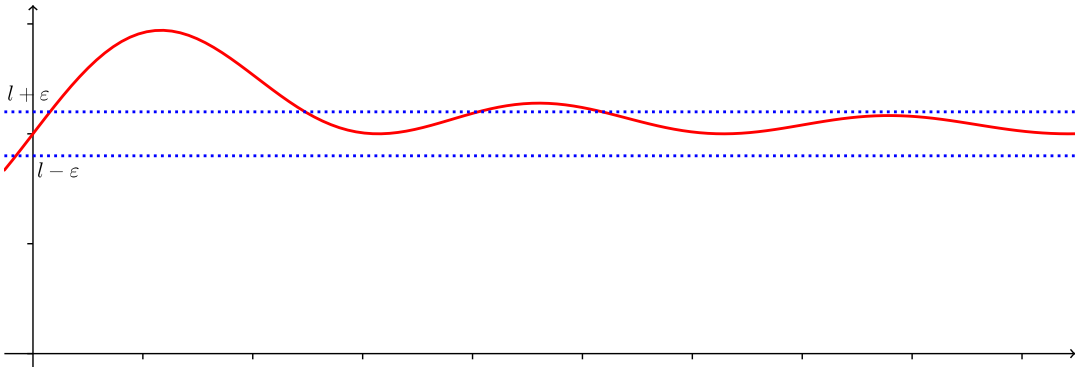
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{M},\ \forall\ x, x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Remarque 172. — On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Exemple 202. — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2) Limites finies : $l \in \mathbb{R}$

Définition 174. — Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f **a pour limite *l*** quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $f(x) - l$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).



Remarque 173. — Mathématiquement, on écrit donc

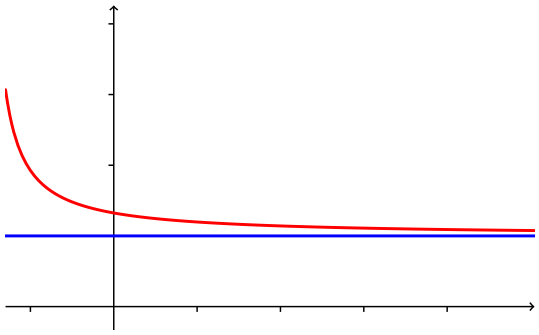
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M,\ \forall\, x, x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette définition rigoureuse est due à **Karl Weierstrass**, considéré comme le "père de l'analyse moderne", même si **Bernard Bolzano** avait déjà défini la notion de limite, certes de manière moins rigoureuse.

Exemple 203. — $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

Définition 175. — *(Asymptote horizontale)* Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (où $l \in \mathbb{R}$). Alors, la droite d'équation $y = l$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = l$.

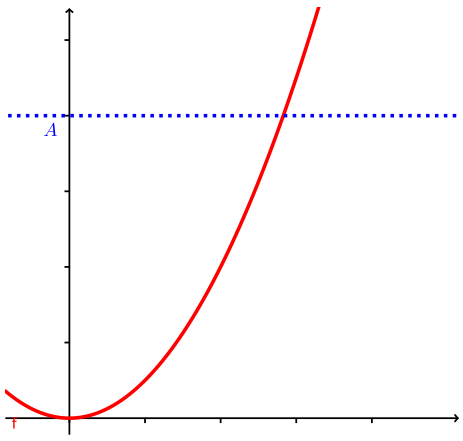
Remarque 174. — Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote $y = l$, on étudie le signe de $f(x) - l$.

- Si $f(x) - l \geqslant 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - l \leqslant 0$, la courbe est en dessous de son asymptote.

3) Limites infinies

Définition 176. — Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut), la fonction f est toujours supérieure ou égale à A dès que x est suffisamment grand, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$



Remarque 175. — Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, M,\ \forall\, x, x > M \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque 176. — On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

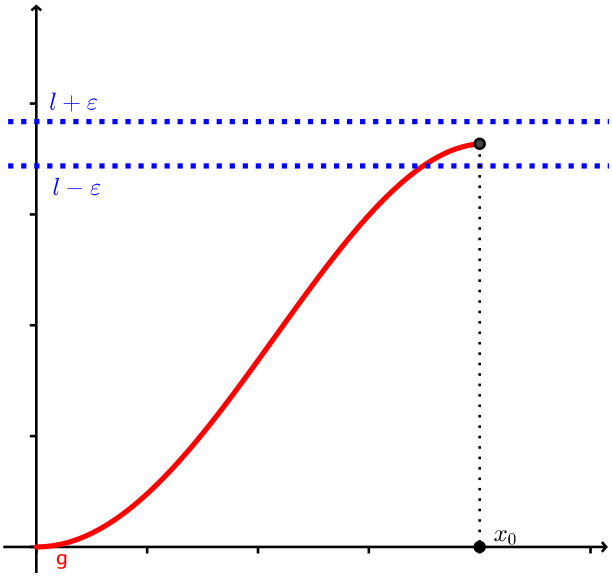
II. Limites en $a \in \mathbb{R}$

Ici, on s'intéresse au comportement d'une fonction f quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$.

1) Limite réelle en un point

Définition 177. — Soient x_0 et l deux réels.
Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite l** quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = l$$



Remarque 177. — Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Remarque 178. — Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.

Exemple 204. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Soit $x_0 = 2$. Montrer que, quand x tend vers x_0, $f(x)$ va tendre vers $5 = f(2)$.

Solution. On peut le démontrer rigoureusement :

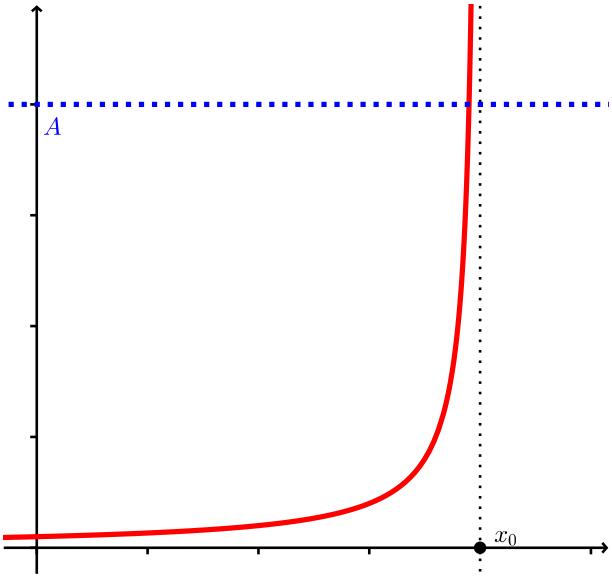
$$|f(x) - 5| = |2x + 1 - 5| = |2x - 4| = 2|x - 2|$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $|f(x)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

2) Limite infinie en un point

Définition 178. — Soit x_0 un réel.
Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty$$



Remarque 179. — Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque 180. — Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.
On définit également $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ de la même manière.

3) Limite à gauche et à droite

Définition 179. — Soit x_0 un réel.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x < x_0$, on parle de la **limite à gauche** en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^-}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x > x_0$, on parle de la **limite à droite** en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}$.

Remarque 181. — Une fonction peut avoir des limites à gauche et à droite en x_0 différentes ! Par exemple

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Proposition 12.1.

Soit f une fonction et x_0 un réel. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont les mêmes.
Dans ce cas,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Exemple 205. — Ainsi, la fonction inverse n'admet pas de limite en 0.

Méthode 12.1.

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque la fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

Exemple 206. — Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

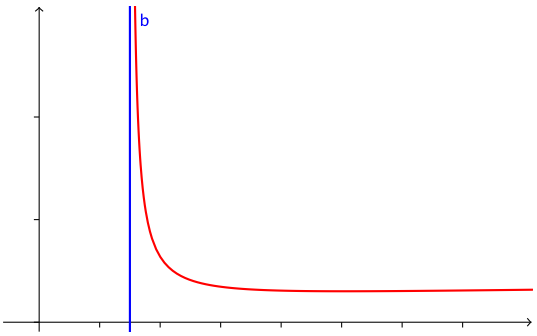
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Solution. On remarque que :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 = f(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$

Puisque les limites à droite et à gauche sont égales, on en déduit que f admet une limite en 0, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Définition 180. — *(Asymptote verticale)*
Si $\lim\limits_{x\to a^+ (\text{ou } a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f.



III. Théorèmes d'existence et de comparaison

1) Fonctions monotones

Les fonctions monotones possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

Théorème 12.2.

Soit f une fonction monotone sur un segment $[a;b]$. Alors f admet des limites à gauche et à droite en tout point.

Théorème 12.3.

Soit f une fonction monotone sur I $=]a;b[$.

- Si f est croissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est croissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.
- Si f est décroissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est décroissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.

Remarque 182. — Si f est croissante sur I $=]a;b[$ mais non majorée sur I, alors f admet une limite en b^- qui vaut $+\infty$.
De manière générale, une fonction monotone sur $]a;b[$ admet toujours des limites en a^+ et en b^-, finie ou infinie.

2) Limites et inégalités

Théorème 12.4.

Soit I un intervalle et $x_0 \in$ I. Soient f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0, mais possédant une limite en x_0. Alors, si pour tout x de I$\backslash\{x_0\}$, $f(x) \geqslant g(x)$, on a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Remarque 183. — Attention : le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Par exemple, pour tout x, $1+\frac{1}{x} > 1$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

3) Théorème d'encadrement

Théorème 12.5.

Soit I un intervalle et $x_0 \in$ I. Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout x de I$\backslash\{x_0\}$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si f et h ont la même limite l en x_0, alors la limite de g en x_0 existe, et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

Démonstration. Admis. Idée de démonstration dans le chapitre sur les suites. □

Exemple 207. — Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{[x]}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Solution. On a, pour tout x de $]0;+\infty[$, $x-1 \leqslant [x] \leqslant x$, donc, en divisant par $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit donc, par encadrement, que la limite de g en $+\infty$ existe, et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

Exercice 176. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Solution. Par le même raisonnement, pour tout $x > 0$, on a

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad -\tfrac{1}{x} \leqslant \tfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \tfrac{1}{x} \text{ (car } x > 0)$$

Puisque on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, par encadrement, on en déduit que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ existe et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Théorème 12.6.

Soit I un intervalle, $x_0 \in$ I et l un réel. Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout réel $x \in$ I$\backslash\{x_0\}$ on a $|f(x) - l| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème d'encadrement. Voir le chapitre sur les suites. □

4) Comparaison à l'infini

Théorème 12.7.

Soient f et g deux fonctions définies sur I $=]a;+\infty[$. Si pour tout x de I :

- $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Démonstration. Soit M un réel. Par définition, à partir d'un certain réel b, on a $g(x) >$ M. Or $f(x) \geqslant g(x)$, donc $f(x) >$ M pour tout $x \geqslant b$: par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. □

Exemple 208. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[x]+1}{\sqrt{x}}$.

Solution. Pour tout réel x, on a $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$ (puisque $\sqrt{x} > 0$) on a

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

soit

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]+1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

5) Asymptote oblique

Définition 181. — *(Asymptote oblique)* Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y=ax+b$ $(a\neq 0)$. On dit que la droite (d) est une **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

Exemple 209. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Solution. En effet, pour tout réel $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)-x=\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Ainsi la droite d'équation $y=x$ est bien asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

IV. Opérations sur les limites et limites usuelles

1) Opérations sur les limites

On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a) Limite de $f+g$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 210. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$.

b) Limite de $f\times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l.l'$	signe(l').∞	-signe(l').∞
$+\infty$	signe(l).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(l).∞	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 184. — Si $l = 0$ (et/ou $l' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = l.l' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0 \times \infty$") sont **indéterminées**.

Exemple 211. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} 3xe^x = 0$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x\to 0} 3xe^x = 0$.

c) Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	signe(l').∞	-signe(l').∞
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe(l).∞	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe(l).∞	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 212. —

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$ par somme et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

2) Limite d'une fonction composée

Théorème 12.8.

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Démonstration. Admis. □

Méthode 12.2.

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.
- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 213. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$.

Solution.

- On pose $X = x^2 - x + 1$. On a
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$
- On a
$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$$

Exercice 177. — Montrer que $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{3})^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

Solution. Posons $X = 3x - 1$. Alors :

- On a $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{3})^+} 3x - 1 = 0^+$.
- De plus, $\lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,
$$\lim_{x\to(\frac{1}{3})^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

3) Limites usuelles

a) Limites classiques

On dispose d'un ensemble de limites usuelles.

Proposition 12.9. Fonctions usuelles

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ sinon.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}[x]=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty$$

Proposition 12.10. Fonctions puissances

Pour tout $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha=0$

Pour tout $\alpha<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$ et $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha=+\infty$

Pour tout $a>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

Pour tout a tel que $0<a<1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

b) Croissances comparées

Théorème 12.11.

Pour tout $\alpha>0$, et $q>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln^q(x)}=+\infty$$

Conséquence 9. — Par passage à l'inverse,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^q(x)}{x^\alpha}=0$$

Théorème 12.12.

Pour tout $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)=0$$

Démonstration. Posons $X=\frac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{x\to0^+}X=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{\ln(X)}{X^\alpha}=0$ d'après ce qui précède. □

Théorème 12.13.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$$

Démonstration. Se démontre de la même manière que précédemment (en posant $X=-x$). □

Méthode 12.3.

Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

Exemple 214. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

Solution. On pose $X = 2x$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{(X/2)^3} = \lim_{X\to+\infty} 2^3 \frac{e^X}{X^3} = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

4) Autres limites

Théorème 12.14.

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Démonstration. Nous verrons la démonstration de ces limites dans le chapitre dédié à la Dérivation. □

Exemple 215. — Déterminer $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$.

Solution. On remarque que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x^2}$$

Or

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Par produit,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = +\infty$$

5) Quelques indéterminations classiques

a) Polynômes et fractions rationnelles

Méthode 12.4.

En $+\infty$ ou en $-\infty$, il y a une méthode classique dite du terme du plus haut degré.

- Si $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.
- Si $g : x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} \cdots + b_0}$ est une fraction rationnelle, alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$.

Exemple 216. — Soient $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ et $g : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

Solution. D'après la règle du terme du plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Remarque 185. — ⚠ Cette méthode ne s'applique qu'aux limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Racines

Méthode 12.5.

Lorsqu'une fonction contient des radicaux, on utilise la quantité conjuguée.

Exemple 217. — Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution. On constate que la limite en $+\infty$ de f est indéterminée. Alors,

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

et donc, par composée et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

c) $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$

Méthode 12.6.

Dans les cas $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, on commence par mettre au numérateur et au dénominateur le terme prépondérant (en utilisant les croissances comparées).

Exemple 218. — Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{e^x - 1}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution. Alors

$$\frac{x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

Par produit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

V. Etude des limites d'une fonction

1) 1ère étape : limites

Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites au borne de l'intervalle de définition :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim_{x\to+\infty} f$ et $\lim_{x\to-\infty} f$.
- Si f est définie sur $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, a^+ et a^-.

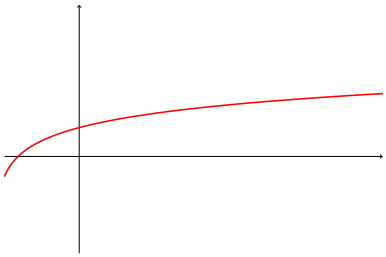
On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en a^+ ou a^-).

2) 2ème étape : branches infinies

Si les limites en $+\infty$ et/ou $-\infty$ sont infinies, on cherche une éventuelle asymptote oblique. Pour cela on détermine

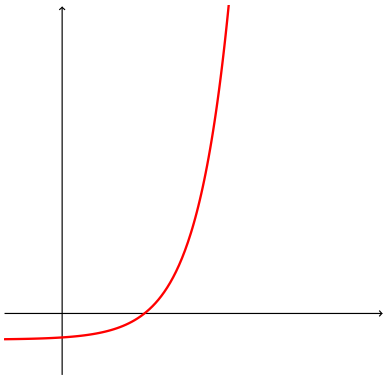
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- Si cette limite est nulle, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** en $+\infty$.



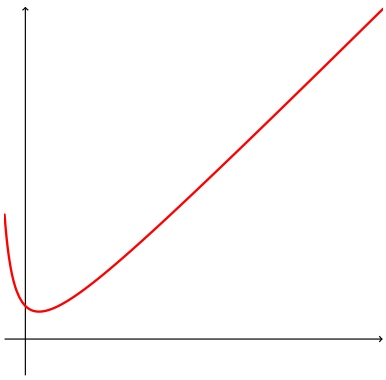
L'exemple classique est la fonction logarithme népérien.

- Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $+\infty$.

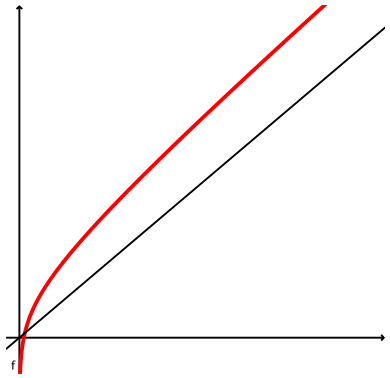


L'exemple classique est la fonction exponentielle.

- Si cette limite est un nombre réel a, on dit que la courbe de f admet une direction asymptotique d'équation $y = ax$. Il reste alors à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.
  - Si cette limite est un réel b, la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de f en $+\infty$.



  - Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.



(bien sûr, tout ceci est valable en $-\infty$.)

VI. Continuité

1) Continuité en un point, sur un intervalle

Définition 182. — Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.

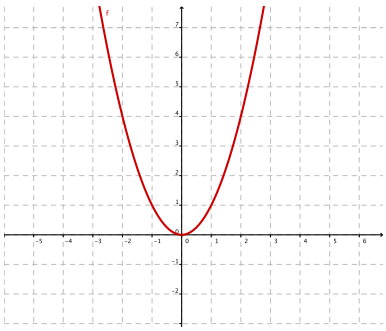
- On dit que la fonction f est **continue à droite en un point *a*** de I si f admet une limite à droite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue à gauche en un point *a*** de I si f admet une limite à gauche en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue en un point *a*** de I si f admet une limite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
- On dit que f est **continue sur l'intervalle I** si elle est continue en tout point de I.

Remarque 186. — Ainsi, f est continue en a si et seulement si

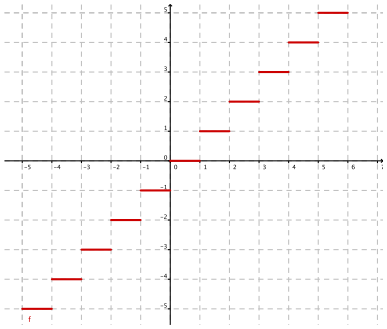
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Remarque 187. — Il résulte des théorèmes sur les limites que la **somme**, le **produit**, et la **composée** de deux fonctions continues est continue.

Exemple 219. — La fonction carré est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



Exemple 220. — La fonction **partie entière** n'est pas continue en $0, 1, 2, \ldots$:



Propriété 55. — *D'après un résultat vu sur les limites de fonctions, f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a et si ces limites sont égales.*

Méthode 12.7.

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est continue en un réel a, on calcule les limites à droite et à gauche en ce réel, et on montre que les deux limites valent $f(a)$.

Exemple 221. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Solution. On a $f(0) = 1$. Constatons alors que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-0} = 1 = f(0)$$

Ainsi, f est continue à droite et à gauche en 0. Elle est donc continue en 0.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Karl Weierstrass (encore lui) donna vers 1850 la première définition de la continuité d'une fonction. C'est également lui qui donna les définitions rigoureuses de la dérivée, que l'on verra plus tard.

2) Continuité des fonctions usuelles

Proposition 12.15.

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carré est continue sur $[0; +\infty[$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les fonctions puissances $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$

sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Les fonctions trigonométriques (cos, sin, tan), trigonométriques réciproques (arccos, arcsin, arctan) et hyperboliques (ch, sh, th) sont continues sur leur domaine de définition.

Démonstration. Admis. On verra dans un chapitre ultérieure qu'une fonction dérivable est continue, ce qui nous permet de conclure rapidement. □

3) Prolongement par continuité

Définition 183. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un réel a. On suppose que f est continue sur I\{a}, et qu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. On dit qu'on peut **prolonger par continuité** la fonction f en posant $f(a) = l$. On définit ainsi une nouvelle fonction, définie sur I, qui est continue sur I et coïncide avec f sur I\{a}.

Exemple 222. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0.

Solution. On constate que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 0$.

Remarque 188. — Rigoureusement, on doit définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui est égale à f sur I\{a}, et telle que $\tilde{f}(a) = l$. En pratique, on confondra toujours $\tilde{f}$ et f.

4) Tableau de variations et convention

Remarque 189. — Dans un tableau de variation, on convient que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

5) Suites récurrentes et continuité

Théorème 12.16.

Soit f une fonction continue, et l un réel. Soit (u_n) une suite convergente, de limite l. Alors la suite $(f(u_n))$ converge également, et a pour limite $f(l)$.

Remarque 190. — Si f n'est pas continue en x_0 mais si la fonction f a pour limite l en x_0, alors quelque soit la suite (u_n) de limite x_0, $(f(u_n))$ converge vers l.

Théorème 12.17. Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue, et u une suite définie par u_0 donné, et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u est convergente, alors par passage à la limite, en notant l la limite de u, on en déduit que la limite l vérifie $l = f(l)$: c'est donc un **point fixe** de la fonction f.

Méthode 12.8.

Le théorème précédent permet souvent de déterminer la limite d'une suite définie par récurrence lorsqu'elle est convergente.

Exercice 178. — Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est croissante, et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. En déduire que la suite u converge, et déterminer sa limite.

Solution.

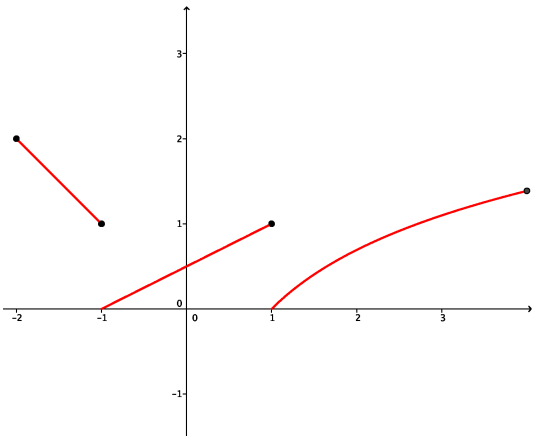
1. Méthode classique : on montre par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Pour tout entier n, soit P_n la proposition définie par "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 1$$
     et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: P_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :
     $$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

   Pour tout entier n, soit Q_n la proposition définie par "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > u_0$. $u_0 \leqslant u_1$: Q_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     On a $u_n \leqslant u_{n+1}$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}}$$
     et donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$: Q_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n :
     $$\forall\ n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$$
     La suite u est donc croissante.

   Remarque : on aurait également pu démontrer, par récurrence, les deux propositions en une seule, en démontrant "$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$".
2. La suite u est donc croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, celle-ci converge. Notons l sa limite. Puisque la fonction racine est continue sur $]0;+\infty[$, on en déduit par passage à la limite que que $l = \sqrt{l}$, c'est à dire $l = 0$ ou $l = 1$. Or, puisqu'elle est croissante,
   $$\text{Pour tout } n, u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{2}$$
   La limite est donc 1.

6) Continuité par morceaux

Définition 184. — Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ sil existe une **subdivision** $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ (c'est-à-dire un découpage du segment $[a;b]$) telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à lintervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.



Exemple 223. — La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, sur tout segment de la forme $]n;n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$) le fonction est continue (car constante), et prolongeable par continuité en n et $n+1$.

VII. Fonctions continues et résolution d'équation

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 12.18.

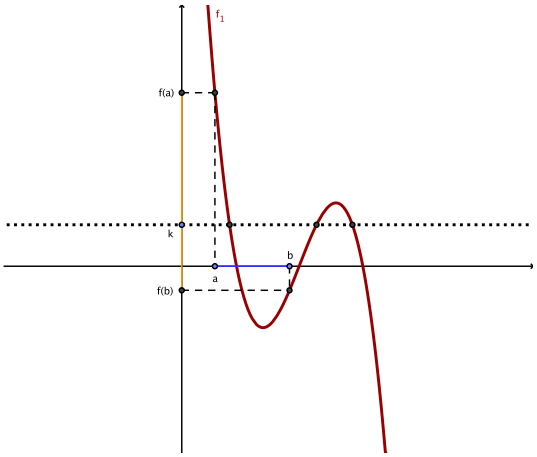
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Alors l'image $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Remarque 191. — On a mieux : si I est un segment, $f(\mathrm{I})$ est également un segment. Ainsi, si I est un segment $[a;b]$, le maximum et le minimum sont atteints : il existe deux réels u et v de I tels que $f(u) = \max_{x\in \mathrm{I}} f(x)$ et $f(v) = \min_{x\in \mathrm{I}} f(x)$.

On utilisera la variante plus explicite suivante :

Théorème 12.19.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.



Démonstration. Théorème admis. □

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Bernard Bolzano donna en 1817 la première démonstration analytique de ce théorème. **Weierstrass** en donna une autre plus tard, vers 1850.

2) Théorème de la bijection

Dans le cas d'une fonction continue strictement monotone sur un segment, on dispose d'un énoncé plus précis :

Théorème 12.20.

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans $[a;b]$.

Démonstration. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et (b). f étant une fonction continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$. Supposons la fonction strictement croissante (le cas décroissant se montre de la même manière). Alors :

- Pour tout $x > c$, on a $f(x) > f(c) = k$ donc il n'y a aucun réel $x > c$ vérifiant $f(x) = k$.
- Pour tout $x < c$, on a $f(x) < f(c) = k$ donc il n'y a aucun réel $x < c$ vérifiant $f(x) = k$.

Donc le réel c est le seul. □

Remarque 192. — Ainsi, si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, alors f est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Méthode 12.9.

On utilise le théorème de la bijection (ou *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*) pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à une équation. On vérifiera bien toutes les hypothèses : continuité, stricte monotonie, et déterminer l'intervalle image.

Exemple 224. — On suppose que la fonction f est continue, et que ses variations sont décrites dans le tableau suivant :

x	0	5
$f(x)$	-3 ↗	4

Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $[0;5]$.

Solution.

- f est continue et strictement croissante sur $[0;5]$.
- On a $f(0)=-3$, $f(5)=4$, donc $f([0;5])=[-3;4]$.
- $0\in[-3;4]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (*ou théorème de la bijection*), l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0;5]$.

3) Extension à un intervalle non borné

Le théorème précédent peut être étendu dans le cas d'un intervalle I quelconque.

Théorème 12.21.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors l'image de I par f est encore un intervalle, J. De plus, pour tout réel y de J, l'équation $f(x)=y$ possède une unique solution dans I.

Exemple 225. — Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a;b]$, alors pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$, l'équation $f(x)=k$ possède une unique solution dans $]a;b]$.

Exercice 179. — Prouver que l'équation (E) : $x\sqrt{x}=1-x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. On se ramène à une écriture $f(x)=k$: $x+x\sqrt{x}=1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=x+x\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x)=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}>0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. L'image de $]0;+\infty[$ est donc

$$\left]\lim_{x\to 0} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0;+\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x)=1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

4) Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Dans le cas d'une fonction continue, et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire, on peut déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=0$ par **dichotomie** : on découpe au fur et à mesure l'intervalle en 2 pour pouvoir cibler la solution.

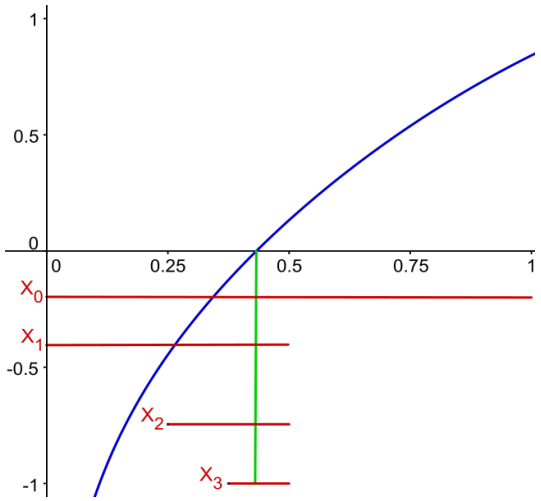


Image disponible sur Wikipédia

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Le mot dichotomie vient du grec *dikha* (*en deux*), et *tomein* (*couper*), c'est à dire "couper en deux".

Algorithme 2. — Dans cet algorithme, e représente la précision de la valeur approchée.

Algorithme 2 : DICHOTOMIE

Entrées : Saisir a, b et e
Tant que $b-a \geqslant e$
  $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**
    $b \leftarrow m$
  sinon
    $a \leftarrow m$
  fin
FinTantque
Sorties : Afficher a et b

En Scilab, cela donne (à condition que la fonction f ait été définie, dans le cas f croissante) la fonction suivante, où $[x;y]$ désigne l'intervalle de recherche de départ, et eps la précision :

Programme Scilab 2 : Algorithme de dichotomie

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 21/06/2015
// Résumé : fonction appliquant l'algorithme de dichotomie dans le cas où la fonction f est
// définie et croissante sur l'intervalle wde départ [x;y]. On cherche avec une précision eps.

function [a,b] = dicho (x,y, eps)
a=x
b=y
while(b-a>eps) do
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m) <= 0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
```

```
end
endfunction
```

5) Continuité et sens de variation de f^{-1}

Théorème 12.22.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ est continue sur $f(\mathrm{I})$, strictement monotone et de même monotonie que la fonction f.

Démonstration. Supposons f strictement croissante (le raisonnement est le même dans le cas décroissant). Soient x et y deux éléments de $f(\mathrm{I})$ tels que $x < y$. Puisqu'ils sont dans $f(\mathrm{I})$, il existe a et b dans I tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Puisque f est strictement croissante, $x = f(a) < f(b) = y \Rightarrow a < b$. Or, $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$. On a donc montré

$$\forall\ (x, y) \in (f(\mathrm{I}))^2,\ \ x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

f^{-1} est donc strictement croissante.
Etant strictement monotone, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $f(\mathrm{I})$. Supposons qu'il existe $y \in f(\mathrm{I})$ tel que les limites à droite et à gauche de f^{-1} en y soient différentes. En repassant par f, par continuité de f, les limites à droite et à gauche en $f^{-1}(y)$ sont donc différentes, ce qui est absurde, puisque f est continue sur I. □

fFileExiststex/Chap12/Exo12

Exercices

Exercice 180. — Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-3x^2+1 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2+3x-\frac{1}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{2x+1}{x} \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{3x^2+2x+1}{x-2}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} \qquad \lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}$$

Solution. Pour les polynômes ou fractions rationnelles en $+\infty$ ou $-\infty$, on utilise la règle du terme de plus haut degré. Ainsi,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ d'après la règle du terme de plus haut degré.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x+1} = 0$. Enfin, par la règle du terme de plus haut degré,

  $$\lim_{x\to-\infty} x^2+3x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

  Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\dfrac{1}{2x+1} = +\infty$
- Par la règle du terme de plus haut degré,

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
- De même,

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$
- La limite étant indéterminée, même en factorisant, on utilise la quantité conjuguée :

  $$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

  En posant $X = x+1$, on constate que $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Ainsi, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$. Par somme, on en déduit donc

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = +\infty$$
- On constate que $\lim\limits_{x\to0^-} 2x+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} x = 0^-$. Par quotient,

  $$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{2x+1}{x} = -\infty$$
- De même, $\lim\limits_{x\to2^+} 3x^2+2x+1 = 17$ et $\lim\limits_{x\to2^+} x-2 = 0^+$. Par quotient,

  $$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{3x^2+2x+1}{x-2} = +\infty$$

- On constate que $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-5x+6=0$. On a donc une indéterminée du type "$\frac{0}{0}$". Au numérateur, nous avons un trinôme du second degré dont 2 est donc une racine. Après factorisation, on obtient $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Ainsi,
$$\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\frac{x-3}{x-2}$$
en utilisant la parité de la fonction carrée. Ainsi, puisque $\lim\limits_{x\to 2^-} x-3=-1$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2=0^-$, par quotient
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=+\infty$$

- On constate que $\lim\limits_{x\to 3^+} -2x-3=-9$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x-3}=0^+$ car la fonction racine est toujours positive. Par quotient,
$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}=-\infty$$

Exercice 181. — Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{e^x-1} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{e^x-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2^x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2\ln(x)} \qquad \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln(x)}$$

Solution.
⚠ La méthode du terme de plus haut degré ne s'applique que sur des polynômes ou des fractions rationnelles. Si des fonctions du type exponentielle ou logarithme sont présentes, il faut utiliser les croissances comparées en factorisant par la fonction qui est la plus importante.

- On constate que
$$\frac{e^x-x}{e^x-1}=\frac{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-\frac{x}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$. Par somme et quotient,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{e^x-1}=1$$

- En $-\infty$, il n'y a pas d'indétermination! $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$. Par quotient,
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{e^x-1}=-\infty$$

- Quand on a des fonctions puissances, la seule méthode acceptable est de repasser à la notation exponentielle.
$$\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=\frac{e^{x\ln(x^5)}}{e^{5\ln(5^x)}}=\frac{e^{5x\ln(x)}}{e^{5\ln(e^{x\ln(5)})}}=\frac{e^{5x\ln(x)}}{e^{5x\ln(5)}}=e^{5x(\ln(x)-\ln(5))}$$

On peut également utiliser les propriétés des fonctions puissances, dans le cas où $x>0$:

$$\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=\frac{x^{5x}}{5^{5x}}=\left(\frac{x}{5}\right)^{5x}=e^{5x(\ln(x)-\ln(5))}$$

On pose $X=5x(\ln(x)-\ln(5))$.

- ◇ En 0^+ : puisque $X=5x\ln(x)-5x\ln(5)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} X=0$ par somme et croissance comparée. Puisque $\lim\limits_{X\to 0} e^X=1$, par composée
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=1$$
- ◇ En $+\infty$: puisque $X=5x(\ln(x)-\ln(5))$, $\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$ par produit. Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$, par composée
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=+\infty$$

- Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2=1$ et par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(2)}=1$. Par quotient,
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{2^x}=1$$

- Quand il faut calculer une limite avec la partie entière, on passera souvent par le théorème d'encadrement.
$$\text{Pour tout } x>0,\ \frac{1}{x}-1\leqslant\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant\frac{1}{x}$$
En multipliant par $x>0$,
$$\text{Pour tout } x>0,\ 1-x\leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant 1$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$, par encadrement, la limite existe et
$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=1$$

- Avant d'envisager la quantité conjuguée, on peut essayer de factoriser, ici par $\sqrt{x}$:
$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
En posant $X=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $Y=1+\frac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} X=\lim\limits_{x\to+\infty} Y=1$. Puisque $\lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X}=1$, par composée,
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$$
Par quotient, on en déduit donc
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=2$$

- On constate que
$$\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}=\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/4}=0^+$, par quotient
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}=-\infty$$

- En utilisant la même écriture que précédemment, et par croissance comparée, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = 0$$
- Pour tout réel $x>0$, on a
$$\frac{\sqrt{x}}{e^x-1} = \frac{\sqrt{x}}{x}\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{x}{e^x-1}$$
Puisque $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, par quotient et produit, on a
$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} = +\infty$$
- Par croissance comparée, $\lim_{x\to0^+} x^2\ln(x) = 0^-$ (car $x^2>0$ et $\ln(x)<0$). Puisque $\lim_{x\to0} x+1 = 1$, par quotient, on a
$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2\ln(x)} = -\infty$$
- Pour tout réel $x>0$, on a
$$(1+x)^{\ln(x)} = e^{\ln(x)\ln(1+x)} = e^{x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x}}$$
Puisque $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée), et $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par produit
$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$
et par composée,
$$\lim_{x\to0^+} (1+x)^{\ln(x)} = 1$$

Exercice 182. — Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par
$$\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Solution. Pour déterminer la limite en 0 d'une fonction f, on calcule la limite en 0^- et en 0^+.
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$
Ainsi, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 0$. Ainsi, f admet une limite en 0, et
$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$

Exercice 183. — Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes et le comportement asymptotique aux bornes des fonctions suivantes :
$$f : x\mapsto 2\sqrt{x}+14 \qquad g : x\mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Solution.
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ (fonction racine). Par somme, on a
$$\lim_{x\to0} f(x) = 14 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Puisque la limite en $+\infty$ est infinie, on déterminer le comportement asymptotique :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2\sqrt{x}+14}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{14}{x}$$

Par somme, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Ainsi, la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

- Puisque pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, on a $e^x + e^{-x} > 0$: la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout x, on a
  $$g(x) = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
  Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$. Par somme et quotient
  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$
  La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
  De même, on a pour tout x,
  $$g(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-2x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
  Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$. Par somme et quotient
  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$
  La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

Continuité

Exercice 184. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x)$ pour $x > 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue comme produit de deux fonctions continues. De plus

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque $f(0) = 0$, f est donc continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 185. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = e^x$ pour $x \geqslant 0$. La fonction f est-elle continue?

Solution. Sur R_-^*, f est continue (car constante). Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue car la fonction exponentielle l'est. Le problème se situe donc en 0. Or

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^x = f(0) = 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$: la fonction f n'est donc pas continue en 0, et n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 186. — Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ en 0.

Solution. Pour étudier la continuité de la fonction f en 0, il faut déterminer la limite de f en 0^- et en 0^+.

- Pour tout réel $x \in]-1;0[$, $[x] = -1$, donc $f(x) = x-(-1) = x+1$. On a donc
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+1 = 1$$
- Pour tout réel $x \in]0;1[$, $[x] = 0$, donc $f(x) = x-0 = x$. On a donc
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$: la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 187. — Peut-on prolonger la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en 0 ? en 1 ?

Solution. La fonction f est définie sur $]0;1[$. Pour la prolonger par continuité en 0 ou en 1, il faut déterminer ses limites aux bornes.

- Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, par quotient
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$
On peut donc prolonger par continuité la fonction f en 0, en posant $f(0) = 0$.
- Puisque $\ln(1) = 0$ et que pour tout réel $x \in]0;1[$, $\ln(x) < 0$, par quotient
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
On ne peut donc pas prolonger par continuité la fonction f en 1.

Exercice 188. — Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f([0;1]) \subset [0;1]$. En posant $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que la fonction f admet au moins un point fixe.

Solution. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue comme somme de deux fonctions continue. De plus :

- $g(0) = f(0) \geqslant 0$ car $f([0;1]) \subset [0;1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car pour tout réel $x \in [0;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant 0$.

Ainsi, g est continue, $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0;1]$, que l'on note α. Ainsi, $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$: f admet au moins un point fixe.

Exercice 189. — Soit $n > 0$ et $a_1, \cdots a_n$ des réels deux à deux distincts de $[0;1]$. Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$$
Calculer $f_n(0) + f_n(1)$, et en déduire qu'il existe au moins un réel u de $[0;1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

Solution. Puisque, pour tout entier k entre 1 et n, $a_k \in [0;1]$, on a $|a_k| = a_k$ et $|1 - a_k| = 1 - a_k$. Ainsi,
$$f_n(0) + f_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |-a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |1-a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |1-a_k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1 - a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$$
Ainsi, $f_n(0) = 1 - f_n(1)$. Ainsi, si $f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$, nécessairement $f_n(1) = 1 - f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$ alors $f_n(1) = 1 - f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, l'un des deux est inférieur à $\frac{1}{2}$ et l'autre est supérieur à $\frac{1}{2}$. La fonction f étant continue sur $[0;1]$, comme somme de fonctions continues, d'après le théorème des valeurs

intermédiaires, il existe au moins un réel u tel que $f(u) = \frac{1}{2}$.

Suites et continuité

Exercice 190. — Soit $n \geqslant 3$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite, et v_n la plus grande, vérifier que $\forall\ n \geqslant 3, 0 < u_n < n < v_n$.
2. Quelle est la limite de la suite v ?
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.
4. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que la suite u est convergente, puis en encadrant $\ln(u_n)$, déterminer sa limite.

Solution.

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on y reviendra dans un prochain chapitre*) et sa dérivée est donnée par

$$\forall\ x > 0,\ f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

Puisque $x > 0$, on constate que le numérateur est positif sur $[n; +\infty[$ et négatif sur $]0; n]$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0; n]$ puis strictement croissante sur $[n; +\infty[$. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty \text{ par croissance comparée}$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$n - n\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $n \geqslant 3$, $n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$. Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement décroissante sur $]0; n]$ et strictement croissante sur $[n; +\infty[$. De plus,

$$f_n(]0; n]) =]n - n\ln(n); +\infty[\text{ et } f_n([n; +\infty[) =]n - n\ln(n); +\infty[\text{ avec } 0 \in]n - n\ln(n); +\infty[$$

D'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; n]$, que l'on note u_n, et une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $[n; +\infty[$, que l'on note v_n. Ainsi,

$$0 < u_n \leqslant n \leqslant v_n$$

Or, $f_n(n) = n - n\ln(n) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 3$. Ainsi

$$0 < u_n < n < v_n$$

2. Puisque, pour tout $n \geqslant 3$, $n < v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

3. Pour $n \geqslant 3$, on a $1 \in]0; n[$ et $e \in]0; n[$. De plus,

$$f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0 \text{ et } f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0 \text{ si } n \geqslant 3$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0; n[$, on en déduit donc

$$f(e) < f_n(u_n) < f(1) \Rightarrow 1 < u_n < e$$

4. Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi,

$$u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$$

Ainsi,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$$

D'après la question précédente, $1 < u_{n+1} < e$ donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Donc

$$f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0;n]$, on en déduit donc que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 3.

5. La suite u étant décroissante à partir du rang 3, et minorée par 1 d'après la question 3., elle converge donc par le théorème de convergence monotone. On sait que

$$f_n(u_n) = u_n - n\ln(u_n) = 0 \Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$$

Puisque $1 < u_n < e$, on obtient $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0$$

d'après le théorème d'encadrementn, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge, et sa limite vaut 0. Or, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. Donc $(\ln(u_n))$ converge également vers 0. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(u_n)} = 1$$

CHAPITRE 13

ESPACES VECTORIELS EN DIMENSION FINIE

Résumé

On s'intéresse dans ce chapitre à la notion d'espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire ayant une base finie. On en déduit des résultats intéressants, permettant d'avoir des méthodes plus efficaces. On s'intéresse enfin aux applications linéaires en dimension finie.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dimension :
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un sous-espace vectoriel ..... □
- Savoir déterminer le rang d'une famille et la dimension d'un espace vectoriel ..... □

② Savoir utiliser la dimension finie :
- montrer qu'une famille finie ou génératrice ayant le bon nombre d'éléments est une base ..... □
- connaître la formule de Grassman, et le cas des espaces en somme directe ..... □

③ Concernant les applications linéaires :
- savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données ..... □
- savoir écrire la matrice de passage d'une base à une autre ..... □
- connaître la matrice d'un projecteur et d'une symétrie dans des bases adaptées ..... □

④ Connaître la trace d'une matrice et d'un endomorphisme, ainsi que ses propriétés ..... □

⑤ Savoir calculer le rang d'une application linéaire ou d'une matrice ..... □

⑥ Savoir utiliser la formule du rang pour déterminer certaines dimensions ..... □

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Quelques compléments

1) Projecteurs

Définition 185. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Tout élément $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On appelle alors **projecteur** sur F parallèlement à G l'application $p : E \to E$ définie par

$$\forall\, x = y + z \in E \text{ avec } (y,z) \in F \times G, \quad p(x) = y$$

Remarque 193. — Ainsi, la composante suivant F est conservée, et celle suivant G est supprimée.

Proposition 13.1.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors p est un endomorphisme de E.

Démonstration. Par construction, $p : E \to E$. Montrons que p est linéaire. Soient $(x,x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit, de manière unique $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, avec $(y,y') \in F^2$ et $(z,z') \in G^2$. Mais alors $\lambda x + x' = (\lambda y + y') + (\lambda z + z')$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\lambda y + y' \in F$ et $\lambda z + z' \in G$. Ainsi

$$p(\lambda x + x') = p((\lambda y + y') + (\lambda z + z')) = \lambda y + y' = \lambda p(x) + p(x')$$

Ainsi, f est linéaire et c'est ainsi un endomorphisme de E. □

Proposition 13.2.

Si p est un projecteur, alors $p \circ p = p$.

Solution. En effet, si $x = y + z$ avec $(y,z) \in F \times G$, alors

$$p \circ p(x) = p(p(y+z)) = p(y) = y$$

Remarque 194. — Il s'agit en réalité d'une équivalence : p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

2) Symétrie

Définition 186. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Tout élément $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On appelle alors **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application $p : E \to E$ définie par

$$\forall\, x = y + z \in E \text{ avec } (y,z) \in F \times G, \quad p(x) = y - z$$

Remarque 195. — Ainsi, la composante suivant F est conservée, et celle suivant G devient l'opposée.

Proposition 13.3.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit s la symétrie sur F parallèlement à G. Alors s est un endomorphisme de E.

Démonstration. Par construction, $s : E \to E$. Montrons que s est linéaire. Soient $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit, de manière unique $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, avec $(y, y') \in F^2$ et $(z, z') \in G^2$. Mais alors $\lambda x + x' = (\lambda y + y') + (\lambda z + z')$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\lambda y + y' \in F$ et $\lambda z + z' \in G$. Ainsi

$$s(\lambda x + x') = s((\lambda y + y') + (\lambda z + z')) = \lambda y + y' - (\lambda z + z') = \lambda(y - z) + (y' - z') = \lambda s(x) + s(x')$$

Ainsi, f est linéaire et est un endomorphisme de E. □

Proposition 13.4.

Si s est une symétrie, alors $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Solution. En effet, si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$, alors

$$s \circ s(x) = s(s(y + z)) = s(y - z) = y + z = x$$

Remarque 196. — Il s'agit en réalité d'une équivalence : s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{id}_E$.

II. Dimension finie

1) Rappels sur les bases

Rappel 15. — *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une famille de vecteur de* E.

- *La famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est dite* ***génératrice*** *si et seulement si* $(e_1, \cdots, e_n)$ *engendre* E*, c'est-à-dire si*

$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E$$

- *La famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est dite* ***libre*** *si et seulement si*

$$\forall\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- *La famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est une* ***base*** *de* E *si et seulement si la famille est libre et génératrice.*

Exercice 191. — Parmi les familles suivantes, déterminer les familles libres, génératrice dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

Solution. Concernant la liberté, on part de $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et on résout le système. S'il est de Cramer, la famille est libre, sinon, elle est liée. On obtient que les première et deuxième familles sont libres, mais la troisième est liée ; par exemple

$$-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Montrer montrer qu'une famille est génératrice, on résout $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Si ce système a au moins une solution pour tout (x,y,z) fixé, la famille est génératrice. Si ce système n'a pas de solution, on exhibe un contre-exemple et la famille n'est pas génératrice. Ainsi, la première est génératrice, mais la deuxième et la troisième ne le sont pas. Par exemple, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ n'est atteint ni avec la deuxième matrice, ni avec la troisième.
Bilan : la première famille est donc une base, la deuxième est libre mais pas génératrice et la dernière est ni libre ni génératrice.

2) Dimension finie et coordonnées

Définition 187. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice de E ayant un nombre fini d'éléments.

Exemple 226. — Par exemple, $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, puisque la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice.

Proposition 13.5.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathscr{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une famille de E. Alors $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si

$$\forall\ y\in \mathrm{E},\quad \exists!(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad y=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$$

Ainsi, chaque vecteur de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de la base. Les coefficients $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ sont appelés les **coordonnées** de y dans la base B. On notera alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\dots\\\lambda_n\end{pmatrix}$$

Méthode 13.1.

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur u dans une base $\mathscr{B}=(e_1,\cdots,e_n)$, on écrit $u=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$ et on résout le système pour obtenir les coordonnées $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

Exercice 192. — Soit $\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, où $u=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Solution. Rapidement, la famille est libre et génératrice, donc forme une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche deux réels λ et μ tels que $\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. On obtient le système

$$\begin{cases}\lambda+\mu=3\\-\lambda+\mu=5\end{cases}\sim\begin{cases}\lambda=-1\\\mu=4\end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

On dispose d'un théorème essentiel : toutes les bases d'un même espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Théorème 13.6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Alors

- toute famille libre de E a au plus n éléments ;
- toute famille génératrice a au moins n éléments ;
- toute base a exactement n éléments.

On appellera alors dimension de E ce nombre n, noté $\dim(\mathrm{E})$.

Notation 10. — Par convention, l'espace vectoriel nul a pour dimension 0 : $\dim(\{0\})=0$.

Proposition 13.7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors toute famille composée de $n+1$ vecteurs de E est liée.

Démonstration. En effet, d'après le théorème précédent, une famille libre a au plus n éléments. Si elle en possède $n+1$, elle est forcément liée. □

3) Dimension des espaces usuels

Proposition 13.8. Dimension des espaces usuels

On a :

- $\dim(\mathbb{K}^n)=n$.
- $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=n\times p$.
- $\dim(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}])=n+1$.

Les espaces $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ (avec I non réduit à un point) et l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces de dimension infinie.

Démonstration. On dispose des bases canoniques :

- $\begin{pmatrix}1\\\dots\\0\end{pmatrix},\vdots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, possédant n éléments : $\dim(\mathbb{K}^n)=n$.
- la famille des $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, où $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice $n\times p$ composée de 0 sauf un 1 en ligne i, colonne j, est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, possédant $n\times p$ éléments. Donc $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=n\times p$.
- la famille $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\cdots,\mathrm{X}^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ donc $\dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])=n+1$.

Enfin, $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\cdots,\mathrm{X}^n,\cdots)$ est une famille infinie génératrice de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, qui est donc de dimension infinie. □

4) Rang d'une famille

Définition 188. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1,\cdots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(e_1,\cdots,e_p)$ la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(e_1,\cdots,e_p)$. On le note $\text{rg}(e_1,\cdots,e_p)$.

Propriété 56. — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $(e_1,\cdots,e_p)$ *une famille de vecteurs de* E.

- $(e_1,\cdots,e_p)$ *est libre si et seulement si* $\text{rg}(e_1,\cdots,e_p)=p$.
- $(e_1,\cdots,e_p)$ *est génératrice si et seulement si* $\text{rg}(e_1,\cdots,e_p)=n$.

Démonstration. $(e_1,\cdots,e_p)$ est libre si et seulement si $(e_1,\cdots,e_p)$ forme une base de $\text{Vect}(e_1,\cdots,e_p)$. Ainsi, si $(e_1,\cdots,e_p)$ est libre, alors $\text{rg}(e_1,\cdots,e_p)=p$. Réciproquement, si $\text{rg}(e_1,\cdots,e_p)=p$, alors $(e_1,\cdots,e_p)$ est une famille libre, sinon la dimension de $\text{Vect}(e_1,\cdots,e_p)<p$.
Le cas de la famille génératrice se traite de la même manière. □

Remarque 197. — Si $(e_1,\cdots,e_k)$ est une sous famille libre de $(e_1,\cdots,e_p)$, alors $\text{rg}(e_1,\cdots,e_p)\geqslant k$. Si $(e_1,\cdots,e_k)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(e_1,\cdots,e_n)$, alors $\text{rg}(e_1,\cdots,e_n)\leqslant k$.

III. Bases en dimension finies

1) Caractérisation d'une base en dimension finie

En dimension finie, on dispose d'un théorème très important : une famille libre (ou génératrice) ayant le même nombre d'éléments que la dimension est automatiquement une base.

Théorème 13.9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

- Si une famille $\mathscr{B}$ est une famille libre à n éléments, elle forme une base de E.
- Si une famille $\mathscr{B}$ est une famille génératrice à n éléments, elle forme une base de E.

Méthode 13.2.

En dimension finie, il suffit de montrer qu'une famille est libre et possède le bon cardinal pour conclure qu'elle forme une base de l'espace vectoriel.

Exemple 227. — Soit $\mathscr{B}=(1,X-1,X^2-1)$. Montrer que $\mathscr{B}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution. La famille $\mathscr{B}$ est libre, car échelonnée en degré. On peut également le montrer en partant de $\lambda_1+\lambda_2(X-1)+\lambda_3(X^2-1)=0$ et identifier les coefficients. Mais alors, elle est libre, de cardinal 3. Or, $\dim(\mathbb{R}_2[X])=3$. Ainsi, elle est libre et possède 3 éléments : la famille $\mathscr{B}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Théorème de la base incomplète

Théorème 13.10. Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**.

- De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration. L'idée est simple : on part d'une famille libre de E : $(e_1, \cdots, e_p)$. Soit elle est génératrice et forme donc une base de E. Soit elle n'est pas génératrice, et alors il existe $u \in E$ tel que $u \notin \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Alors, par construction, $(e_1, \cdots, e_p, u)$ est une famille libre, et on réitère.
Pour l'autre point, on raisonne de la même manière : soit la famille génératrice $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, mais alors elle forme une base de E. Soit elle n'est pas libre, mais alors un des e_i peut s'exprimer en fonction des autres, disons e_p pour simplifier. Mais alors, $(e_1, \cdots, e_{p-1})$ est encore génératrice et on réitère. □

Remarque 198. — Ainsi, tout espace vectoriel de dimension finie non nulle possède une base. En effet, en prenant x non nul dans cet espace vectoriel, la famille (x) est libre. D'après le théorème précédent, on peut donc la compléter en une base.

3) Dimensions et sous-espaces vectoriels

Proposition 13.11.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

- F est de dimension finie ;
- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$

Démonstration. Toute famille libre de F est également une famille libre de E. Puisque E est de dimension n, toute famille libre de F ne peut posséder, au plus, que n éléments. Ainsi, par théorème, F est également de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Enfin, si $\dim(F) = \dim(E)$, on prend une base de F, ayant $\dim(F) = n$ éléments. Puisque $F \subset E$, cette base est une famille libre de F et donc de E. Mais puisque E est également de dimension n, c'est une base de E, et donc $F = E$. □

Méthode 13.3.

Ainsi, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est l'espace E tout entier, il peut être judicieux de montrer que $\dim(F) = \dim(E)$.

Exemple 228. — Soit $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution. On peut voir que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, il s'agit d'une base de E et $\dim(E) = 2$. Or $E \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(E) = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. Ainsi, $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 13.12. Formule de Grassmann

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

En particulier, si F et G sont en somme directe :

$$\dim(F \bigoplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

4) Dimension finie et supplémentaire

Théorème 13.13.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \oplus G = E$. De plus,

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Réciproquement, si F et G sont en somme directe, et si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ alors F et G sont supplémentaires dans E. Connaissant $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de F, et $(f_1, \cdots, f_{n-k})$ une base de G, alors $(e_1, \cdots, e_k, f_1, \cdots, f_{n-k})$ est une base de E.

Remarque 199. — Ainsi, si G et H sont deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F, alors $\dim(G) = \dim(H)$.

Méthode 13.4.

En dimension finie, pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on peut alors raisonner ainsi :

- On montre que la somme est directe : $F \cap G = \{0\}$.
- On montre ensuite que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

On conclut alors que F et G sont supplémentaires dans E.

Exemple 229. — Soient $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution. Constatons que la famille $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est libre (car non nulle), ainsi que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ (vecteurs non colinéaires). Ainsi, $\dim(E) = 1$ et $\dim(F) = 2$. Enfin, soit $u \in E \cap F$. Alors, il existe x tel que $u = \begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$, et y, z vérifiant $u = y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix}y+2z\\z\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix} \Leftrightarrow z = y = x = 0$$

Ainsi, $u = 0$ et $E \cap F = \{0\}$. La somme $E + F$ est donc directe, et $\dim(E) + \dim(F) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$: E et F sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

IV. Dimension finie et application linéaire

1) Applications linéaires en dimension finie

En dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ.

Proposition 13.14.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ une famille génératrice de Im (f).

Méthode 13.5.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on prend donc une base de l'espace de départ, et on détermine l'image de cette base par une application linéaire. On détermine ensuite une base de l'image en vérifiant la liberté éventuelle de la famille obtenue.

Exercice 193. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(a,b,c) = (a+b+c, a+c, a-b+c)$. Démontrer que f est linéaire, et déterminer une base de Im (f).

Solution. Soient $x = (a,b,c), y = (a',b',c')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \\ &= (\lambda a + a' + \lambda b + b' + \lambda c + c', \lambda a + a' + \lambda c + c', \ăλa + a' - (\lambda b + b') + \lambda c + c') \\ &= (\lambda(a+b+c) + (a'+b'+c'), \lambda(a+c) + (a'+c'), \lambda(a-b+c) + (a'-b'+c')) \\ &= \lambda(a+b+c, a+c, a-b+c) + (a'+b'+c', a'+c', a'-b'+c') \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire, et donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Une base de $\mathbb{R}^3$ est $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. On a

$$f(1,0,0) = (1,1,1), \quad f(0,1,0) = (1,0,-1), \quad \text{et} \quad f(0,0,1) = (1,1,1)$$

Ainsi, Im $(f) = \text{Vect}((1,1,1),(1,0,-1),(1,1,1))$. La famille n'est pas libre, puisqu'elle contient deux fois $(1,1,1)$. En revanche, $((1,1,1),(1,0,-1))$ est libre, car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi,

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}((1,1,1),(1,0,-1))$$

et $((1,1,1),(1,0,-1))$ est une base de Im (f).

Remarque 200. — Si $E = F \oplus G$, on a vu que, connaissant une base de F et de G, on en déduit une base de E. Mais alors, connaissant $f|_F$ et $f|_G$, les restrictions de f à F et G, on en déduit complètement f.

2) Isomorphisme et dimension finie

Définition 189. — On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.

Exercice 194. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ par $f(a,b,c) = aX^2 + bX + c$. Montrer que f est linéaire, puis déterminer noyau et image. En déduire que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Solution. Soient $x = (a,b,c), y = (a',b',c')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \\ &= (\lambda a + a')X^2 + (\lambda b + b')X + (\lambda c + c') \\ &= \lambda(aX^2 + bX + c) + (a'X^2 + b'X + c') \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

- Soit $x = (a,b,c) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(a,b,c) = 0$, c'est-à-dire $aX^2 + bX + c = 0$. Par identification des coefficients, $a = b = c = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$: la fonction f injective.
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a rapidement

$$f(1,0,0) = X^2, \quad f(0,1,0) = X, \quad \text{et} \quad f(0,0,1) = 1$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(1,X,X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ en reconnaissant la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. f est donc bijective.

Bilan : f est donc un isomorphisme. Ainsi, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

En dimension finie, si deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension :

Théorème 13.15.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors $\dim(E) = \dim(F)$.

En dimension finie, on dispose du résultat suivant :

Proposition 13.16.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

On a alors :

Proposition 13.17.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie n, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors $(f(e_1), \cdots f(e_n))$ est une base de F.

Enfin, dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie, on dispose d'un théorème fondamental

Théorème 13.18.

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Méthode 13.6.

Pour montrer, en dimension finie, qu'un endomorphisme est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif.

Exemple 230. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout (a,b,c) par $f(a,b,c) = (a+b, a+c, b+c)$. Montrer que f est un isomorphisme.

Solution. On démontre rapidement que f est une application linéaire, et est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $x = (a,b,c) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors, en résolvant le système :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (a+b, a+c, b+c) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$ et f est injective. Mais alors, étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bijective.

Remarque 201. — ⚠ Ce résultat est faux, dans le cas général, en dimension infinie.

Exercice 195. — Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$. Montrer que f est surjective. Est-elle bijective ?

Solution. f est linéaire, puisque la dérivée l'est (exercice de TD du chapitre 11). Il s'agit donc d'un endomorphisme, puisque $f(P) = P' \in \mathbb{R}[X]$. Déterminons son image. On prend $(1, X, \dots, X^n \dots)$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Mais alors

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 1, \quad f(X^2) = 2X, \dots, f(X^n) = nX^{n-1} \dots$$

Ainsi, en utilisant les propriétés de l'espace vectoriel engendré :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}(1, 2X, 3X^2, \dots, nX^{n-1}, \dots) = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^{n-1}, \cdots)$$

Donc $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R}[X]$: f est surjective. Cependant, f n'est pas bijective, puisqu'elle n'est pas injective. En effet $f(1) = 0$ et donc $1 \in \text{Ker}(f)$.

V. Représentation matricielle en dimension finie

1) Matrice d'une application linéaire

L'idée est, en dimension finie, d'avoir une représentation des applications linéaires sous forme matricielle.

Définition 190. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **matrice de f relativement** aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et on note $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, la matrice $(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j^{ieme} colonne est le vecteur $f(e_j)$, décomposée dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\forall\, j \in [\![1; p]\!], \quad f(e_j) = a_{1j} f_1 + \cdots + a_{nj} f_n$$

$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ s'écrit donc

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Méthode 13.7.

Pour déterminer la matrice d'une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$:

1. On calcule $f(e_j)$ pour tout $j \in [\![1; p]\!]$.
2. On exprime, pour tout entier $j \in [\![1; p]\!]$, $f(e_j)$ dans la base $(f_1, \cdots, f_n)$ en déterminant ses coordonnées dans la base.
3. On conclut en écrivant la matrice des coordonnées obtenues précédemment.

Exercice 196. — Soient $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ deux bases de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

Déterminer $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

Solution. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On constate que $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Décomposons $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ suivant la base (e_1, e_2).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après résolution, on obtient $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$. Ainsi $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$. On obtient alors la matrice suivante :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Proposition 13.19.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$. et $u \in E$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$

Démonstration. On écrit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$. Puisque $u \in E$, il existe $(u_1, \cdots, u_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$u = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j$$

Mais alors

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} u_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} u_j f(e_j) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \sum_{j=1}^{p} u_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \quad \text{en utilisant les notations de la définition 190} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_j\right) f_i \end{aligned}$$

Le coefficient de f_i dans la décomposition de $f(u)$ la base $\mathscr{B}'$ est bien la j^{ieme} colonne de $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. □

2) Lien entre matrice et applications linéaires

Connaissant les matrices de f et g, on obtient rapidement celle de $f \circ g$ et de f^{-1} si f est bijective.

Proposition 13.20.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $\mathscr{B}''$ une base de G.

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

Remarque 202. — Ainsi, il suffit de multiplier les matrices respectives des applications.

Proposition 13.21.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)^{-1}$$

Remarque 203. — Il y a une équivalence entre f et sa matrice dans une base. En effet, si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases respectives de E et F, alors

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. D'après les remarques précédentes, f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible par exemple.

3) Changement de base

Il arrive régulièrement (et nous le verrons plus tard) qu'on souhaite changer les bases qu'on utilise sur l'espace vectoriel de départ.

Définition 191 (Matrice de passage)**.** — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi,

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$$

Exercice 197. — Soient $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ deux bases de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Solution. On fera attention à l'ordre. On a, rapidement, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$:

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix} \check{a}1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$, on décompose les éléments de la base $\mathscr{B}$ suivant la base $\mathscr{B}'$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ est :

$$Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque 204. — Si P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, alors P est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Démonstration. En effet, d'après la proposition 13.21, et puisque $id_E^{-1} = id_E$, on a bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id_E)\right)^{-1}$$

□

Proposition 13.22. Formules de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Alors

- Pour tout vecteur u de E,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$
- Si f est un endomorphisme de E, alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P$$

Remarque 205. — ⚠ On fera attention à l'intuition! La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet, à partir d'un vecteur u décomposé suivant $\mathscr{B}'$ d'obtenir ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 198. — Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique, et la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Donner la matrice de passage P de la base canonique dans la base $\mathscr{B}$.
4. Exprimer A en fonction de P et D, puis en déduire A^n pour tout entier n.

Solution.

1. On montre classiquement que f est linéaire, et donc, que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Dans la base canonique, que l'on note $\mathscr{C}$:
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Dans la base $\mathscr{B}$:
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Par définition
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. D'après la formule de passage, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) \times P$$
soit $D = P^{-1}AP$, ou encore $A = PDP^{-1}$. Par récurrence rapide, on peut alors montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$. D étant diagonale, on a, pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et enfin, par calcul :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
et donc
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{-3^n+1}{2} \\ \dfrac{-3^n+1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

Remarque 206. — Ainsi, si A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Définition 192. — On dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$.

Remarque 207. — On a alors $B = PAP^{-1}$.

Exemple 231. — D'après l'exercice 198, les matrices $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

4) Cas des projecteurs et symétries

Pour le cas particulier des projecteurs et symétries, on peut choisir des bases adaptées pour obtenir des matrices "agréables".

Proposition 13.23.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux supplémentaires dans E, et $p : E \to E$ le projecteur sur F parallèlement à G :
$$\begin{array}{rcl} p : E = F \bigoplus G & \to & E \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' \end{array}$$
Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F, et $(f_1 \cdots f_{n-p})$ une base de G. Notons alors $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_{n-p})$ une base de E. Dans cette base :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{n-p} \\ 0_p & 0_{n-p} \end{pmatrix}$$

Exemple 232. — Soit p le projecteur sur $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. Alors, dans la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, la matrice de p est

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Proposition 13.24.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux supplémentaires dans E, et $p : E \to E$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G :

$$\begin{array}{rcl} p : E = F \bigoplus G & \to & E \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' - x'' \end{array}$$

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F, et $(f_1 \cdots f_{n-p})$ une base de G. Notons alors $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_{n-p})$ une base de E. Dans cette base :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix}I_p & 0_{n-p}\\0_p & -I_{n-p}\end{pmatrix}$$

Exemple 233. — Soit s la symétrie par rapport à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. Alors, dans la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, la matrice de s est

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

VI. Quelques compléments

1) Trace et transposée

Définition 193. — Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle **trace** de A, et on note Tr(A), le nombre $\text{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Remarque 208. — Ainsi, la trace d'une matrice est la somme de tous les coefficients diagonaux de celle-ci.

Exemple 234. — On a

$$\text{Tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\right) = 1 + 4 = 5$$

Proposition 13.25.

La fonction $\text{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

Démonstration. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un réel. Alors $\lambda A + B = (\lambda a_{ij} + b_{ij})$. Mais alors

$$\begin{array}{rcl} \text{Tr}(\lambda A + B) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) \\ & = & \lambda \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} b_{ii} \\ & = & \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \end{array}$$

Ainsi, Tr est linéaire, et à valeur dans $\mathbb{K}$, donc est une forme linéaire. □

Proposition 13.26.

On dispose de deux résultats importants :

- Pour toutes matrices $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Pour toutes matrices semblables A et B, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Démonstration. La preuve se fait par le calcul pour le premier résultat. Pour le deuxième résultat, il existe P inversible tel que $A = PBP^{-1}$. Mais alors, en utilisant le résultat précédent :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{Tr}(B)$$

□

Remarque 209. — Ce dernier résultat assure que toute matrice semblable à une même matrice ont la même trace. Cela permet de définir la trace d'un endomorphisme.

Définition 194. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **trace** de f, et on note $\mathrm{Tr}(f)$, la trace de la matrice de f dans une base de E.

Méthode 13.8.

Pour déterminer la trace d'un endomorphisme, on détermine sa matrice dans une base (par exemple, la base canonique) et on calcule la trace de cette matrice.

Exercice 199. — Déterminer la trace de l'endomorphisme f de l'exercice 198.

Solution. Dans l'exercice 8, la matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4$$

Remarque 210. — Si on prend la matrice dans la base $\mathscr{B}$, on obtient bien évidemment la même trace.

2) Formule du rang

Définition 195. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **rang** de f la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$$

Remarque 211. — Puisque $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, il est de dimension finie (car F l'est) et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

Théorème 13.27. Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f))$$

Démonstration. L'idée : on prend une base $(e_1,\dots,e_p)$ de $\mathrm{Ker}(f)$, qui existe puisqu'on est en dimension finie. On complète cette base en une base $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. Mais alors, puisque $f(e_1)=f(e_2)=\dots=f(e_p)=0$, la famille $(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))$ est une famille génératrice de $\Im(f)$, et on peut montrer qu'elle est libre : c'est donc une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f))=p$, $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=n-p$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}\,(f))=n=\dim(\mathrm{E})$. □

Exercice 200. — On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Que dire de f si :

1. $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{F})$?
2. $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{E})$?

Solution.

1. Si $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{F})$, puisque $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, et qu'ils ont même dimension, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{F}$. Ainsi, f est surjective.
2. D'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{E})=\dim(\mathrm{E})+\dim(\mathrm{Ker}(f))$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f))=0$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f)=\{0_\mathrm{E}\}$. Ainsi, f est injective.

Remarque 212. — En utilisant l'isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ vu précédemment, on peut également également voir le rang d'une matrice M comme étant le rang de l'application linéaire dont la matrice dans une base est M.

Proposition 13.28.

Soit $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de M peut être vu comme

- le rang du système $\mathrm{MX}=0$, avec $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ la matrice des inconnues.
- le rang de la famille $(\mathrm{C}_1,\cdots,\mathrm{C}_p)$ des colonnes de la matrice M : $\mathrm{C}_i=\begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}$.
- le rang de l'application linéaire $f:\mathbb{K}^p\to\mathbb{K}^n$ définie par $\forall\,\mathrm{X}\in\mathbb{K}^p,\quad f(\mathrm{X})=\mathrm{MX}$.

Méthode 13.9.

Pour déterminer le rang d'une matrice ou d'une famille de vecteurs, on résout le système de la forme $\mathrm{MX}=0$ associé. Le rang de ce système (c'est-à-dire le nombre de pivot non nul) est égal au rang de la matrice ou de la famille associée.

Exemple 235. — Déterminer le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Solution. On résout le système

$$\begin{cases} x & & -z=0\\ & y+z=0\\ x+y & =0\\ & y+z=0\end{cases}\sim\begin{cases} x & & -z=0\\ & y+z=0\\ & y+z=0\\ & y+z=0\end{cases}$$

Ce système est de rang 2 (car les trois dernières lignes sont les mêmes). Ainsi,

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=2$$

fFileExiststex/Chap13/Exo13

Exercices

Exercices classiques

Exercice 201. — Soit a un réel, et $\mathrm{E}_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x+y+z=a \right\}$. Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur a l'espace E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire le rang de f. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{E}_0$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution.

1. Si $a \neq 0$, le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans E_a, donc E_a ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si $a = 0$, on peut montrer que E_0 est bien un s.e.v. (par exemple, comme ensemble de solutions d'un système homogène linéaire de 1 équation à 3 inconnues.
2. Soient $\mathrm{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{Y}) &= f\begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda y + y') - (\lambda z + z') \\ (\lambda z + z') - (\lambda x + x') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(y-z) + y' - z' \\ \lambda(z-x) + z' - x' \\ \lambda(x-y) + x' - y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y'-z' \\ z'-x' \\ x'-y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(\mathrm{X}) + f(\mathrm{Y}) \end{aligned}$$

   Ainsi, f est linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même : c'est un endomorphisme.
3. Soit $\mathrm{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(\mathrm{X}) = 0$ nous donne $\begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $x = y = z$. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

   Nous sommes en dimension finie. D'après ce qui précède, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Par le théorème du rang

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

et donc $\text{rg}(f) = 3-1 = 2$. f n'est pas injective (car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$) et n'est pas surjective (puisque son rang ne vaut pas 3, la dimension de l'espace d'arrivée).

4. Remarquons que
$$\text{E}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
Puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base de E_0 et $\dim(\text{E}_0) = 2$. Ainsi, $\text{rg}(f) = \dim(\text{E}_0) = 2$. Il suffit de montrer une inclusion pour pouvoir conclure.
Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}\,(f)$. Il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$. Mais alors
$$a+b+c = (y-z)+(z-x)+(x-y) = 0$$
et donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{E}_0$. Donc $\text{Im}\,(f) \subset \text{E}_0$ et par égalité des dimensions, $\text{Im}\,(f) = \text{E}_0$.

5. Nous sommes en dimension finie. Puisque $\dim(\text{Im}\,(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = 2+1 = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, il suffit de montrer que $\text{Im}\,(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont en somme directe pour conclure qu'ils sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Soit $\text{X} \in \text{Im}\,(f) \cap \text{Ker}(f)$. D'après ce qui précède, X s'écrit $\text{X} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ (car $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$) avec $x \in \mathbb{R}$.
Mais de plus, $\text{X} \in \text{Im}\,(f) = \text{E}_0$. Donc ses coordonnées vérifient l'équation $x+y+z=0$, ce qui donne ici $x+x+x=0$, et donc $x=0$. Ainsi, $\text{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Bilan : $\text{Im}\,(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$, et puisque $\dim(\text{Im}\,(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\text{Im}\,(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 202 (ATS 2014)**.** — Soit $f : \mathbb{R}_4[\text{X}] \to \mathbb{R}_4[\text{X}]$ définie par
$$f : \text{P}(\text{X}) \mapsto \text{P}(\text{X}) - \text{XP}'(\text{X})$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[\text{X}]$.
2. Donner la matrice de f dans une base au choix, que l'on précisera.
3. Donner une base du noyau de f.
4. Donner la dimension et une base de l'image de f.

Solution.

1. Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_4[\text{X}]$, et λ un réel. Alors
$$\begin{aligned} f(\lambda\text{P}+\text{Q}) &= (\lambda\text{P}+\text{Q}) - \text{X}(\lambda\text{P}+\text{Q})' \\ &= \lambda\text{P}+\text{Q}-\text{X}\lambda\text{P}'-\text{XQ}' \\ &= \lambda(\text{P}-\text{XP}')+\text{Q}-\text{XQ}' \\ &= \lambda f(\text{P}) + f(\text{Q}) \end{aligned}$$
Ainsi, f est linéaire. Si P est de degré maximum 4, P′ est de degré maximum 3, et donc XP′ est également de degré 4 au maximum. Ainsi, $f(\text{P}) \in \mathbb{R}_4[\text{X}]$ et f est donc un endomorphisme.
2. On choisit la base canonique $\beta = (1, \text{X}, \text{X}^2, \text{X}^3, \text{X}^4)$. On a rapidement
$$f(1) = 1, \quad f(\text{X}) = 0, \quad f(\text{X}^2) = -\text{X}^2, \quad f(\text{X}^3) = -2\text{X}^3, \quad \text{et} \quad f(\text{X}^4) = -3\text{X}^3$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. On écrit P dans la base canonique $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$. P est dans le noyau si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Après résolution du système, on obtient $a = c = d = e = f = 0$, et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X)$$
4. D'après le théorème du rang (on est en dimension finie), on a
$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_4[X]) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = 5 - 1 = 4$$
D'après la matrice de f dans la base canonique, on a
$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(1, -X^2, -2X^3, -3X^4) = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^3, X^4)$$

Exercice 203 (Endomorphisme et matrice)**.** — On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et les vecteurs

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$. On note enfin f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Donner une base de l'image et du noyau de f.

Solution.

1. Remarquons que le cardinal de $\mathscr{B}'$ vaut 3, la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il suffit donc montrer que $\mathscr{B}'$ est libre pour conclure. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ trois réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Après résolution du système, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre, de bon cardinal.
   Bilan : $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Il faut effectuer un changement de base. Il faut donc écrire tout d'abord $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage

de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Ce qui donne rapidement

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ est donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, d'après la formule de passage

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

soit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. D'après la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit :
   - En écrivant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}'$, $X \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $a = b = 0$. Ce qui donne donc, puisqu'on est dans la base $\mathscr{B}'$:
   $$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(f_3)$$
   - Toujours en utilisant la base $\mathscr{B}'$, on a
   $$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f_1, 2f_2) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$
   et (f_1, f_2) est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ car elle est libre.

Exercice 204 (Projecteur)**.** — Soient $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -x+2y-2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$. Soient $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?
3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$. f est-elle surjective ?
4. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
5. Déterminer alors une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. Prouver que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\,(f)$.
7. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{Im}\,(f)$, $f(u) = u$. Montrer alors que pour tout $(u, v) \in \mathrm{Im}\,(f) \times \mathrm{Ker}(f)$, $f(u+v) = u$.
8. En déduire alors que $f \circ f = f$. On dit que f est le projecteur, sur $\mathrm{Im}\,(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 205. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3x+y-z \\ -x+5y-3z \\ 4y-2z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice B de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.

Solution.

1. Méthode classique. On obtient comme matrice dans la base canonique
$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
2. (e_1, e_2, e_3) est de cardinal 3, celui de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. On prend (a, b, c) trois réels tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. Après résolution, on obtient $a = b = c = 0$, et donc la famille est libre. **Bilan** : $\mathscr{B}$ est une base.
3. Deux méthodes possibles :
   - Méthode 1 : formule de changement de base. On écrit $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son inverse vaut $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$
   et donc
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Méthode 2 : on écrit $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3 en résolvant des systèmes. On obtient
   $$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2e_2 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3$$
   et donc
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recherche

Exercice 206 (*)**.** — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0$.

Exercice 207. — On considère le système différentiel
$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x'(t) &= -7x(t) - 9y(t) \\ y'(t) &= 6x(t) + 8y(t) \end{cases}$$
On pose $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Montrer que $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
2. On note f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer $f(u)$ et $f(v)$. En déduire la matrice D de f dans la base (u, v).
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v). Démontrer que

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY \text{ où } Y = P^{-1}X$$

4. Résoudre $Y' = DY$, et en déduire les solutions du système (S).

CHAPITRE 14

DÉRIVABILITÉ

Résumé

Dans ce chapitre, on (re)définit rigoureusement la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. On utilise ensuite celle-ci pour l'étude de fonctions (variation), et pour obtenir de jolis résultats (théorème de Rolle, égalité et inégalités des accroissements finis).

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dérivabilité :
- Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement ..... □
- Savoir démontrer qu'une fonction est dérivable par produit, quotient, composée ..... □
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point ..... □

② Savoir utiliser les formules de dérivation :
- savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. ..... □
- savoir utiliser la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième d'un produit de fonctions ..... □
- savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque ..... □

③ Savoir utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point .... □

④ Concernant les applications :
- savoir utiliser le théorème de Rolle pour démontrer que la dérivée d'une fonction s'annule ..... □
- utiliser l'égalité des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis ..... □
- connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction ..... □

⑤ Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) ..... □

I. Dérivabilité en un point

1) Définition

Définition 196. — Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **dérivable** en x_0 si la fonction

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

appelée **taux d'accroissement** de f en x_0, admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 213. — En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Méthode 14.1.

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, on détermine le taux d'accroissement

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on cherche sa limite en x_0. Si la limite est finie et vaut a, la fonction f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = a$.

Exemple 236. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en 1.

Solution. Déterminer le taux d'accroissement :

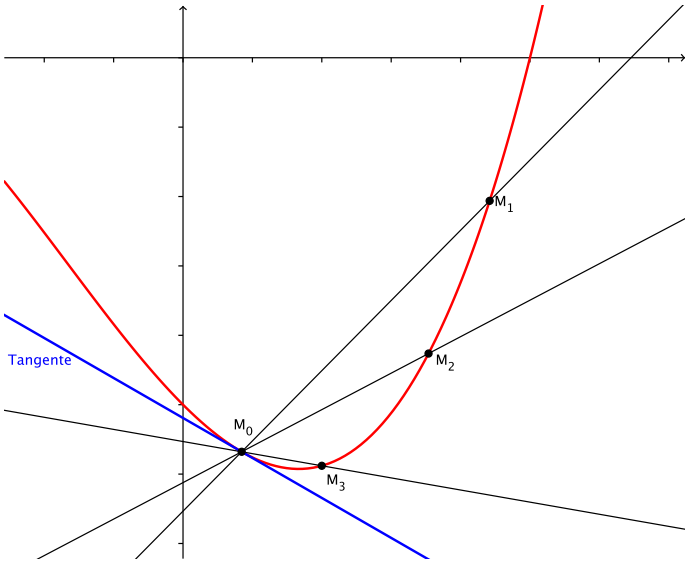
$$\tau_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow{x \to 1} 2$$

Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

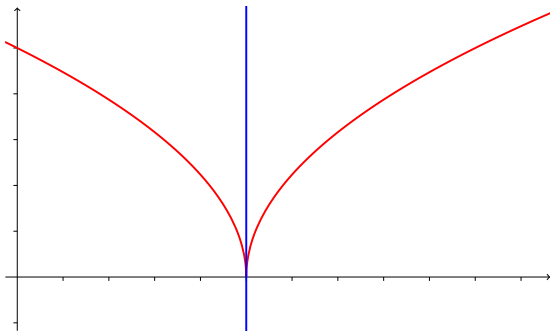
2) Interprétation géométrique

Si on note M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$, alors le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite (M_0M). Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, la famille de droites (M_0M) admet une position limite lorsque x tend vers x_0 : la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite est appelée **tangente** en M_0 à la courbe de f.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, la courbe de f possède en x_0 une **tangente verticale** au point M_0, d'équation $x = x_0$.



Remarque 214. — Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet donc une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple 237. — Puisque la fonction carrée est dérivable en $x_0 = 1$, alors sa courbe représentative admet au point $M_0(1,1)$ une tangente, d'équation $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

3) Développement limité d'ordre 1

Supposons la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable au point d'abscisse $x_0 \in I$. Alors, la fonction ε, définie par

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)}{x - x_0}$$

est bien définie au voisinage de x_0, et est de limite nulle.

Définition 197. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Alors, au voisinage de x_0, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où ε est de limite 0 en x_0.

Cette écriture est appelé **développement limité** à l'ordre 1 en x_0 de la fonction f. On le notera également

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$$

Remarque 215. — Si f est dérivable en x_0, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0. Réciproquement, si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de la forme

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec ε de limite nulle en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$.

Exemple 238. — La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ admet un développement limité en 1 et

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)\varepsilon(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) = \underbrace{2x-1}_{\text{eq. de la tangente}} + (x-1)\varepsilon(x)$$

4) Dérivabilité et continuité

La notion de dérivabilité en un point est plus forte que la continuité. En effet :

Théorème 14.1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Si f est dérivable en x_0, on peut donc écrire, au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0)$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f est bien continue en x_0. □

Remarque 216. — ⚠ Une fonction peut être continue en un point, sans être dérivable. Par exemple, la fonction racine est continue en 0. Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\tau_0(x) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$$

5) Dérivabilité à droite et à gauche

Puisqu'on dispose de limites à droite et à gauche, on peut également s'intéresser à la dérivabilité à droite et à gauche en un point.

Définition 198. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in I$ qui n'est pas à la frontière (*pour pouvoir parler de limite à droite et à gauche*).

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à droite* en x_0. Dans ce cas, on note

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à gauche*

en x_0. Dans ce cas, on note

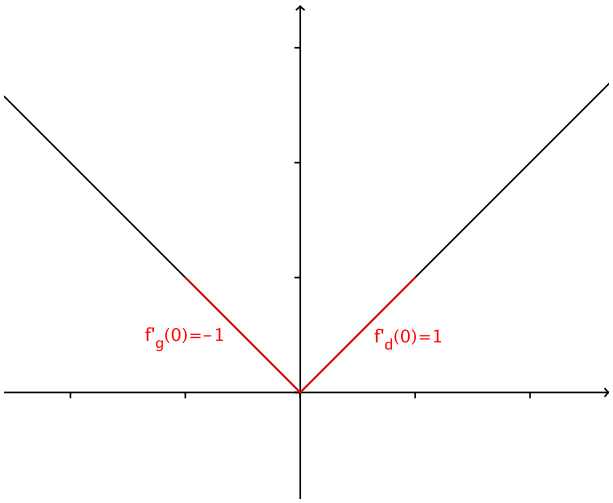
$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On dispose du même théorème que pour les limites :

Théorème 14.2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in I$ qui n'est pas à la frontière de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **et** $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque 217. — Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche en un point, sans que $f'_d(x_0)$ soit égal à $f'_g(x_0)$. Dans ce cas, la courbe admet des **demi-tangentes**. Par exemple, si $f : x \mapsto |x|$, f admet une dérivée à droite en 0 (qui vaut $f'_d(0) = 1$) et une dérivée à gauche en 0 (qui vaut $f'_g(0) = -1$)).



Les nombres dérivés à droite et à gauche étant distincts, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque 218. — Si la fonction f n'admet ni dérivée à droite ni à gauche en x_0, mais que

$$\lim_{x \to (x_0)^{-/+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = (+/-)\infty$$

alors la courbe de f admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0.

Exemple 239. — La fonction racine admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

6) Nombre dérivé et extremum

Théorème 14.3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ qui n'est pas à la frontière de I. On suppose que f est dérivable en x_0. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admette un maximum en x_0. Alors, sur un intervalle J autour de x_0, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$. Mais alors :

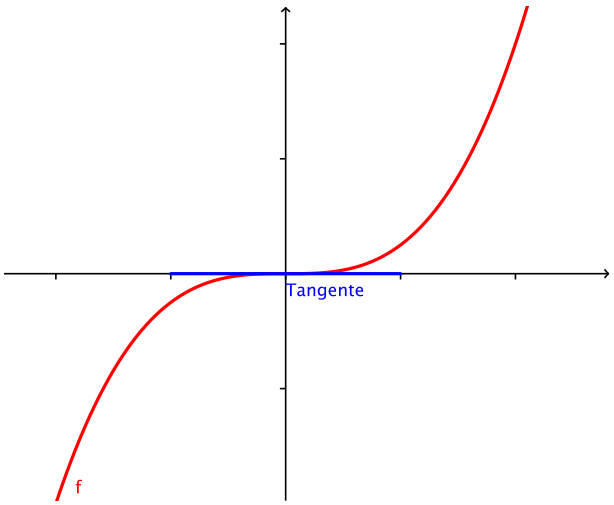
- Pour $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) \geqslant 0$.
- Pour $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) \leqslant 0$.

Et donc $f'(x_0) = 0$. □

Remarque 219. — Ainsi, si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local, alors la tangente y est **horizontale**.

Remarque 220. —

- ⚠ La réciproque n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas nécessairement que f admet un extremum local en x_0. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.



- ⚠ Le théorème précédent n'est valable que pour tout point en dehors de la frontière de I. Ainsi, une fonction peut admettre un extremum local sans pour autant que la dérivée en ce point soit nulle : dans ce cas, elle admet son extremum local en une borne de l'intervalle.

II. Dérivabilité sur un intervalle

1) Fonction dérivée

Définition 199. — Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est alors notée $f' : x \mapsto f'(x)$ ou $\frac{df}{dx} : x \mapsto \frac{df}{dx}(x)$.

Notation 11. — On dit que f est de classe $\mathscr{D}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I, et si sa **dérivée** f' est **continue** sur I.

2) Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 14.4.

On dispose des dérivées usuelles suivantes :

$\mathscr{D}_f$	$f(x)=$	dérivable sur	$f'(x)=$
$\mathbb{R}$	x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	x^n $(n<0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^{+*}$	x^α $(\alpha\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	a^x $(a>0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$[-1;1]$	$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1;1]$	$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\mathrm{th}^2(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$

Démonstration. Démontrons la première ligne du tableau. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f:x\mapsto x^n$. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Notons T le taux d'accroissement en x_0. On a donc

$$\mathrm{T}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

- Premier cas : $x_0=0$. Dans ce cas $\mathrm{T}(x)=x^{n-1}\xrightarrow{x\to x_0}0=n\times 0^{n-1}$.
- Deuxième cas : $x_0\neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\mathrm{T}(x)=\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1}$$

Il y a n termes dans la somme, et chaque terme tend vers x_0^{n-1} lorsque x tend vers x_0. Donc

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{T}(x)=n\times x_0^{n-1}$$

□

3) Opérations sur les dérivées

Théorème 14.5.

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

- $f+g$ et λf sont dérivables en x_0, et on a $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ et $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$ (*linéarité de la dérivation*)
- $f\times g$ est dérivable en x_0, et on a

$$(f\times g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

- Si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Remarque 221. — Ainsi, si f et g sont dérivables sur I, on a $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(f \times g)' = f'g + fg'$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. Montrons le deuxième point. Notons T le taux d'accroissement de $f \times g$ en x_0. On a donc

$$T(x) = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

et donc

$$T(x) = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Puisque f est dérivable en x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Puisque g est dérivable en x_0, g est continue en x_0. On a donc

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Par somme et produit des limites, on a donc

$$\lim_{x \to x_0} T(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Les autres se font de la même manière. □

Théorème 14.6.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$ (pour pouvoir composer les fonctions). Si f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Remarque 222. — Ainsi, si f et g sont dérivables respectivement sur I et J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et on a $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Remarque 223. — ⚠On fera attention à bien justifier la dérivabilité d'une fonction composée

Exemple 240. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Solution. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1; +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Proposition 14.7. Composées particulières

Soit u une fonction dérivable sur I.

- Pour tout entier $n > 0$, la fonction u^n est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est $(e^u)' = u'e^u$.
- $\cos(u)$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$.
- $\sin(u)$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\sin(u))' = u'\cos(u)$.
- Si u est strictement positive sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si u est strictement positive sur I, u^α est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^\alpha)' = \alpha u'u^{\alpha-1}$.
- Si u est strictement positive sur I, $\ln u$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple 241. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Solution. Puisque $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

4) Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 14.8.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une fonction bijective, et soit $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ sa fonction réciproque. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que f est dérivable en x_0.

- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et on a
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
- Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.

Méthode 14.2.

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en réel y_0 :

- On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$) et on montre que f est dérivable en x_0.
- On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$.

On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en y_0, et que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exercice 208. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1[$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer sa fonction dérivée.

Solution.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout réel x,
$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$
Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par composée,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) =]0;1[$.
2. Remarquons que
$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(2)} \text{ car x>0}$$
Or f est dérivable en $\sqrt{\ln(2)}$ et
$$f'\left(\sqrt{\ln(2)}\right) = -2\sqrt{\ln(2)}e^{-(\sqrt{\ln(2)})} = -2\sqrt{\ln(2)}e^{-\ln(2)} \neq 0$$
Ainsi, f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-2\sqrt{\ln(2)}e^{-\ln(2)}}$$
3. Soit $y \in]0;1[$. De la même manière,
$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x^2} = y \Leftrightarrow -x^2 = \ln(y) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(y)}$$
(qui a bien un sens car $y \in]0;1[$ donc $-\ln(y) > 0$). Or, f est dérivable en $\sqrt{-\ln(y)}$ et
$$f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right) = -2\sqrt{-\ln(y)}e^{-(\sqrt{-\ln(y)})} = -2\sqrt{-\ln(y)}e^{\ln(y)} = -2y\sqrt{-\ln(y)} \neq 0$$
Donc f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et
$$f'(y) = \frac{1}{f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right)} = \frac{1}{-2y\sqrt{-\ln(y)}}$$

Remarque 224. —

- Dans l'exercice précédent, on a en réalité montré que
$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{-\ln(y)}$$
Ainsi $f^{-1} :]0;1[\to \mathbb{R}$ est définie par,
$$\forall\ y \in]0;1[,\ f^{-1}(y) = \sqrt{-\ln(y)}$$
On peut donc remarquer que f^{-1} est bien dérivable sur $]0;1[$ par composée, et
$$(f^{-1})'(y) = \frac{-\frac{1}{y}}{2\sqrt{-\ln(y)}}$$
- Si la dérivée f' ne s'annule jamais, la fonction f^{-1} est donc toujours dérivable. Dans l'exercice précédent, f' était toujours strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Théorème 14.9.

Soit I un intervalle, et $x_0 \in$ I. Soit f : I $\to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I$\backslash\{x_0\}$.
- f' admet une limite finie l lorsque x tend vers x_0.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a $f'(x_0) = l$.

Remarque 225. — Ce théorème est très fort, puisqu'il permet de conclure que f est dérivable en x_0 sans avoir à étudier la dérivabilité en tant que telle. Il suffit d'étudier la limite de la dérivée.

Méthode 14.3.

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est de classe $\mathscr{C}^1$, on utilisera très souvent le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$:

- on montre que f est continue sur I.
- on montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I sauf en un (ou plusieurs) points.
- on montre que f' admet des limites finies aux points où elle n'apparait pas dérivable.

On conclut alors qu'elle est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exemple 242. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. f est bien continue sur $\mathbb{R}$. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de deux fonctions continues), et par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée pour tout $x \neq 0$ par

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}^*$: f est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin, en posant $\mathrm{X} = \frac{1}{x^2}$, on a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} 2\mathrm{X}^{3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = 0$$

par croissance comparée.
Bilan : d'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(0) = 0$.

6) Dérivées successives

Définition 200. — Soit I un intervalle.

- On dit que f est **deux fois dérivables** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est ***n* fois dérivables** ($n \geqslant 1$) si, pour tout entier $p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 201. — Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable, et si pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est continue.

Remarque 226. — D'après un théorème précédent, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$, il suffit de montrer que f est n fois dérivable, et que sa dérivée n-ième est continue.

Définition 202. — Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable, et si toutes ses dérivées sont continues.

Remarque 227. — Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, ln, polynômes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

7) Formule de Leibniz

On dispose d'une formule agréable pour dériver n fois le produit de deux fonctions dérivables n fois :

Théorème 14.10. Formule de Leibniz

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f, g deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors $f \times g$ est également n fois dérivable, et on a

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. Cette formule se démontre facilement par récurrence, et rappelle la démonstration de la formule du binôme de Newton. □

Exemple 243. — Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Posons $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \mapsto 2x$, $u^{(2)} : x \mapsto 2$ et pour $k \geqslant 3$, $u^{(k)} : x \mapsto 0$. f est donc $\mathscr{C}^\infty$ et d'après la formule de Leibniz, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)} : x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0} u(x) v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) v^{(n-2)}(x) + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)}_{=0} \\
&= x^2 (-1)^n \mathrm{e}^{-x} + n 2x (-1)^{n-1} \mathrm{e}^{-x} + \frac{n(n-1)}{2} 2 (-1)^{n-2} \mathrm{e}^{-x} \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right)
\end{aligned}$$

résultat encore valable pour $n = 0, 1$ et 2.
Bilan : pour tout entier n, et pour tout réel x :

$$f'(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x} \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right)$$

III. Application de la dérivation

1) Dérivée nulle sur un intervalle

Théorème 14.11.

Soit I un intervalle fermé, ouvert, ou semi-ouvert de bornes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et dérivable sur $]a;b[$. Alors

$$f \text{ est constante sur I} \Leftrightarrow \forall\, x \in]a;b[,\ f'(x) = 0$$

Remarque 228. — ⚠ Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux! Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = -\pi$ sur $]-\infty;0[$, et $f(x) = \sqrt{2}$ si $x > 0$, alors f vérifie les conditions de l'hypothèse, sans pour autant que f soit constante.

Conséquence 10. — Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$. On suppose que $f(a) = g(a)$. Alors

$$f' = g' \text{ sur I} \Leftrightarrow f = g \text{ sur I}$$

2) Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis

Théorème 14.12. Théorème de Rolle

Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Soit la fonction f est constante sur $[a;b]$, et dans ce cas, n'importe quel réel $c \in]a;b[$ convient. Soit f n'est pas constante. f étant continue sur $[a;b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, et un de ces extrema M n'est pas atteint en a et en b. Supposons que M soit un maximum, atteint en un réel $c \in]a;b[$. Notons alors g la fonction définie sur $]a;b[$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$f(c)$ étant le maximum, $f(x) - f(x)$ est toujours négatif. Puisque f est dérivable sur $]a;b[$, on a :

- Si $x > c$, $x - c > 0$ et donc $g(x) < 0$. En faisant tendre x vers c par valeurs positives, on en déduit

$$ă \lim_{x \to c^+} g(x) = f'(c) \leqslant 0$$

- De même, si $x < c$, $x - c < 0$ et donc $g(x) > 0$. En faisant tendre x vers c par valeurs négatives, on en déduit

$$ă \lim_{x \to c^-} g(x) = f'(c) \geqslant 0$$

Ainsi, $f'(c) = 0$. □

Théorème 14.13. Égalité des accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration. Notons g la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a}((f(b) - f(a))$$

g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. De plus, $g(a) = g(b) = f(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque 229. — L'égalité des accroissements finis signifie, géométriquement, que lorsqu'on se donne une corde tirée entre deux points de la courbe de f, il existe une tangente à la courbe de f située entre ces deux points qui est parallèle à la sécante.

Remarque 230. — Physiquement, on peut interpréter en cinétique. En effet, l'égalité des accroissements finis indique que si un objet dispose lors d'un trajet d'une vitesse moyenne v, il existe un instant t en lequel la vitesse instantanée vaut v.

3) Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 14.14.

Soit I un intervalle de bornes a et b. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $]a;b[$.

- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si pour tout x de $]a;b[$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$)).
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive sur $]a;b[$ (resp. strictement négative) **sauf éventuellement en un nombre fini de réels** où f' s'annule.

Exemple 244. — L'exemple classique est celui de la fonction cube : soit $f : x \mapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$. f' est strictement positive sauf pour $x = 0$. D'après le théorème, la fonction f est tout de même strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 14.4.

Pour étudier les variations d'une fonction (quand ce n'est pas une fonction classique) :

- on justifie que la fonction est bien dérivable,
- on déterminer la dérivée de la fonction,
- on détermine le signe de la dérivée, avant de conclure.

Exemple 245. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 3$. Or, pour tout réel x, $f'(x) > 0$: ainsi la fonction f est strictement croissante.

4) Inégalité des accroissements finis

Théorème 14.15.

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que,

$$\forall\, x \in]a;b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$$

Alors on a

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \mathrm{M}$$

Démonstration. Démontrons l'une des inégalités, par exemple $f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$. Pour cela, on introduit la fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$, définie pour tout x de $[a;b]$ par $g(x) = f(b)-f(x)-M(b-x)$. g est dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables, et on a

$$\forall\ x \in]a;b[,\ g'(x) = -f'(x) + M \geqslant 0$$

Donc g est croissante sur $[a;b]$. Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$, $g(x) \leqslant g(b) = 0$. On a donc bien, en particuler $g(a) \leqslant 0$. □

Conséquence 11. — Soit f est une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall\ x \in I,\ |f'(x)| \leqslant C$$

Alors

$$\forall\ (a,b) \in I^2,\ \ |f(b) - f(a)| \leqslant C|b-a|$$

Méthode 14.5.

L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir des inégalités intéressantes, en introduisant la bonne fonction.

Exemple 246. — Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [n;n+1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \in [n;n+1]$ par $f(x) = \ln(x)$. Alors f est dérivable sur $[n;n+1]$, et on a

$$\frac{1}{n+1} \leqslant f'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}$$

5) Nombre dérivé et extrema locaux

Nous avons vu que si $f'(x) = 0$, cela n'implique pas forcément qu'il y ait un extremum local en x. On dispose cependant du théorème suivant :

Théorème 14.16.

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in I$. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

Exemple 247. — Dans le cas de la fonction cube, $f'(0) = 0$ mais la dérivée reste positive.

IV. Exercices bilans

Exercice 209. — On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = e \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, (u_n) existe.
2. Ecrire une fonction Scilab qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Etablir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.
5. Montrer que, pour $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ peut s'écrire
$$\forall\ x>0,\ \ f'(x)=\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ que l'on admettra, montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et déterminer $f'(0)$.
7. Etablir que
$$\forall\ x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f(x)\leqslant x \text{ et } (x+1)\ln(x+1)\geqslant x+1$$
En déduire que
$$\forall\ x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x)\geqslant 0$$
8. Démontrer que
$$\forall\ n,\ \mathrm{e}-1\leqslant u_n$$
9. Etablir que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Solution.

1. Pour tout réel $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>\ln(1)=0$ par stricte croissance de la fonction ln. Par quotient, $f(x)>0$ si $x>0$. Ainsi, on a $f(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$.
   Montrons alors, par récurrence, la proposition P définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n>0$".
   - Pour $n=0$, u_0 est bien défini, et $u_0=\mathrm{e}>0$. P_0 est donc vraie.
   - Supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n>0$. Mais alors, d'après ce qui précède, $f(u_n)$ existe (car $u_n>0$) et $f(u_n)>0$ puisque la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1}>0$: P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien définie.
2. La suite étant définie par une relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut utiliser une boucle *for* pour calculer u_N.

Programme Scilab 3 : Calcul d'un terme d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 10/02/2016
// Résumé : calcul de u_N dans le cas d'une suite u_(n+1)=f(u_n)
//          avec f:x -> x/ln(1+x)

// Rang voulu :
N = 5

// Valeur de u_0 :
U = exp(1)

// Boucle pour calculer u_N
for i=1:N
    U = U / log(1+U) // Rappel : la fonction ln s'écrit log en Scilab
end

// Affichage de la valeur de u_N
disp("U = ", U)
```

3.

4.

5.

6.

7. Si $x \geqslant e-1$, alors $1+x \geqslant e$ et donc, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \geqslant \ln(e) = 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$, et puisque $x > 0$,

$$f(x) \leqslant x$$

Enfin, puisque $\ln(x+1) \geqslant 1$ et que $x+1 > 0$, par produit

$$(x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que, si $x \geqslant e-1$,

$$(x+1)\ln(x+1) - x \geqslant 1 > 0$$

Puisque $x^2(x+1) > 0$, par quotient :

$$\forall\ x \geqslant e-1,\ f'(x) > 0$$

8. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n \geqslant e-1$".
   - Pour $n = 0$, $u_0 = e \geqslant e-1$. Donc P_0 est vraie.
   - Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant e-1$. D'après la question précédente, puisque $f'(x) \geqslant 0$ sur $[e-1;+\infty[$, f est croissante sur $[e-1;+\infty[$. Ainsi,
   $$f(e-1) \leqslant f(u_n)$$
   c'est-à-dire $f(e-1) \leqslant u_{n+1}$. Or, $f(e-1) = e-1$. Donc $e-1 \leqslant u_{n+1}$ et P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien minorée par $e-1$.
9. Pour tout entier n, $u_n \geqslant e-1$. D'après la question 7, on a alors

$$f(u_n) \leqslant u_n$$

puisque $f(x) \leqslant x$ si $x \geqslant e-1$. On obtient donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante, et puisqu'elle minorée (question précédente), elle converge.
Notons l sa limite. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du point fixe, l est un point fixe de f, et puisque 0 n'est pas un point fixe (car $f(0) = 1$), l vérifie donc

$$\frac{l}{\ln(l+1)} = l$$

soit $\frac{1}{\ln(l+1)} = 1$ (car $l \neq 0$), c'est-à-dire $l = e-1$.
Bilan : la suite (u_n) converge vers $e-1$.

fFileExiststex/Chap14/Exo14

Exercices

Dérivabilité

Exercice 210. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$, et $f(x) = \mathrm{e}^x$ si $x < 0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas 3 fois dérivable.

Solution. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme polynôme et fonction exponentielle. La difficulté se trouve en 0.

- **Continuité** : on constate que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$. Les deux limites étant égales, et valant $f(0)$, la fonction f est continue en 0, et donc f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
- **Caractère $\mathscr{C}^1$** : pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = 1 + x$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$. On constate alors que
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 + x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et f' admettant une limite finie en 0, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(0) = 1$.
- **Caractère $\mathscr{C}^2$** : pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f''(x) = 1$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x$. On constate alors que
$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f' étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et f'' admettant une limite finie en 0, f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $f''(0) = 1$.
- **Dérivée troisième** : étant dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, montrons qu'elle n'est pas dérivable en 0 en déterminant les dérivées à droite et à gauche :
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
Ainsi, $f_d^{(3)}(0) = 1$ et $f_g^{(3)}(0) = 0$: $f^{(2)}$ n'est donc pas dérivable en 0, et donc f n'est pas trois fois dérivables en 0.

⚠ On constate que $f^{(3)}(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f^{(3)}(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x > 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(3)}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(3)}(x) = 1$ qui sont des limites différentes. Mais en faisant cela, on ne montre pas que f n'est pas trois fois dérivables en 0. On montre simplement que la dérivée troisième n'est pas continue en 0, alors que $f^{(3)}(0)$ pourrait tout de même exister.

Exercice 211. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et montrer que pour tout $x \neq -1$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Solution. Vu l'énoncé, on va procéder par récurrence. Soit P_n la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par P_n : "f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et pour tout $x \neq -1$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$".

- Pour $n = 1$, f est bien dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et pour tout réel x,
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

qui est une fonction continue sur $\mathscr{D}_f$. Donc f est $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$: P_1 est vraie.

- Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^n$ et pour tout $x \neq -1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\forall\, x \neq -1,\ f^{(n+1)}(x) = -(n+1)\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+2}}$$

Cette fonction étant continue sur $\mathscr{D}_f$, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et pour tout $x \neq -1$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Accroissements finis

Exercice 212. — Soit k un entier $k \geqslant 2$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1;k]$ à la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{x}$, démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Solution. La fonction f est dérivable sur $[k-1;k]$ $(k \geqslant 2)$ et pour tout réel $x \in [k-1;k]$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Puisque f' est décroissante sur $[k-1;k]$, on a, pour tout réel x,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k^2}(k-(k-1)) \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}(k-(k-1))$$

soit

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

En additionnant ces inégalités pour k entre 2 et n (avec $n \geqslant 2$) :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(k-1) = f(n) - f(1) \text{ par téléscopage}$$

Puisque $f(n) \leqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$, on a enfin

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant -f(1) = 1$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$$

Ainsi, la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée. De plus, elle est croissante, car

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (S_n) converge.

Remarque. — La limite de la suite (S_n) est $\frac{\pi^2}{6}$, mais la démonstration est difficile.

Etude de fonctions

Exercice 213. — Soit

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.

Solution.

1. Pour tout réel x, $e^x + 1 > 0$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

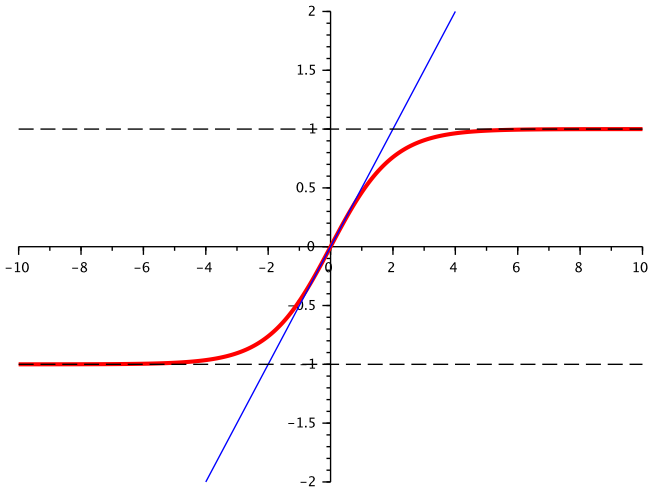
2. Pour tout réel x, $2e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$. Ainsi la dérivée f' est toujours strictement positive. De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	1



3.

Exercice 214. — Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et expliciter sa dérivée.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ (on pourra admettre que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2})$$
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Etudier la fonction g définie par $g(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$ sur $]-1;+\infty[$, et étudier ensuite l'existence de tangente horizontale pour f.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1;+\infty[$.
7. Déterminer la nature des branches asymptotiques de f en -1 et en $+\infty$, puis tracer la courbe de f.

Solution.

1. f est continue sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On constate alors que
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}1-\frac{\ln(1+x)}{x}=0$$
car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. Ainsi, puisque $f(0)=0$, f est continue en 0.
Bilan : f est bien continue sur $]-1;+\infty[$.
2. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a
$$\forall\, x\in]-1;0[\cup[0;+\infty[,\quad f'(x)=\frac{(1-\frac{1}{1+x})x-(x-\ln(1+x))1}{x^2}=\frac{-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}{x^2}$$

3. On souhaite montrer que f' admet une limite quand x tend vers 0. On utilise l'indication en écrivant

$$\forall\, x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[,\ f'(x)=\frac{-\frac{x}{x+1}+x-x+\ln(x+1)}{x^2}=\frac{-\frac{x}{x+1}+x}{x^2}+\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$, par somme,

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\frac{1}{2}$$

Ainsi, f est continue sur $]-1;+\infty[$, dérivable sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ et f' admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et $f'(0)=\frac{1}{2}$.

4. f étant dérivable en 0, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est donnée par

$$T_0 : y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{2}x$$

5. Remarquons déjà que

$$f'(x)=\frac{-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}{x^2}=\frac{-x+(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{g(x)}{x^2(x+1)}$$

Donc f' s'annule sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ si et seulement si g s'annule, et f' est du signe de g sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et

$$\forall\, x\in]-1;+\infty[,\ \ g'(x)=\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}-1=\ln(1+x)$$

Ainsi $g'(x)=0$ si et seulement si $1+x=1$, -c'est-à-dire si et seulement si $x=0$ qui n'appartient pas à $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. De plus, en $x=0$, $f'(0)\neq 0$.
Bilan : la courbe de f n'admet pas de tangente horizontale.
De plus, $g'(x)>0\Leftrightarrow\ln(1+x)>0\Leftrightarrow 1+x>1\Leftrightarrow x>0$ ce qui nous donne le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

6. D'après l'étude précédente, f' est du signe de g sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. D'après les variations de g, g admet un minimum atteint en 0, et valant 0. Ainsi, g est strictement positive sur $]-1;+\infty[$ exceptée en 0, donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\ln(1+x)=-\infty$ donc par somme et quotient,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$$

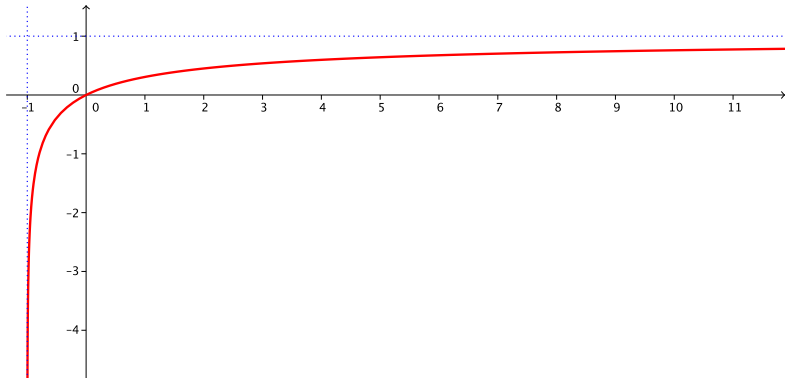
Enfin, pour $x>0$,

$$f(x)=\frac{x-\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x}=1-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	‖	↗	1
	$-\infty$		

7. En -1, la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$. En $+\infty$, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$. On obtient alors la courbe suivante :



Exercice 215. — Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les branches asymptotiques.

Solution.

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \neq 0$:
$$f(-x) = (-x)\mathrm{e}^{-\frac{3}{|-x|}} = -x\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} = -f(x)$$
en utilisant la parité de la fonction valeur absolue.
Bilan : la fonction f est impaire.
2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues (exponentielle, inverse et valeur absolue) dont le dénominateur du quotient ne s'annule pas. Constatons enfin que $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{3}{|x|} = -\infty$, donc par composée, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} = 0$. Par produit,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$
La fonction f est donc également continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. ⚠– Attention à la valeur absolue ! On décomposera toujours $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Pour tout $x > 0$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}$ et pour tout $x < 0$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{3}{-x}} = x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}$.
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} + x\left(\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{x}} + x\left(-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{x}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

Déterminons la limite de f' quand x tend vers 0 :

- Pour $x>0$, posons $X=-\frac{3}{x}$. Alors,

$$\lim_{x\to 0^+} X=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} e^X=0 \text{ ainsi que } \lim_{X\to-\infty} Xe^X=0 \text{ (croissances comparées)}$$

Par composée,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{3}{x}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} -\frac{3}{x}e^{-\frac{3}{x}}=0$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

- De même, pour $x<0$, posons $X=\frac{3}{x}$. Alors,

$$\lim_{x\to 0^-} X=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} e^X=0 \text{ ainsi que } \lim_{X\to-\infty} Xe^X=0 \text{ (croissances comparées)}$$

Par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{3}{x}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x}e^{\frac{3}{x}}=0$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$.

Ainsi, les limites à droite et à gauche étant égales, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$.
Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée admet une limite finie en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0)=0$.

4. On a vu précédemment que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\left(1+\frac{3}{x}\right)e^{-\frac{x}{3}}$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, pour tout $x<0$, $f'(x)=\left(1-\frac{3}{x}\right)e^{\frac{x}{3}}$ qui est également strictement positif sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi, pour tout $x\neq 0$, $f'(x)>0$ et $f'(0)=0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, en posant $X=-\frac{3}{|x|}$

$$\lim_{x\to+\infty} X=\lim_{x\to-\infty} X=0 \text{ et } \lim_{X\to 0} e^x=1$$

donc par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{|x|}}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{3}{|x|}}=1$. Par produit, on en déduit donc que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		∞
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	∞

5. Puisque les limites en l'infini sont infinies, il faut étudier le comportement asymptotique. Or, pour tout $x\neq 0$, $\frac{f(x)}{x}=e^{-\frac{3}{|x|}}$. D'après les limites étudiées précédemment, on obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=1$$

On s'intéresse donc à $f(x)-x=x\left(e^{-\frac{3}{|x|}}-1\right)$.

- Pour $x>0$, on peut écrire

$$f(x)-x=x(e^{-\frac{3}{x}}-1)=\frac{e^{-\frac{3}{x}}-1}{-\frac{3}{x}}\times(-3)$$

En posant $X = -\frac{3}{x}$, on constate que $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$ (limite du cours). Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{3}{x}} - 1}{-\frac{3}{x}} = 1$$

et par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- De la même manière, pour $x < 0$, on peut écrire

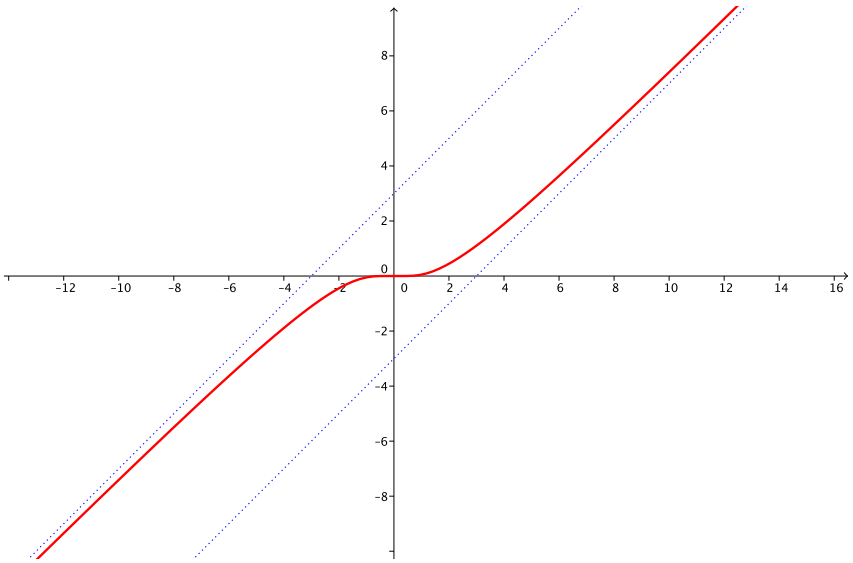
$$f(x) - x = x\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right) = \frac{e^{\frac{3}{x}} - 1}{\frac{3}{x}} \times 3$$

et par un même raisonnement

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

On obtient ainsi la courbe représentative suivante :



Sujets complets

Exercice 216. — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ ainsi que celle de $\frac{\varphi(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variation de φ.

6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

Solution.

1. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) = +\infty$ donc par somme,
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$$
On obtient alors, pour tout $x > 0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{1}{x} - x\ln(x)$, et par produit et somme
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = -\infty$$
Ainsi, la courbe de φ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.
2. φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions continues (ln et fonction carrée). De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$ donc
$$\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$$
La fonction φ est donc continue en 0.
Bilan : la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables (ln et fonction carrée). Pour tout réel $x > 0$, on a
$$\varphi'(x) = -2x\ln(x) - x^2 \times \frac{1}{x} = -x(2\ln(x)+1)$$
4. Déterminons le taux d'accroissement en 0 :
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \frac{1-x^2\ln(x)-1}{x} = -x\ln(x)$$
Par croissance comparée,
$$\lim_{x\to0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = 0$$
Bilan : la fonction φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0) = 0$. La courbe de la fonction φ admet donc une (demi) tangente horizontale au point d'abscisse 0.
5. On a démontré que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = -x(2\ln(x)+1)$. Pour tout $x > 0$, $-x < 0$ et
$$2\ln(x)+1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \text{ car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$
On obtient alors le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-x$		$-$		$-$	
$2\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	‖ 1	↗	$\varphi\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$	↘	$-\infty$

avec
$$\varphi\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2\mathrm{e}}$$
6. Sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$, φ admet un minimum local qui vaut $1 > 0$. L'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Sur $\left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$, φ est continue, strictement décroissante,et $\varphi\left(\left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[\right) = \left]-\infty;1+\frac{1}{2e}\right]$ et $0 \in \left]-\infty;1+\frac{1}{2e}\right]$ car $1+\frac{1}{2e} > 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$.
Bilan : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\varphi\left(\sqrt{2}\right) = 1-(\sqrt{2})^2\ln(\sqrt{2}) = 1-2\times\frac{1}{2}\ln(2) = 1-\ln(2) \approx 0,3$$

et

$$\varphi(2) = 1-2^2\ln(2) = 1-4\ln(2) \approx -1,8$$

On a donc $\varphi(\sqrt{2}) > \varphi(\alpha) > \varphi(2)$. Par stricte décroissance de φ, on en déduit que $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

Exercice 217. — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que
$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

Solution.

1. En mettant au même dénominateur,
$$\varphi(x) = \frac{x\ln(x) - x\ln(x+1) + 1}{x}$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, et par produit, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) - x\ln(x+1) + 1 = 1$. Et donc, par quotient,
$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = +\infty$$
Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 0$.
2. On peut écrire
$$\forall\ x > 0,\ \ \varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}$$
Posons $X = \frac{x}{x+1}$. On a
$$\lim_{x\to+\infty} X = 1 \text{ et } \lim_{X\to 1}\ln(X) = 0$$
Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ et par somme
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$$
Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote horizontale, d'équation $y = 0$, au voisinage de $+\infty$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et fonction inverse). On a
$$\forall\ x > 0,\ \ \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

Pour tout $x>0$, $x^2>0$ et $x+1>0$. Ainsi, par quotient,

$$\forall\ x>0,\ \varphi'(x)<0$$

La fonction φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. D'après ce qui précède, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		∞
$\varphi'(x)$	‖	$-$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

5. La fonction φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\varphi\left(]0;+\infty[\right)=]0;+\infty[$ et $1\in]0;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
On constate que

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+\frac{1}{1/3}=-\ln(3)-(\ln(4)-\ln(3))+3=3-2\ln(2)\approx 1,6>1$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{1/2}=-\ln(2)-(\ln(3)-\ln(2))+2=2-\ln(3)\approx 0,9<1$$

Ains, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)>\varphi(\alpha)>\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. Par stricte décroissance de φ, on en déduit que

$$\frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2}$$

Exercice 218. — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x)=2\ln\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2\approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$$

$$\text{avec } 0<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$$

Solution.

1. On constate que

$$\varphi(x)=2\ln(x)-2\ln(2)+\frac{1}{x}=\frac{2x\ln(x)-2x\ln(2)+1}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0$ donc par somme et produit, $\lim\limits_{x\to 0}2x\ln(x)-2x\ln(2)+1=1$. Et donc, par quotient,

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty$$

Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote verticale, d'équation $x=0$.

2. Puisque $\varphi(x) = 2\ln(x) - 2\ln(2) + \frac{1}{x}$, par somme et quotient,
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$
De plus,
$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} + \frac{1}{x^2}$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$. Par somme et quotient,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$$
Ainsi, la courbe représentative de la fonction φ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et fonction inverse). On a
$$\forall\ x>0,\ \varphi'(x) = 2\frac{1/2}{x/2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$$
4. $x^2 > 0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est du signe de $2x-1$. On obtient ainsi le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	$+\infty$

avec $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{1/2} = -4\ln(2) + 2 \approx -0,8$.
5. Sur $]0;\frac{1}{2}]$, φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, $\varphi(]0;\frac{1}{2}]) = [\varphi(1/2);+\infty[$ et $0 \in [\varphi(1/2);+\infty[$ car $\varphi(1/2) < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution, notée α sur $]0;\frac{1}{2}]$.
Sur $[\frac{1}{2};+\infty[$, φ est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus, $\varphi([\frac{1}{2};+\infty[) = [\varphi(1/2);+\infty[$ et $0 \in [\varphi(1/2);+\infty[$ car $\varphi(1/2) < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution, notée β sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.
Bilan : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$.

Exercice 219. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$$
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifier que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. On définit la fonction $g : [0;\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ par $\forall\ x \in [0;\frac{1}{2}]$, $g(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$. Montrer que g est bijective de $[0;\frac{1}{2}]$ dans un intervalle à considérer.
6. Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}
7. Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0;\sqrt{\frac{2}{e}}\right[$. Est-elle dérivable aux bornes ?
8. Tracer l'allure des fonctions g et g^{-1}.

Solution.

1. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ (fonctions usuelles). Par produit, f est continue

sur $\mathbb{R}^+$. De plus,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$$

2. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est donnée, pour tout $x > 0$, par

$$f'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x} + 2\sqrt{x}(-\mathrm{e}^{-x})$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall\, x > 0,\ f'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}}$$

Pour déterminer si f est dérivable en 0, on détermine le taux d'accroissement de f en 0, noté T_0 :

$$\forall\, x > 0,\ \mathrm{T}_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}}{x} = 2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Remarquons que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-x} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{x\to+0^+} \mathrm{T}_0(x) = +\infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, et la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.
Bilan : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

3. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} = 2\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Ainsi, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

4. On a vu que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$. Puisque $\sqrt{x} > 0$, et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	0

5. On constate que g est la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0;\frac{1}{2}\right]$. D'après l'étude précédente, g est continue sur I, strictement croissante sur I. D'après le théorème de la bijection, g établit une bijection de I sur $g(\mathrm{I}) = \left[0; f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[0;\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right]$.

6. Par théorème, g^{-1} est continue et de même variation de g. D'après le tableau de f, on obtient le tableau de variations suivant

x	0		$\sqrt{\frac{2}{e}}$
$g^{-1}(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$

7. Pour tout réel $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) \neq 0$. Par théorème, g^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0;\frac{1}{2}\right[\right) = \left]0;\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$.

- En $x=\sqrt{\frac{2}{e}}$, $g'\left(g^{-1}(x)\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. D'après un résultat du cours, g^{-1} n'est pas dérivable en $\sqrt{\frac{2}{e}}$ et la courbe de g^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse $x=\sqrt{\frac{2}{e}}$.
- En $x=0$, on a vu (question 2) que g n'est pas dérivable en 0 et que la courbe de g admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0. Par symétrie par rapport à l'axe $y=x$, la courbe de g va admettre une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
On peut le montrer, en calculant la limite du taux d'accroissement, et **cette méthode est à connaitre**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g^{-1}(x)}{x}$$

Posons $X=g^{-1}(x)$, et donc $x=g(X)$. Par continuité de g^{-1} (comme fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone) on a

$$\lim_{x\to 0} X=\lim_{x\to 0} g^{-1}(x)=g^{-1}(0)=0$$

et

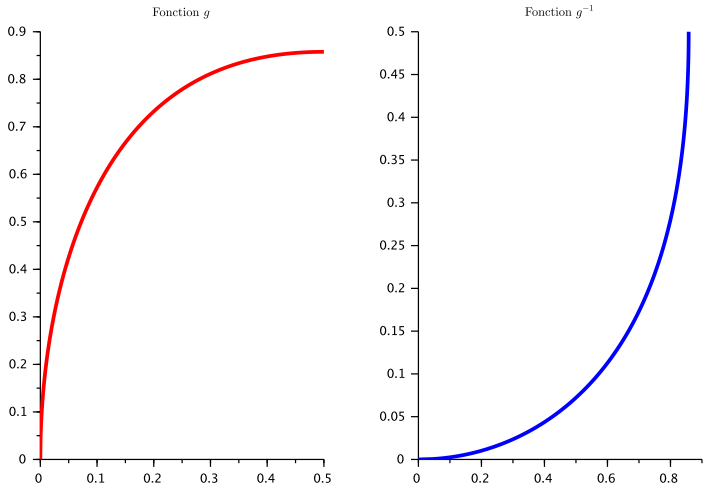
$$\lim_{X\to 0}\frac{X}{g(X)}=\lim_{X\to 0}\frac{1}{\frac{g(X)}{X}}=0$$

car $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{g(X)}{X}=+\infty$ (question 2). Par composée,

$$\lim_{x\to 0}\frac{g^{-1}(x)}{x}=0$$

Donc g^{-1} est dérivable en 0, et $(g^{-1})'(0)=0$.

- En regroupant tous les résultats précédents, on obtient les graphiques suivants :



CHAPITRE 15

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Résumé

Dans ce chapitre, on revient sur la notion d'intégrale sur un segment. Après un retour sur la définition, on verra différente méthodes de calcul pratiques (intégration par parties, changement de variable). On revient également sur la notion de primitive.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition de l'intégrale :
- dans le cas des fonctions positives ..... □
- dans le cas des fonctions en escalier ..... □

② Concernant les primitives :
- connaître les primitives usuelles ..... □
- savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation calssique ..... □
- connaître les opérations sur les primitives ..... □

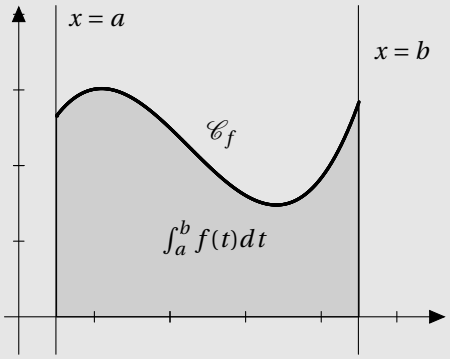
③ Connaître les différentes propriétés de l'intégrale :
- linéarité et relation de Chasles ..... □
- encadrement et inégalité de la moyenne ..... □
- positivité et croissance de l'intégrale ..... □
- fonction positive et intégrale nulle ..... □

④ Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :
- l'intégration par partie ..... □
- le changement de variable ..... □
- les fonctions définies par une intégrale ..... □

I. Intégrale sur un segment

1) Cas des fonctions positives

Définition 203. — Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



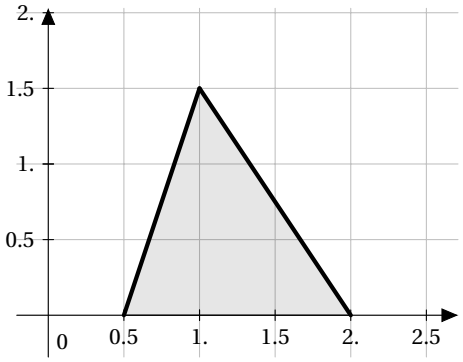
Remarque 232. — Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, t est une variable muette. Ainsi,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 248. — Si f est la fonction constante égale à 2, alors le domaine est un rectangle, et

$$\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times(4-2) = 4$$

Exercice 220. — Calculer $\int_{1/2}^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas suivant :



Solution. Le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1/2$ et $x=2$ est un triangle. Ainsi

$$\int_{1/2}^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1.5\times 1.5}{2} = 1.125 = \frac{9}{8}$$

2) Premières propriétés

On dispose des résultats suivants :

Proposition 15.1.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Alors

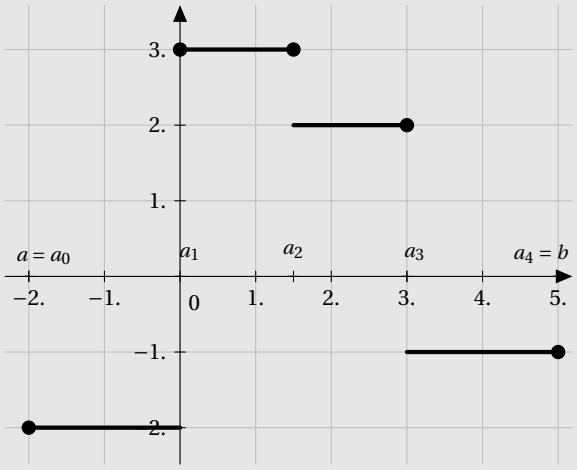
- $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Relation de Chasles : pour tout réel $c \in [a;b]$, on a

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Dans le premier cas, le domaine est vide, donc d'aire nulle. Dans le second cas, il suffit de voir que le domaine délimité par les droites $x = a$ et $x = b$ peut être coupé en deux domaines : celui délimité par $x = a$ et $x = c$, et celui délimité par $x = c$ et $x = b$. □

3) Cas des fonctions en escalier

Définition 204. — Une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est dites en escalier s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que f est constante sur les intervalles $]a_i; a_{i+1}[$.

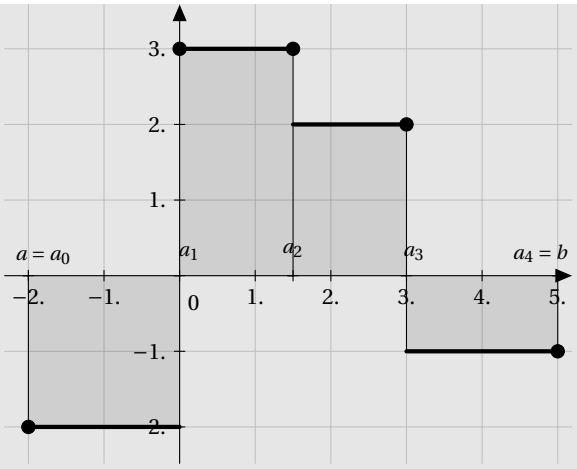


On note $\mathscr{E}([a;b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$, qui est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $[a;b]$.

Exemple 249. — Par exemple, la fonction partie entière est en escalier sur $[-1;2]$.

Définition 205. — Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision adaptée. On note c_i la valeur de f sur $]a_i; a_{i+1}[$. On définit l'intégrale de f de a à b le nombre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$$



Exemple 250. — En utilisant cette définition,

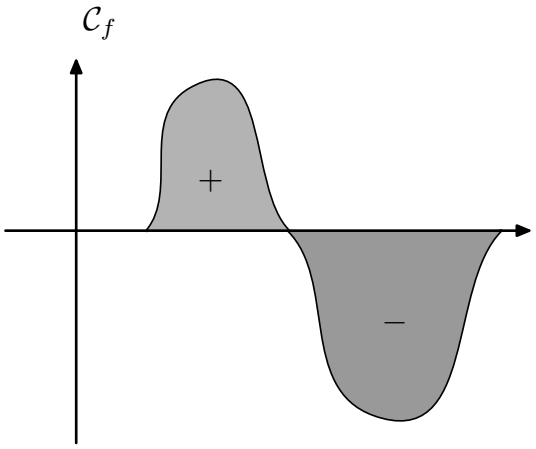
$$\int_{-1}^{2} [x]\,\mathrm{d}x = -1(0-(-1)) + 0(1-0) + 1(2-1) = 0$$

Remarque 233. — Dans le cas des fonctions en escalier, l'intégrale de f correspond donc à l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. L'aire est ainsi comptée positivement si f est positive, négativement sinon.

4) Cas général

On admettra que l'on peut généraliser la définition précédente à toutes les fonctions continue.

Définition 206. — Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de f de a à b, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, l'aire **algébrique** (ou aire **signée**) en unité d'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Remarque 234. — Par convention, si $a > b$, on notera

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

On conserve la propriété suivante :

Propriété 57. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, et $c \in [a;b]$. Alors* $\displaystyle\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

II. Propriétés générales

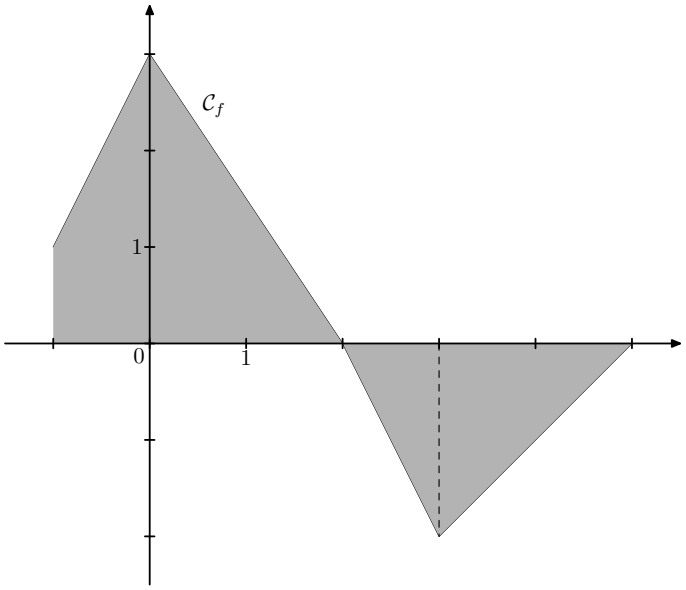
1) Relation de Chasles

Théorème 15.2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b, c trois réels quelconques de I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 251 (Calcul de l'intégrale d'une fonction affine par morceaux)**.** — Soit f la fonction donnée ci-dessous. Déterminer $\mathrm{I}(f) = \displaystyle\int_{-1}^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.



Solution. D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^5 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 2+3-1-2 = 2$$

Conséquence 12. —

- Si f est paire sur $[-a;a]$, alors
$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Si f est impaire sur $[-a;a]$, alors
$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2) Linéarité

Théorème 15.3.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit λ un réel quelconque, et soient a, b deux réels quelconques de l'intervalle I. Alors

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

III. Primitives

1) Définition

Définition 207. — Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I, avec F dérivable. Si $\mathrm{F}' = f$, on dit que F est une **primitive** de f sur l'intervalle I.

Exemple 252. —

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Alors f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto x^2$, mais également les fonctions $\mathrm{G} : x \mapsto x^2 + 1$, $\mathrm{H} : x \mapsto x^2 + l$, $\quad l \in \mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

2) Différentes primitives d'une fonction

Théorème 15.4.

Les seules primitives de la fonction nulle sur un intervalle I sont les fonctions constantes.

Démonstration. En effet, si $\mathrm{F}' = 0$ sur l'intervalle I, nous avons vu dans le chapitre sur la dérivation, que cela implique que F est constante. Réciproquement, les fonctions constantes ont une dérivée nulle. □

Conséquence 13. — Soit F une primitive d'une fonction f sur l'intervalle I. Alors toutes les primitives de f sur I s'écrivent $\mathrm{F} + \lambda$, avec λ constante réelle.

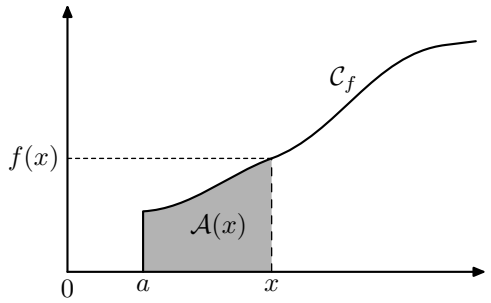
Démonstration. En effet, en notant F et G deux primitives de f sur I, on a $(\mathrm{F} - \mathrm{G})' = \mathrm{F}' - \mathrm{G}' = f - f = 0$. D'après le résultat précédent, $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est une fonction constante sur l'intervalle I, c'est à dire $\mathrm{F} = \mathrm{G} + \lambda$ avec λ constante réelle. □

3) Fonction continue et primitive

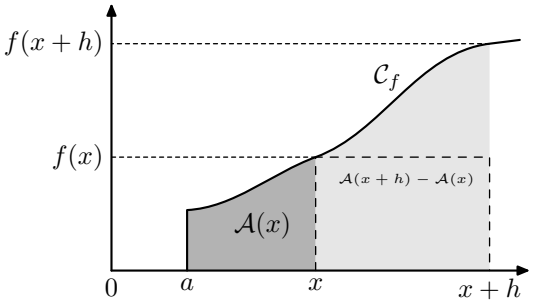
Théorème 15.5. Théorème fondamental de l'analyse

Une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I : la fonction $\mathscr{A} : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f nulle en x_0.

Démonstration. Démontrons, pour simplifier, le théorème dans le cas où f est une fonction croissante et positive. Soit f une fonction continue croissante sur $[a;b]$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Pour tout $x \in [a;b]$, on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, entre les abscisses a et x.



Cette fonction est bien définie sur $[a;b]$. On va montrer que $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[a;b]$, et que $\mathscr{A}' = f$.
Soit $h > 0$ et $x \in [a;b]$. Le nombre $\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)$ représente l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, et les abscisses x et $x+h$.



Puisque f est croissante, on peut encadrer cette aire par deux rectangles :

$$(x+h-x)f(x) \leqslant \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x) \leqslant (x+h-x)f(x+h)$$

donc

$$f(x) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Par continuité de f, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Par encadrement, on a donc

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc $\mathscr{A}$ est bien dérivable à droite en x, et $\mathscr{A}'_d(x) = f(x)$.
On montre de même que $\mathscr{A}$ est dérivable à gauche en x, et que $\mathscr{A}'_g(x) = f(x)$. Les dérivées à droite et à gauche de $\mathscr{A}$ étant égales, on en déduit que $\mathscr{A}$ est dérivable et que sa dérivée est f. □

On retiendra le résultat sous la forme suivante :

Théorème 15.6.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in$ I. La fonction

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Ainsi, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{F}' = f$.

Démonstration. Soit G une primitive de f sur I (qui existe parce qu'elle est continue). Alors, pour tout x de I,

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)$$

Donc $\mathrm{F}(x_0) = 0$, F est dérivable sur I et on a, pour tout x de I, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f, et puisque $\mathrm{F}(x_0) = 0$, c'est la primitive de f nulle en 0. □

Exemple 253. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer f'.

Solution. f est la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ (fonction continue sur $\mathbb{R}$) nulle en 0. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x,\ f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

4) Fonction primitive et condition initiale

Théorème 15.7.

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I, et y_0 un réel donné. Alors il existe une, et une seule, primitive F de f sur I telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.
En particulier, f admet une unique primitive s'annulant en un x_0 donné.

Démonstration. Soit F une primitive de f. Alors, la fonction G définie par $\mathrm{G} = \mathrm{F} - \mathrm{F}(x_0) + y_0$ est également une primitive de f, et $\mathrm{G}(x_0) = y_0$.
Si G et H sont deux primitives de f telles que $\mathrm{G}(x_0) = \mathrm{H}(x_0) = y_0$, alors, puisqu'on peut écrire $\mathrm{G} = \mathrm{H} + l$, on a $\mathrm{G}(x_0) = \mathrm{H}(x_0) + l = \mathrm{G}(x_0) + l$, donc $l = 0$ et $\mathrm{G} = \mathrm{H}$. □

Exemple 254. — La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $\mathrm{F}(1) = 0$.

5) Calcul intégral et primitive

Le résultat précédent permet de calculer une intégrale à l'aide des primitives :

Proposition 15.8.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. L'intégrale de a à b de la fonction f est égal au nombre réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Remarque 235. — Par convention de notation, on note $[\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, de sorte que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Exemple 255. — $\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On peut également prendre une autre primitive :

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 1\right]_1^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Remarque 236. — La définition de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, soient F et G deux

primitives de f. D'après un résultat précédent, il existe un réel λ tel que $G = F + \lambda$. Mais alors

$$G(b) - G(a) = (F(b) + \lambda) - (F(a) + \lambda) = F(b) - F(a)$$

IV. Recherche de primitives

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation, et les dérivées connues.

1) Fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto a$ (constante non nulle)	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n (n \geqslant 1)$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n > 1)$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1;1[$
$x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arccos(x)$	$]-1;1[$

2) Utilisation des formules de dérivation

On peut utiliser les formules suivantes :

Remarque 237. —

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})' \qquad \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)'$$

$$2u'u = (u^2)' \qquad u'u^n = \left(\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' \qquad u'u^\alpha = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' \ (\alpha \neq -1)$$

$$\frac{u'}{u} = (\ln|u|)' \qquad u'e^u = (e^u)'$$

Exemple 256. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer une primitive de f.

Solution. On pose $u(x) = \ln x$. Alors $f(x) = u'(x)u(x)$ et admet donc comme primitive $F : x \mapsto \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

3) Opération sur les primitives

Théorème 15.9.

Soient F et G deux primitives respectives des fonctions f et g sur un meme intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- λF est une primitive de λf sur I.
- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Démonstration. Assez immédiate : $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$ et $(F+G)' = F' + G' = f + g$ en exploitant la linéarité de la dérivation. □

V. Propriétés d'encadrement et valeur moyenne

1) Encadrement

Théorème 15.10.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient a, b deux réels quelconques de I.

- (**Positivité** de l'intégrale) Si $a \leqslant b$ et si, pour tout réel t de $[a;b]$, $f(t) \geqslant 0$, alors
$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$$
- (**Croissance** de l'intégrale) Si $a \leqslant b$ et si, pout tout réel t de $[a;b]$ $f(t) \leqslant g(t)$ alors
$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

Remarque 238. — ⚠ Il faut absolument que $a \leqslant b$!

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I.

- Si f est positive sur I, alors F est croissante sur I (puisque $F' = f$). Mais alors, si $a \leqslant b$,
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \geqslant 0 \text{ par croissance de F}$$

- Si $f \leqslant g$ sur I, alors $g-f \geqslant 0$ sur I. D'après le résultat précédent, $\displaystyle\int_a^b (g(t)-f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par linéarité, on obtient bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

□

2) Inégalité de la moyenne

Théorème 15.11. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient m et M deux réels, et a, b deux réels de l'intervalle I tels que $a \leqslant b$.
Si $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$ sur $[a;b]$ alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

Et si $a \neq b$:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}$$

Démonstration. Pour tout t dans $[a;b]$, on a $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$. D'après le théorème précédent, puisque $a \leqslant b$, on a alors

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_a^b m\,\mathrm{d}t = m(b-a)$ et $\int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}(b-a)$ (car les fonctions $t \mapsto \mathrm{M}$ et $t \mapsto m$ sont constantes sur $[a;b]$), ce qui donne le résultat.

On peut également le prouver à l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à F, une primitive de f. □

Exercice 221. — Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Prouver que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant f(n)$, puis en déduire que la suite (I_n) est convergente.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par dérivation :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = -2\frac{\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

Puisque sh est positive sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}^+$, et donc que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.
Soit n un entier. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle l'est sur $[n;n+1]$. Ainsi, pour tout réel $t \in [n;n+1]$, on a

$$f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a alors

$$f(n+1)(n+1-n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)(n+1-n)$$

soit

$$f(n+1) \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant f(n)$$

Constatons enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ par quotient.}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (I_n) converge, et que sa limite vaut 0.

Théorème 15.12. Inégalité triangulaire

Soient f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Théorème admis. □

3) Valeur moyenne d'une fonction

Définition 208. — Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a, b deux réels distincts de I. Le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.

Théorème 15.13.

Dans les conditions précédentes, il existe un réel c situé entre a et b, tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Puisqu'elle est continue, l'image du segment $[a;b]$ est un segment $[m;\mathrm{M}]$. Mais alors, pour tout x de $[a;b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M} \Leftrightarrow \int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t$$

Soit

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc compris entre m et M. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette valeur est atteinte en un réel $c \in [a;b]$. □

4) Fonctions positive et intégrale nulle

Proposition 15.14.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Si

$$\forall\ t \in [a;b], f(t) \geqslant 0 \text{ et } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a;b]$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha) > 0$. Par continuité de f, il existe un intervalle $\mathrm{J} =]\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon[$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \geqslant \frac{f(\alpha)}{2}$. Mais alors,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\mathrm{J}} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{f(\alpha)}{2} \times 2\varepsilon > 0$$

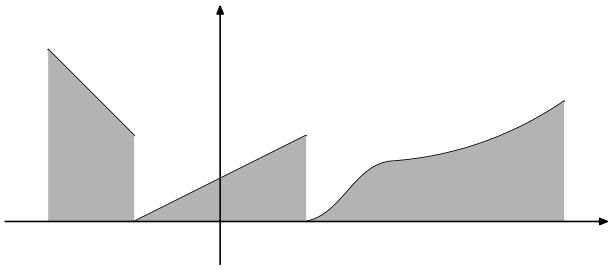
ce qui est absurde. □

5) Intégration d'une fonction continue par morceaux

Remarque 239. — Rappel : une fonction f est dite continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ sil existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à lintervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Définition 209. — Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, notons $\widehat{f_i}$ le prolongement par continuité de f_i sur l'intervalle $[a_i; a_{i+1}]$. On appelle alors intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widehat{f_i}(x)\,\mathrm{d}x$$



Remarque 240. — Ainsi, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on calcule l'intégrale sur chacun des intervalles $[a_i; a_{+1}]$ de la subdivision, puis on additionne les différentes valeurs.

VI. Méthode de calcul d'intégrales

1) Intégration par partie

Théorème 15.15.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. La fonction uv est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $uv' = uv - u'v$, et toutes ces fonctions sont continues sur I. On en déduit donc :

$$\int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, et puisque uv est une primitive de $(uv)'$, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Méthode 15.1.

Pour calculer une intégrale par intégration par partie, on détermine les fonctions u et v qui interviennent et on vérifie qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle considéré.

Exemple 257. — Calculer $\int_0^1 te^t\,dt$.

Solution. Pour tout $t \in [0;1]$, posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Alors, $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$. On a donc

$$\int_0^1 te^t\,dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1e^t\,dt = e - [e^t]_0^1 = 1$$

Exemple 258. — Calculer $\int_1^e \ln(x)\,dx$.

Solution. Puisque $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$, pour tout $t \in [1;e]$, on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$. On a donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$. Alors

$$\int_1^e \ln(t)\,dt = [t\ln(t)]_1^e - \int_1^e t\frac{1}{t}\,dt$$

et donc

$$\int_1^e \ln(t)\,dt = e - [t]_1^e = 1$$

Remarque 241. — Ainsi, une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

2) Changement de variable

L'idée du changement de variable est de se ramener à une intégrale que l'on sait calculer.

Théorème 15.16.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, et u une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$, telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx$$

Remarque 242. — Il faut donc reconnaitre une forme $f(u)u'$ pour pouvoir effectuer un changement de variable. On n'oubliera pas de remplacer également les bornes d'intégration.

Démonstration. Soit F une primitive de f, et $g = F \circ u$. g est C^1 sur $[\alpha;\beta]$ (puisque F et u sont C_1) et on a $g' = F'(u) \times u' = f(u)u'$. Donc g est une primitive de $f(u)u'$. Donc

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt = [g(t)]_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = [F(t)]_{u(\alpha)}^{u(\beta)} = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx$$

□

Exemple 259. — Calculer $I = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$ en posant $u = 1 - t^2$.

Solution. Pour tout $t \in [0;1]$, $u(t) = 1 - t^2$. u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Alors

$$I = \int_0^1 -\frac{1}{2}u'(t)\sqrt{u(t)}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Méthode 15.2.

Soit $I = \int_a^b f(t)\,dt$. Pour effectuer un changement de variable :

- On pose $x = u(t)$ où u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. On écrit alors $t = u^{-1}(x)$ puis $dt = (u^{-1})'(x)\,dx$.
- On s'occupe des bornes : lorsque $t = a$, $x = u(a)$ et lorsque $t = b$, $x = u(b)$.
- Enfin, on exprime $f(t)$ et dt uniquement avec x et dx.

On a alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} g(x)\,dx$, cette intégrale étant a priori plus simple à calculer.

Exemple 260. — Calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\,dt$ en effectuant le changement de variable $x = 1+e^t$.

Solution.

- La fonction $u : t \mapsto 1+e^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.
- $u(0) = 2$ et $u(1) = 1+e$.
- Puisque $x = 1+e^t$, alors $t = \ln(x-1)$. La fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ est dérivable sur $[2;1+e]$, et donc

$$dt = \frac{1}{x-1}\,dx$$

Ainsi,

$$I = \int_2^{e+1} \frac{\ln(u)}{1-e^{-\ln(u-1)}} \frac{du}{u-1} = \int_2^{e+1} \frac{\ln u}{u}\,du$$

Ainsi,

$$I = \left[\frac{1}{2}(\ln u)^2\right]_2^{e+1} = \frac{1}{2}\left((\ln(e+1))^2 - \ln(2)^2\right)$$

3) Fonctions définies par une intégrale

On peut être amené à étudier une fonction du type $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ ou $G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.

Méthode 15.3.

Pour étudier ce genre de fonctions :

- Dans le premier cas, on reconnait, après avoir étudié la continuité de f, la primitive de f nulle en x_0, que l'on étudiera en tant que telle.
- Dans le deuxième cas, on introduira systématiquement une primitive H de f si f est continue. Dans ce cas, $G(x) = H(v(x)) - H(u(x))$ et on étudiera ensuite (dérivation par exemple, si u et v sont dérivables).

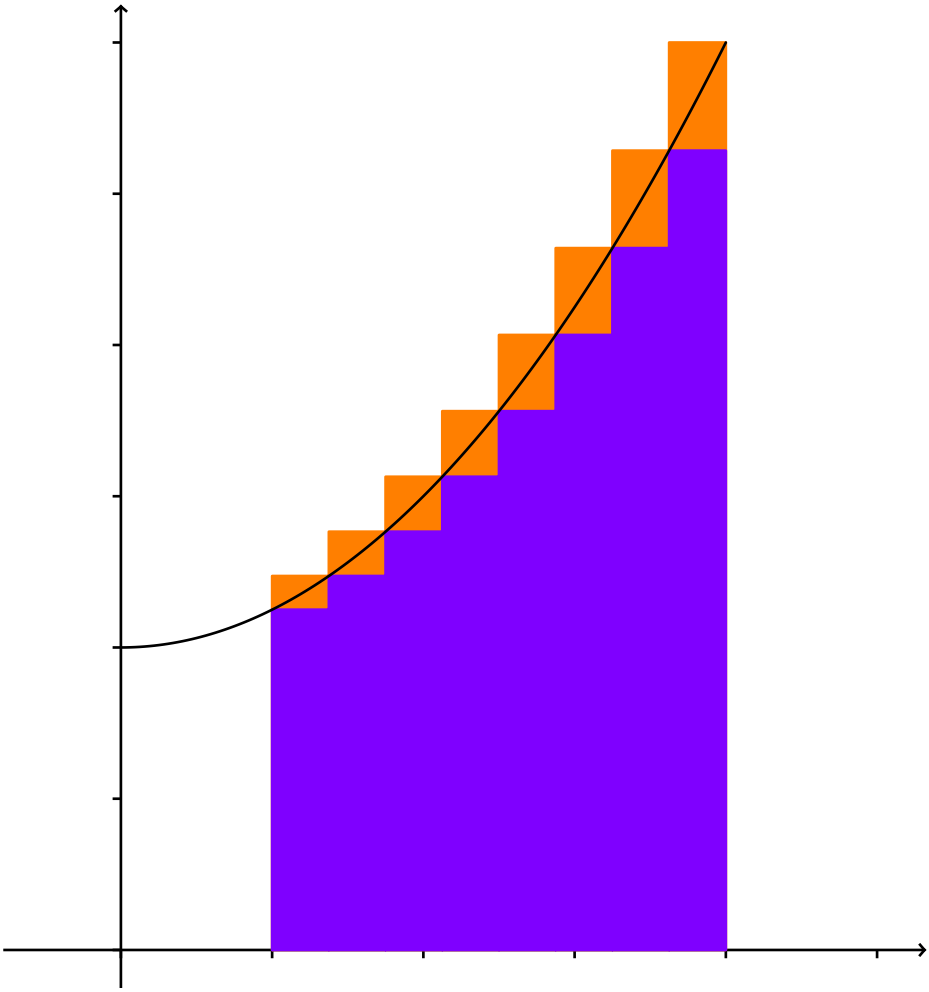
Exemple 261. — Soit $g : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\,dt$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer g'.

Solution. En notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x, $g(x) = F(2x) - F(x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque f est continue. On a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

4) Méthode des rectangles

Pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment, on peut utiliser la méthode des rectangles, qui consiste à calculer non pas l'aire sous la courbe, mais l'aire d'une somme de rectangles de largeur "petite".



Méthode 15.4.

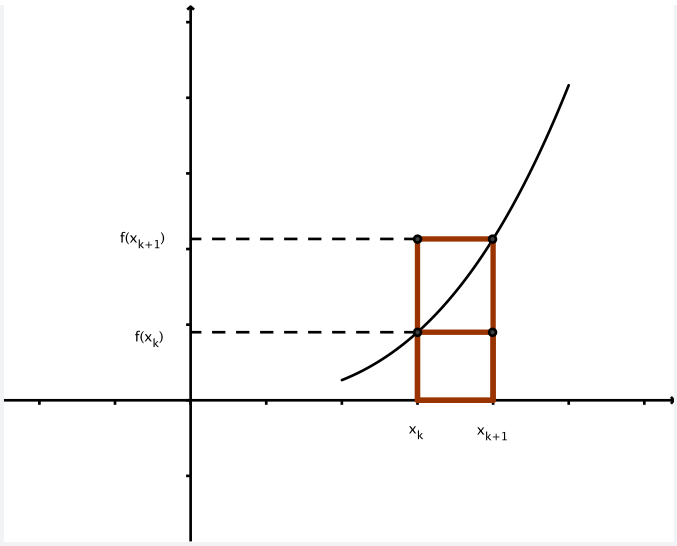
Méthode des rectangles Lorsqu'une fonction est croissante ou décroissante sur un segment I = $[a,b]$, on décompose I en subdivision de longueur $\frac{b-a}{n}$:

$$\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right], \left[a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}\right] \ldots, \left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right], \ldots \left[a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\right]$$

On calcule alors la somme des aires des rectangles "inférieurs" et "supérieurs" : pour l'intervalle

$$\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],$$

on prend le rectangle de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ (rectangle inférieur), ou $f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$.



Lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire obtenue, si la fonction est continue, tend vers l'intégrale de la fonction sur le segment.

Programme Scilab 4 : Méthode des rectangles

```
// Méthode des rectangles
// Auteur : Crouzet
// Date : 5 mai 2018

// On définit la fonction
function y=f(x)
  y=sqrt(1+x^2)
endfunction

// On détermine l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs
// Arguments :
//    a : borne inférieure du segment
//    b : borne supérieure du segment
//    n : nombre de subdivision
function [inf, sup]=rectangle(a,b,n)
  inf=0.0
  sup=0.0
  for i=0:n-1
        inf=inf+(b-a)/n*f(a+i*(b-a)/n)
        sup=sup+(b-a)/n*f(a+(i+1)*(b-a)/n)
  end;
endfunction

// Exemple : pour a=1, b=2, n=100
[inf,sup]=rectangle(1,2,100)
// Comparaison avec une valeur calculée par SciLab:
integrate('f(x)','x',1,2)
```

fFileExiststex/Chap15/Exo15

Exercices

Intégrales et primitives

Exercice 222 (Primitives)**.** — Montrer l'existence, puis calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A=\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx \quad B=\int_0^3 (2u+1)e^{u^2+u+1}\,du \quad C=\int_0^1 \frac{e^t+1}{e^t+t}\,dt \quad D=\int_e^{2e} \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)}}$$

$$E=\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx \quad F=\int_{-1}^1 |x^2-x|\,dx$$

Solution. L'idée de cet exercice est de trouver les primitives des fonctions sous le signe intégrale. On se ramènera aux primitives usuelles, ou aux formules de dérivations ($u'e^u$, $\frac{u'}{u}$, $\cdots$).
Remarquons tout d'abord que chaque intégrale existe car toutes les fonctions considérées sont continues sur les intervalles d'intégration.

$$A=\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^2=\frac{(\ln(2))^2}{2} \text{ en reconnaissant } \frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(x)=u'(x)u(x) \text{ avec } u(x)=\ln(x)$$

$$B=\int_0^3 (2u+1)e^{u^2+u+1}du=\left[e^{u^2+u+1}\right]_0^3=e^{13}-e \text{ en reconnaissant } v'(u)e^{v(u)} \text{ avec } v(u)=u^2+u+1$$

$$C=\int_0^1 \frac{e^1+1}{e^t+t}\,dt=\left[\ln\left|e^t+t\right|\right]_0^1=\ln(1+e) \text{ en reconnaissant } \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ avec } u(x)=e^t+t$$

$$D=\int_e^{2e} \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)}}=\left[2\sqrt{\ln(t)}\right]_e^{2e}=2\sqrt{\ln(2)+1}-2 \text{ en reconnaissant } \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} \text{ avec } u(t)=\ln(t)$$

Pour le E, on ne reconnait pas de primitives usuelles. On transforme alors l'écriture de l'intégrale :

$$E=\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx=\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx=\int_0^1 1-\frac{1}{x+1}\,dx=[x-\ln|x+1|]_0^1=1-\ln(2)$$

Méthode 15.5.

Dans le cas d'une intégrale avec une valeur absolue, il faut utiliser la relation de Chasles pour pouvoir enlever, suivant les intervalles considérés, les valeurs absolues.

Remarquons que $x^2-x=x(x-1)$ est positif sur $[-1;0]$ et est négatif sur $[0;1]$. Ainsi,

$$F=\int_{-1}^1 |x^2-x|\,dx=\int_{-1}^0 |x^2-x|\,dx+\int_0^1 |x^2-x|\,dx=\int_{-1}^0 x^2-x\,dx+\int_0^1 -(x^2-x)\,dx$$

en utilisant le fait que $|u|=u$ si $u\geqslant 0$, $|u|=-u$ sinon. Ainsi,

$$F=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1=1$$

Exercice 223 (IPP)**.** — Montrer l'existence, puis calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 te^t\,dt \quad B=\int_1^e v^2\ln(v)\,dv \quad C=\int_1^e x(\ln(x))^2\,dx \quad D=\int_0^1 u^3e^{u^2}\,du$$

Solution. Les quatre intégrales existent car les fonctions sous le signe intégrale sont bien continues sur l'intervalle considéré.

Méthode 15.6.

En règle générale, on essaiera de dériver la fonction ln et assimilée, et de prendre une primitive des fonctions exp et assimilées.

-
-
-
-

Exercice 224 (Changement de variable)**.** — Montrer l'existence, puis calculer chacunes des intégrales suivantes en utilisant le changement de variable donné :

$$A=\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx \quad (y=x^2) \qquad B=\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx \quad \left(y=\frac{x}{x+1}\right)$$

Solution. Pour A, on pose $y = x^2$, soit $x = \sqrt{y}$ qui sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$. Enfin, si $x = 1$ alors $y = 1$, et si $x = 2$ alors $y = 4$. Par changement de variables, on a ainsi

$$\mathrm{A} = \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{(y+1)(y+2)} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(y+1)(y+2)} dy$$

Par décomposition en éléments simples, on obtient que

$$\frac{1}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}$$

Ainsi

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} dy = \frac{1}{2}\left[\ln|y+1| - \ln|y+2|\right]_1^4 = \frac{1}{2}\left(\ln(5) - \ln(6) - (\ln(2) - \ln(3))\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5\times 3}{6\times 2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Pour B, on pose $y = \frac{x}{x+1}$. Ainsi, pour $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, on a

$$y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)y = x \Leftrightarrow x(y-1) = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{y-1} = \frac{y}{1-y}$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Ainsi,

$$dy = \frac{1(1-y) - y(-1)}{(1-y)^2} dy = \frac{1}{(1-y)^2} dy$$

Enfin, si $x = 1/2$, $y = \frac{1}{3}$ et si $x = 1$ alors $y = \frac{1}{2}$.
Par changement de variable,

$$\mathrm{B} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\frac{y}{1-y}\left(\frac{y}{1-y}+1\right)} \ln(y) \frac{1}{(1-y)^2} dy = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\frac{y}{(1-y)^2}} \ln(y) \frac{1}{(1-y)^2} dy = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(y)}{y} dy$$

Ainsi,

$$\mathrm{B} = \left[\frac{(\ln(y))^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{\ln(1/2)^2}{2} - \frac{\ln(1/3)^2}{2} = \frac{\ln(2)^2 - \ln(3)^2}{2}$$

Exercice 225. — Déterminer sur quel(s) intervalle(s) les fonctions suivantes possèdent des primitives, puis les déterminer

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad g(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad h(x) = \frac{2}{x(x+1)}$$

Solution.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et y est continue comme quotient de fonctions continues. Donc f admet des primitives sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. En constatant que

$$\forall\, x \neq -1,\ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

  Les primitives sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ s'écrivent

$$x \mapsto x - \ln|x+1| + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

  soit $x \mapsto x - \ln(x+1) + k$ sur $]-1;+\infty[$, et $x \mapsto x - \ln(-(x+1)) + k'$ sur $]-\infty;-1[$.
- Remarquons que $x \mapsto 1-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, et est positif sur $[-1;1]$. La fonction g est donc définie et continue sur $[-1;1]$ comme composée de fonctions continues. Elle y admet donc des primitives. En constatant que $g(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1-x^2$, on en déduit que les primitives de g s'écrivent

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2} + k = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} + k$$

- La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Elle admet donc des primitives sur $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$. En remarquant que
$$\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$$
on en déduit que les primitives de h sur chacun des intervalles s'écrivent
$$x \mapsto 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + k = \ln\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right) + k$$

Suites d'intégrales

Exercice 226. — Pour tout entier n, on pose
$$u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En déduire la valeur de u_0.
2. Calculer u_1.
3. Montrer que pour tout entier n,
$$u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$
En déduire u_2 et u_3.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0.
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout entier n, $u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire la limite de la suite u.

Solution. Remarquons déjà que, pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1-x^2}$ est définie et continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Toutes les intégrales considérées existent donc bien.

1. En mettant au même dénominateur,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x + (a+b)}{1-x^2}$$
Par identification des coefficients,
$$\begin{cases} a-b &= 0 \\ a+b &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$
Ainsi, pour tout x différent de -1 et 1,
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$
et donc
$$u_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\right]_0^{1/2}$$
soit
$$\boxed{u_0 = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3}\right)}$$
2.
$$u_1 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\ln(1-x^2)\right]_0^{1/2}$$
et donc
$$\boxed{u_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)}$$

3. Par linéarité de l'intégrale,

$$u_n - u_{n+2} = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+2}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{x^n - x^{n+2}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$u_n - u_{n+2} = \int_0^{1/2} \frac{x^n(1-x^2)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2}$$

et donc

$$\boxed{u_n - u_{n+2} = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}$$

Pour $n=0$, on obtient donc $u_0 - u_2 = \frac{1}{2}$, soit

$$u_2 = u_0 - \frac{1}{2} = \ln\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}$$

et pour $n=1$, il vient $u_1 - u_3 = \frac{1}{2^2\times 2}$, soit

$$u_3 = u_1 - \frac{1}{8} = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) - \frac{1}{8}$$

4. Pour déterminer la monotonie de la suite u, déterminons pour tout entier n le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1} - x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ par linéarité}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or, sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $1-x^2 > 0$. Ainsi, sur cet intervalle, $\dfrac{x^n(x-1)}{1-x^2} \leqslant 0$. Puisque $0 < \frac{1}{2}$, par positivité de l'intégrale, on en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Bilan : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite (u_n) est décroissante.

De plus, toujours sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $x^n \geqslant 0$ et $1-x^2 \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$: la suite (u_n) est bien positive.

5. Remarquons déjà qu'étant décroissante et minorée, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

> **Méthode 15.7.**
> Pour encadrer une intégrale, on encadre ce qui est dans l'intégrale, et on utilise la croissance de l'intégrale.

Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4}$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$. Soit

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 \geqslant \frac{3}{4}$$

Donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a

$$\frac{1}{1-x^2} \leqslant \frac{4}{3}$$

ainsi

$$\frac{x^n}{1-x^2} \leqslant \frac{4}{3}x^n \text{ car } x^n \geqslant 0$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant \frac{1}{3}$), on a alors

$$\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/2} \frac{4}{3}x^n\,\mathrm{d}x$$

et donc

$$u_n \leqslant \left[\frac{4}{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{4}{3}\frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$$

Par produit, et puisque $2 > 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)2^{n+1} = +\infty$$

et par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}} = 0$$

Or, pour tout entier n, nous avons $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et vaut 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 227. — Pour tout entier n, on note

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer la monotonie des suites I et J.
2. Montrer que pour tout n, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).
3. Par un intégration par parties, démontrer que pour tout n,

$$\mathrm{J}_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\mathrm{I}_{n+2}$$

En déduire la limite de (J_n) puis celle de $(n \times \mathrm{J}_n)$.

Solution. Les fonctions $x \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ et $x \mapsto t^n \ln(1+t^2)$ sont définies et continues sur $[0;1]$, donc toutes les intégrales considérées existent.

1. Pour tout entier n, et par linéarité de l'intégrale :

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, sur $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$, $t-1 \leqslant 0$ et $1+t^2 > 0$. Par quotient, $\frac{t^n(t-1)}{1+t^2} \leqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale ($0 < 1$), on a donc $\int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

$$\boxed{\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (\mathrm{I}_n) \text{ est décroissante.}}$$

De même,

$$\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \int_0^1 t^n(t-1)\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Puisque, sur $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$, $1+t^2 \geqslant 1$ donc $\ln(1+t^2) \geqslant 0$ et $t-1 \leqslant 0$. Par produit, $t^n(t-1)\ln(1+t^2) \leqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $\int_0^1 t^n(t-1)\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

$$\boxed{\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (\mathrm{J}_n) \text{ est décroissante}}$$

2. Pour tout $t \in [0;1]$ $t^n \geqslant 0$ et $1+t^2 \geqslant 0$. Par quotient, $\dfrac{t^n}{1+t^2} \geqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$$

De plus, pour tout $t \in [0;1]$ on a

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \text{ par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+$$

ainsi $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 \geqslant \frac{1}{1+t^2}$ et donc $t^n \geqslant \frac{t^n}{1+t^2}$ sur $[0;1]$ car $t^n \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, par théorème d'encadrement, (I_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

3. Partons de J_n et faisons une intégration par parties. On pose, pour $t \in [0;1]$, $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = t^n$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et, par intégration par parties,

$$J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

soit

$$J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \int_0^1 \frac{2}{n+1}\frac{t^{n+2}}{1+t^2}\,dt = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$ d'après la question précédente. Par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

De plus,

$$nJ_n = \frac{n\ln(2)}{n+1} - \frac{2n}{n+1}I_{n+2}$$

Puisque, par la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{n+1} = \ln(2) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \ln(2)}$$

> **Remarque.** — Ainsi (J_n) est équivalente à $\frac{\ln(2)}{n}$, soit $J_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 228. — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que la fonction g est impaire.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$
4. Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

Solution.

1. **Méthode 15.8.**
Pour une fonction définie par une intégrale, la parité se fera (presque) toujours par le changement de variable $x = -t$.

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout réel x, on a

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = -t$, soit $t = -u$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$, et $\mathrm{d}t = -du$. Lorsque $t = -x$, $u = x$ et lorsque $t = -2x$, $u = 2x$. Par changement de variable

$$g(-x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-(-u)^2}(-du) = -\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = -g(x)$$

Ainsi, la fonction g est impaire.

2. **Remarque.** — On fera toujours attention à l'ordre des bornes avant d'utiliser la positivité de l'intégrale.

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Il faut donc s'intéresser aux bornes de l'intégrale :

- Pour $x > 0$, on a $x < 2x$. Par positivité de l'intégrale,
$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
- Pour $x < 0$, on a par contre $x > 2x$. Par positivité de l'intégrale, on a cette fois-ci
$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Bilan : g est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.

3. Soit F une primitive de f (qui existe car f est continue sur $\mathbb{R}$). F est de classe $\mathscr{C}^1$, et on peut alors écrire, pour tout réel x,
$$g(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$$

Par somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = 2\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\mathrm{e}^{-(2x)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$

4. On a alors

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-4x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-x^2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$-3x^2 \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 \leqslant \frac{\ln(2)}{3}$$

Ainsi, g' est négative sur $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}};+\infty\right[$, positive sinon. On obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↗		↘	

5. Soit $x > 0$. Sur $[x;2x]$, la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est décroissante. Ainsi

$$\forall\, t \in [x;2x],\ \ f(2x) \leqslant f(t) \leqslant f(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$$

Par positivité de l'intégrale (car pour $x > 0,\ x < 2x$), on a alors

$$\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-4x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\mathrm{e}^{-4x^2}\,[t]_x^{2x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\,[t]_x^{2x}$$

et donc

$$x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$$

Or, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\underbrace{x^2\mathrm{e}^{-x^2}}_{lim=0\ (\mathrm{CC})} = 0 \text{ par produit}$$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-4x^2} = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

Exercice 229. — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.

Solution. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2\mathrm{e}^t$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives.

On note alors F une primitive de f. On a donc

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x te^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(F(x) - F(0)\right) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$$

F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$) donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Enfin, par définition du nombre dérivé

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$$

or $F'(0) = f(0) = 0$.
Bilan : g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

CHAPITRE 16

DÉTERMINANTS

Résumé

Dans ce chapitre, on revient sur la notion de déterminant, vue dans les chapitres de Géométrie du plan et de l'espace, que l'on étend à l'ensemble des matrices carrées. On utilisera ensuite le déterminant pour démontrer des résultats (inversibilité de matrices, bijectivité d'application linéaire).

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition de déterminant :
- connaître les propriétés de la définition ..... □
- savoir calculer à l'aide du développement selon ligne ou colonne ..... □
- savoir calculer à l'aide des opérations élémentaires ..... □

② Concernant les propriétés du déterminant :
- connaître les conditions d'un déterminant nul ..... □
- maîtriser les propriétés du déterminant d'un produit et d'une transposée ..... □
- savoir calculer le déterminant d'une matrice par bloc ..... □

③ Savoir utiliser le déterminant pour montrer qu'une matrice est inversible ..... □

④ Connaître le lien avec endomorphisme et famille de vecteurs :
- savoir calculer le déterminant d'une famille de vecteurs ..... □
- savoir démontrer qu'une famille est une base à l'aide du déterminant ..... □
- savoir calculer le déterminant d'un endomorphisme ..... □
- savoir montrer qu'un endomorphisme est un automorphisme à l'aide du déterminant ..... □

Dans l'ensemble de chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Déterminant

1) Définition

Nous avons vu dans les chapitres Géométrie élémentaire du plan et Géométrie élémentaire de l'espace la notion de déterminant de deux vecteurs du plan ou de trois vecteurs de l'espace. Nous allons généraliser cette notation.

Remarque 245. — Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut aussi se noter $(C_1,\cdots,C_n)$ où C_i désigne la colonne i.

Proposition 16.1.

Soit $n\geqslant 1$. Il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$, appelée **déterminant**, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- det est **linéaire** par rapport à chacune des colonnes :
$$\det(\lambda C_1 + C_1', C_2, \cdots, C_n) = \lambda\det(C_1, C_2, \cdots, C_n) + \det(C_1', C_2, \cdots, C_n)$$
(et de même pour les autres colonnes).
- det est **alterné** : lorsqu'on permute deux colonnes, le déterminant change de signe, par exemple
$$\det(C_2, C_1, C_3, \cdots, C_n) = -\det(C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n)$$
- Enfin $\det(I_n) = 1$.

Exemple 262. — Le déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ correspond au déterminant dans le plan des vecteurs $\begin{pmatrix} a\\ c\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b\\ d\end{pmatrix}$. De même dans l'espace.

Remarque 246. — On dit que le déterminant est une forme multilinéaire alternée.

2) Développement par rapport aux lignes et colonnes

Définition 210 (Matrice extraite)**.** — Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Soient i et j deux entiers de $[\![1;n]\!]$. On note $A_{ij}\in\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple 263. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. Déterminer $A_{1,1}$, $A_{2,1}$ et $A_{3,2}$.

Solution. En utilisant la définition :
$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix},\quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

Proposition 16.2. Développement par rapport à une ligne

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut calculer le déterminant de $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, par récurrence :

- Si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$ où $A = (a_{11})$.
- Si $n \geqslant 2$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on notera $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Exemple 264. — Vérifier que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Déterminer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solution. En appliquant la définition

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \left| d \right| + (-1)^{2+1} b \left| c \right| = ad - bc$$

De même

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Proposition 16.3. Développement par rapport à une colonne

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut calculer le déterminant de $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, par récurrence :

- Si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$ où $A = (a_{11})$.
- Si $n \geqslant 2$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Proposition 16.4.

Soit $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure. Alors

$$\det(T) = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}$$

Démonstration. On procède par récurrence, en développant suivant la première colonne □

3) Opérations élémentaires

Pour calculer en pratique un déterminant, on peut utiliser les opérations élémentaires (celles de la méthode de Gauss-Jordan) :

Proposition 16.5.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si on multiplie une colonne ou une ligne de A par α, le déterminant est également multiplié par α.
- Si on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne, le déterminant de A ne change pas.
- Si on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne, le déterminant de A ne change pas.
- Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) de A, on multiplie son déterminant par -1.

Démonstration. Les opérations élémentaires reviennent à multiplier la matrice A par des matrices du type $t_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ji}$ (matrice de transvection pour $i \neq j$) de déterminant 1, ou par $e_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ (pour l'échange), de déterminant -1. □

Exercice 230. — Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$.

Solution. En soustrayant la première ligne à la deuxième et à la troisième (ce qui ne change pas le déterminant) :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma^2-\alpha^2) - (\gamma-\alpha)(\beta^2-\alpha^2)$$

Soit, après factorisation

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) - (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

Remarque 247. — Ce type de déterminant est appelé **déterminant de Vandermonde**. Cette méthode est générale pour calculer ces déterminants.

II. Déterminant et opération sur les matrices

1) Déterminant nul

Proposition 16.6.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A a une colonne (ou une ligne) nulle, $\det(A) = 0$.
- Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres, $\det(A) = 0$.
- Si A n'est pas inversible, $\det(A) = 0$.
- Si $\operatorname{rg}(A) \leqslant n-1$, $\det(A) = 0$.

Démonstration. Les trois derniers points sont équivalents (cf. chapitre *Espaces vectoriels en dimension finie*). Le premier point découle de la multilinéarité du déterminant : en supposons la colonne C_1 nulle (par exemple), on peut alors écrire

$$\det(A) = \det(0, C_2, \cdots, C_n) = \det(0+0, C_2, \cdots, C_n = \det(0, C_2, \cdots, C_n) + \det(0, C_2, \cdots, C_n)$$

ainsi, $\det(A) = \det(A) + \det(A)$ et donc $\det(A) = 0$. □

Exemple 265. — Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$.

Solution. On remarque, en notant C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A que

$$(a+b+c)C_1 - C_2 = C_3$$

Ainsi, C_3 s'écrit comme une combinaison linéaire de C_1 et C_2 : $\det(A) = 0$.

2) Produit et transposition

Proposition 16.7. Multiplicativité du déterminant

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Admise. □

Proposition 16.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration. Notons $(C_1, \cdots, C_n)$ les colonnes de A. Mais alors

$$\lambda A = (\lambda C_1, \lambda C_2, \cdots, \lambda C_n)$$

et par multilinéarité

$$\det(\lambda A) = \underbrace{\lambda \times \cdots \times \lambda}_{n \text{ fois}} \det(C_1, \cdots, C_n) = \lambda^n \det(A)$$

□

Proposition 16.9. Invariance par transposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\det({}^tA) = \det(A)$. Ainsi, toute propriété du déterminant valable sur les colonnes est également valable sur les lignes.

Démonstration. Vient du fait que le développement suivant les lignes ou les colonnes donne le même déterminant. □

3) Matrices inversibles

Le résultat suivant est très important, et déjà vu dans le cas des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Théorème 16.10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, il existe B telle que $AB = I_n$. Ainsi, $\det(AB) = 1$. Or, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et donc $\det(A)\det(B) = 1$: $\det(A)$ ne peut être nul.
Si A n'est pas inversible, alors $\text{rg}(A) \leqslant n-1$ et d'après une propriété précédente, $\det(A) = 0$. □

Remarque 248. — La démonstration précédente permet de montrer également que si A est inversible, alors

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

4) Matrice par bloc

Proposition 16.11.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_p(K)$. On note $L \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs définie par

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{p,n} & D \end{pmatrix}$$

Alors

$$\det(L) = \det(A) \times \det(D)$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la taille de A. □

III. Applications aux endomorphismes et aux vecteurs

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 211. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle **déterminant** de $(u_1, \cdots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u_i dans la base $\mathscr{B}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \cdots, \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\right)$$

Exemple 266. — Soit $((1,1),(1,-1))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le déterminant de cette famille dans la base canonique.

AF

Proposition 16.12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
$(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$.

2) Déterminant d'un endomorphisme

Propriété 58. — *Soient* A *et* B *deux matrices semblables de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\det(A) = \det(B)$.

Démonstration. En effet, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Mais alors, par multiplicativité du déterminant :

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(B)$$

puisque $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$. □

La propriété précédente permet de définir la notion de déterminant d'endomorphisme :

Définition 212. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. On appelle **déterminant** de f, et on note $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque de E :

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \text{ où } \mathscr{B} \text{ est une base de E}$$

La propriété précédente nous assure que cela ne dépend pas de la base choisie.

On dispose d'une caractérisation d'un automorphisme :

Proposition 16.13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Démonstration. En effet, f est un automorphisme si et seulement si la matrice de f dans une base est inversible. □

fFileExiststex/Chap16/Exo16

Exercices

Déterminant de matrices

Exercice 231. — Calculer les déterminants suivant :

$$A=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix} \qquad D=\begin{vmatrix}1&2&3&1\\2&5&7&3\\1&1&4&4\\3&3&7&8\end{vmatrix}$$

Solution. Rapidement,

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$$

En développant par rapport à la première ligne, on a :

$$\begin{aligned}B &= 1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-0+1\times\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}\\ &= 0+3=3\end{aligned}$$

On aurait pu également faire les opérations du pivot de Gauss-Jordan :

$$B=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=3$$

Pour le C, on développe par rapport à la première ligne :

$$C=(-1)^{1+2}\times1\times\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=6$$

Pour le D, on n'a aucun zéro. On va appliquer la méthode du pivot :

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&1\\0&-1&1&3\\0&-3&-2&5\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&1\\0&0&2&4\\0&0&1&8\end{vmatrix}\end{aligned}$$

La matrice obtenue est une matrice par blocs, avec un bloc de 0. On en déduit alors

$$D=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}2&4\\1&8\end{vmatrix}=1\times12=12$$

Exercice 232. — Calculer les déterminants suivants :

1. $A=\begin{vmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)\\1&\cos(b)&\cos(2b)\\1&\cos(c)&\cos(2c)\end{vmatrix}$ où (a,b,c) sont trois réels.
2. $B=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&-a&a\\a&a&a\end{vmatrix}$ où $a\in\mathbb{R}$.

3. $\mathrm{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+2x \end{vmatrix}$ où $x \in \mathbb{C}$.

Solution.

1. Puisque $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, B s'écrit

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a)-1 \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b)-1 \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c)-1 \end{vmatrix}$$

soit, en ajoutant la première colonne à la dernière :

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c) \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$$

Par pivot puis développement :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= 2\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos^2(a) \\ 0 & \cos(b)-\cos(a) & \cos^2(b)-\cos^2(a) \\ 0 & \cos(c)-\cos(a) & \cos^2(c)-\cos^2(a) \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} \cos(b)-\cos(a) & \cos^2(b)-\cos^2(a) \\ \cos(c)-\cos(a) & \cos^2(c)-\cos^2(a) \end{vmatrix} \\ &= 2\left[(\cos(b)-\cos(a))(\cos^2(c)-\cos^2(a)) - (\cos^2(b)-\cos^2(a))(\cos(c)-\cos(a))\right] \\ &= 2(\cos(b)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(a))(\cos(c)+\cos(a)-(\cos(b)-\cos(a)) \\ &= 2(\cos(b)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(b)) \end{aligned}$$

2. On remarque que la première et la troisième colonne sont les mêmes. D'après les propriétés sur les déterminants, on en déduit que $\mathrm{B} = 0$ pour tout a.
3. Par la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathrm{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix}$$

soit, puisque la matrice est triangulaire supérieure, $\mathrm{C} = 2x^2$.

Exercice 233 (Déterminant du Vandermonde)**.** — Soient $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde d'ordre n le déterminant

$$\mathrm{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer par récurrence sur n que

$$\mathrm{V}_n = \prod_{1 \leqslant i < j < n} (a_j - a_i)$$

Pour aller plus loin

Exercice 234. — Pour quelle(s) valeur(s) du réel m la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Donner son rang en fonction de m.

Solution. Par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^3 & m-m^4 \\ 0 & 0 & 1-m^3 \end{vmatrix}$$

Ainsi, la matrice obtenue étant triangulaire supérieure :

$$\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-m^3)^2$$

La matrice est donc inversible si et seulement si $1-m^3 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $m \neq 1$. Dans ce cas, elle est de rang 3.

Si $m = 1$, la matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 car ses trois colonnes sont identiques.

Exercice 235. —

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est antisymétrique alors $\det(A) = 0$.
2. Plus généralement, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geqslant 3$ entier **impair**, alors $\det(A) = 0$.
3. Donner un exemple de matrice antisymétrique de déterminant non nul.

Solution.

1. Si A est antisymétrique, alors ${}^tA = -A$ soit, en appliquant le déterminant, $\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$. Or, $\det({}^tA) = \det(A)$. Donc $\det(A) = -\det(A)$, c'est-à-dire $\det(A) = 0$.
2. Par le même raisonnement, ${}^tA = -A$ soit, en appliquant le déterminant, $\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ car n est impair. Or, $\det({}^tA) = \det(A)$. Donc $\det(A) = -\det(A)$, c'est-à-dire $\det(A) = 0$.
3. D'après ce qui précède, il faut prendre un contre-exemple en dimension paire. On peut prendre $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est antisymétrique, mais dont le dénominateur vaut 1.

Exercice 236. — Soient $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ trois points du plan. Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Solution. D'après la méthode du pivot de Gauss appliqué aux colonnes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

soit, en développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 y_1 \end{vmatrix}$$

Ainsi, les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont colinéaires, c'est-à-

dire si la famille des coordonnées $\left(\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \end{pmatrix}\right)$, soit si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3 y_1 \end{vmatrix}$ vaut 0.

Exercice 237. — Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(P) = (X-1)^2 P'' + (kX+1)P' + P$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{R}$ pour que l'endomorphisme soit un automorphisme.

Solution. On détermine la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$f(1) = 1, \quad f(X) = (k+1)X+1 \quad \text{et} \quad f(X^2) = (3+2k)X^2+2$$

La matrice de f dans la base canonique est alors

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+2k \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut

$$\det(\text{Mat}(f)) = (k+1)(3+2k)$$

Ainsi, f est un automorphisme si et seulement si $(k+1)(3+2k) \neq 0$, soit $k \neq -1$ et $k \neq -\frac{3}{2}$.
Bilan : f est un automorphisme si et seulement si $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$.

CHAPITRE 17

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Résumé

Dans ce chapitre, on revient sur la notion de développement limité, vue dans le chapitre Dérivabilité, que l'on étend au cas général des développements limités d'ordre n. On utilise ces développements limités pour déterminer des limites, asymptotes et positions relatives.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition de négligeable et équivalence :
- connaître la définition ..... □
- connaître les différentes propriétés usuelles ..... □
- connaître les négligeabilités et équivalences usuelles ..... □

② Concernant les développements limités :
- connaître la définition d'un développement limité ..... □
- savoir obtenir des développements limités (somme, produit, composée, troncature, quotient, intégration) ..... □
- connaître les développements limités usuels ..... □

③ Savoir utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer des développements limités ..... □

④ Savoir utiliser les développements limités : :
- pour déterminer des limites et des équivalents ..... □
- pour déterminer des positions relatives ..... □
- pour déterminer des asymptotes et position relatives ..... □

Dans l'ensemble de chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Comparaison locale

Dans toute cette partie, x_0 désignera ou bien un nombre réel, ou bien $+\infty$, ou bien $-\infty$.

Définition 213. — On appelle **voisinage** de x_0 :

- un intervalle de la forme $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $]x_0-\varepsilon, x_0[$ ou $]x_0, x_0+\varepsilon[$ si x_0 est un réel.
- $]A;+\infty[$, avec A réel, si $x_0=+\infty$.
- $]-\infty;A[$, avec A réel, si $x_0=-\infty$.

1) Négligeable

Définition 214. — Soient f et g définies au voisinage de x_0, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0. Alors, on dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0, et on note $f=o_{x_0}(g)$, si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$f=o_{x_0}(g)$ peut se noter également $f(x)=o_{x_0}(g(x))$ et se lit "f est un petit o de g au voisinage de x_0".

Exemple 267. — Par exemple, $x=o_{+\infty}(x^2)$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Proposition 17.1.

$f=o_{x_0}(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Démonstration. En effet, la fonction constante égale à 1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 et on a $f=o_{x_0}(1)$ par définition si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1}=0\iff\lim_{x\to x_0}f(x)=0$$

□

Théorème 17.2. Négligeabilités usuelles

On a

- Si $0\leqslant\alpha<\beta$, on a
$$x^\alpha=o_{+\infty}\left(x^\beta\right)\quad\text{et}\quad x^\beta=o_0\left(x^\alpha\right)$$
- Si $\alpha\geqslant 0$ et $\beta>0$, on a
$$x^\alpha=o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right)$$
et en particulier $x^\alpha=o_{+\infty}(\mathrm{e}^x)$.
- Si $\alpha\geqslant 0$ et $\beta>0$, on a
$$(\ln(x))^\alpha=o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$$

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\beta > 0$, on a
$$(\ln(x))^\alpha = o_0\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

Démonstration. Cela découle des croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \iff x^\alpha = o_{+\infty}\left(e^{\beta x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \iff (\ln x)^\alpha = o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$$
$$\lim_{x\to 0} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0 \iff (\ln x)^\alpha = o_0\left(x^\beta\right)$$

De plus, $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ et le premier résultat découle des limites des fonctions puissances. □

Propriété 59. — *Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de x_0 :*

- *Transitivité : si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(h)$, alors $f = o_{x_0}(h)$.*
- *Linéarité : si $f = o_{x_0}(h)$ et $g = o_{x_0}(h)$, alors pour tous réels a et b, on a $af + bg = o_{x_0}(h)$*

Démonstration. Si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(h)$ alors g et h ne s'annulent pas au voisinage de x_0, et on peut écrire

$$\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$$

et ainsi $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 0$ par produit des limites.
De même, si $f = o_{x_0}(h)$ et $g = o_{x_0}(h)$ alors h ne s'annule pas au voisinage de x_0 et on a

$$\frac{af+bg}{h} = a\frac{f}{h} + b\frac{g}{h}$$

Par somme et produit des limites, on en déduit donc que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(af+bg)(x)}{h(x)} = 0$. □

Remarque 249. — On peut dans certains cas diviser. Le plus classique : si $f(x) = o_0(x^n)$, alors pour tout $p \leqslant n$, $\frac{f(x)}{x^p} = o_0(x^{n-p})$. En effet

$$\frac{\frac{f(x)}{x^p}}{x^{n-p}} = \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

2) Equivalence

Définition 215. — Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est **équivalente** à g en x_0 si, au voisinage de x_0, on a

$$f - g = o_{x_0}(g)$$

ce qu'on note $f \sim_{x_0} g$. Ainsi, puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on a

$$f \sim_{x_0} g \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Théorème 17.3. Polynômes

Soient α et β deux réels tels que $0 \leqslant \alpha < \beta$. Alors

$$\left(x^\alpha + x^\beta\right) \sim_{+\infty} x^\beta \quad \text{et} \quad \left(x^\alpha + x^\beta\right) \sim_0 x^\alpha.$$

De plus, si α et β sont des entiers, alors

$$\left(x^\alpha + x^\beta\right) \sim_{-\infty} x^\beta$$

Ainsi, on obtient que

- un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$;
- un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus bas degré au voisinage de 0.

Démonstration. En effet, puisque $\alpha - \beta < 0$ et $\beta - \alpha > 0$:

$$\frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1$$

et

$$\frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\alpha} = 1 + x^{\beta-\alpha} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1$$

□

Théorème 17.4. Equivalences usuelles

Soit u une fonction définie au voisinage de x_0 telle que $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$.

- $\ln(1+u(x)) \sim_{x_0} u(x)$, et en particulier, $\ln(1+x) \sim_0 x$.
- $\left(e^{u(x)} - 1\right) \sim_{x_0} u(x)$, en particulier $\left(e^x - 1\right) \sim_0 x$.
- $\left((1+u(x))^\alpha - 1\right) \sim_{x_0} \alpha u(x)$ si $\alpha \neq 0$. En particulier $\left((1+x)^\alpha - 1\right) \sim_0 \alpha x$.

Démonstration. Théorème admis - repose sur la limite d'un taux d'accroissement. □

Propriété 60. — *Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0, avec h ne s'annulant pas au voisinage de x_0.*

- *Si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} h$ alors $f \sim_{x_0} h$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$, alors $f \times h \sim_{x_0} g \times h$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$ alors pour tout entier n, $f^n \sim_{x_0} g^n$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0, alors $\dfrac{1}{f} \sim_{x_0} \dfrac{1}{g}$.*

Remarque 250. — Ainsi, on peut multiplier et diviser des équivalents.
⚠On ne peut ni ajouter, ni composer des équivalents (sauf par une fonction puissance d'exposant entier).

Exemple 268. — Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2$ et $g : x \mapsto x^2 - x^3$. Déterminer un équivalent de f, de g et de $f+g$ au voisinage de $+\infty$.

Solution. Puisque f et g sont des polynômes, on a rapidement que $f(x) \sim_{+\infty} x^3$ et $g(x) \sim_{+\infty} -x^3$. Enfin, $(f+g)(x) = 2x^2 \sim_{+\infty} 2x^2$. Ainsi, on ne peut pas additionner les équivalents.

Proposition 17.5. Equivalent et limite

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On suppose que $f \sim_{x_0} g$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$. Alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration. Remarquons que $f = \dfrac{f}{g} \times g$. Puisque $f \sim_{x_0} g$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et par hypothèse $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$. Par produit des limites, f admet une limite en x_0 qui vaut l. □

II. Développements limités

1) Définition

Définition 216. — Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, et n un entier naturel. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1 \cdots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0 on ait

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

La partie $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ est appelée **partie régulière** du développement limité, et $o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$ le **terme complémentaire**.
On abrégera régulièrement "développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0" en $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Remarque 251. — L'idée d'un développement limité est de trouver une approximation locale d'une fonction f par un polynôme. Le terme complémentaire est essentiel, puisqu'il permet d'indiquer l'ordre du développement limité.

Exemple 269. — On a le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\ln(1+x) = x + o_0(x)$. En effet,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 0$$

Exercice 238. — Montrer qu'on a le développement limité suivant : $\mathrm{e}^x = 1 + x + o_0(x)$.

Solution. En effet

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0$$

Remarque 252. — f admet un développement limité en x_0 si et seulement si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité en 0 (par rapport à la variable h). Dans la suite, on n'énoncera ainsi que les résultats pour les développements limités en 0.

Proposition 17.6.

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. Alors la partie régulière est unique.

Démonstration. Montrons-le dans le cas d'un voisinage de 0. Ecrivons $f(x) = \mathrm{P}(x) + o_0(x^n) = \mathrm{Q}(x) + o_0(x^n)$ avec P, Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. Mais alors

$$\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) = o_0(x^n) \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{P}(x)-\mathrm{Q}(x)}{x^n} = 0$$

Or, puisque $\deg(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) \leqslant n$, ce résultat est impossible, sauf si $\mathrm{P}-\mathrm{Q}=0$. Ainsi, $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ et la partie régulière est unique. □

Exercice 239. — Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (on pourra s'intéresser à $1 + x + \cdots + x^n$).

Solution. Remarquons que, pour $x \neq 1$:

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi, pour $x \neq 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Ainsi, $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o_0(x^n)$ et donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

2) Propriétés des DL

Proposition 17.7. Troncature

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

et soit $0 \leqslant p < n$. Alors f admet un développement limite à l'ordre p, donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_p(x-x_0)^p + o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)$$

Exemple 270. — Ainsi, si $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o_0(x^3)$ alors $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

Proposition 17.8. Opérations sur les DL

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. On écrit

$$f(x) = \mathrm{P}(x) + o_0(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{Q}(x) + o_0(x^n)$$

avec P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

- Pour tout réel λ, $\lambda f + g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est $\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}$.
- $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est la troncature du polynôme $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ à l'ordre n.
- Si $f(0) = 0$, $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est la troncature du polynôme $\mathrm{Q} \circ \mathrm{P}$ à l'ordre n.

Démonstration. Le premier point se fait aisément, en utilisant les règles de prépondérance :

$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda\mathrm{P}(x) + o_0(x^n) + \mathrm{Q}(x) + o_0(x^n) = (\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(x) + o_0(x^n)$$

Pour le deuxième point, on écrit astucieusement :

$$f \times g - \mathrm{P} \times \mathrm{Q} = f \times g - f \times \mathrm{Q} + f \times \mathrm{Q} - \mathrm{Q} \times \mathrm{P} = f \times (g - \mathrm{Q}) + \mathrm{Q} \times (f - \mathrm{P})$$

Mais alors

$$f \times g - \mathrm{P} \times \mathrm{Q} = f o_0(x^n) + \mathrm{Q} o_0(x^n) = o_0(x^n)$$

Le dernier point est admis. □

Remarque 253. — ⚠ Pour $f \times g$, $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ a un degré $2n$, mais n'apporte qu'une information jusqu'à l'ordre n, et donc tout monôme de degré strictement supérieur à n sont à supprimer.
Ces résultats sont valables de manière générale en x_0, quitte à poser $f(x_0 + h)$.

Exercice 240. — Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Solution. On part du développement limité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

et on compose $f : x \mapsto -x$ (qui vérifie bien $f(0) = 0$) par $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$

De même, on compose $x \mapsto x^2$ par le précédent et on tronque le résultat à l'ordre n :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^p x^{2p} + \cdots + o_0(x^n)$$

Proposition 17.9. Parité

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

- Si f est paire, alors sa partie régulière ne contient que des termes de degrés pairs.
- Si f est impaire, alors sa partie régulière ne contient que des termes de degrés impairs.

Démonstration. Ecrivons $f(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{I}(x) + o(x^n)$, où P contient les termes pairs, et I les termes impairs du développement limité. Mais alors $f(-x) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{I}(x) + o(x^n)$. Par unicité du développement limité, par exemple si f est paire, on a nécessairement $\mathrm{I}(x) = 0$. □

3) Quotient

Méthode 17.1.

Pour déterminer le développement limité d'un quotient $\frac{f}{g}$, on écrira $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et on se ramènera au développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ par composée.

Exercice 241. — Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{-x^2+x+1}$.

Solution. On utilise le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$ et on compose $x \mapsto x - x^2$ par celui-ci, en tronquant à l'ordre 3 : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 = o_0(x^3)$ donc

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - (x - x^2) + (x - x^2)^2 - (x - x^2)^3 + o_0(x^3)$$

soit, après développement et troncature

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - x + x^2 + (x^2 - 2x^3) - x^3 + o_0(x^3) = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + o_0(x^3)$$

4) Développement limité, continuité et dérivabilité

Proposition 17.10.

f admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = l + o_{x_0}(1)$ si et seulement si f est continue (ou prolongeable par continuité) en x_0 et $f(x_0) = l$.

Démonstration. En effet, $f(x) - l = o_{x_0}(1) \iff \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-l}{1} = 0$. □

Rappel 16. — *f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = a + b(x-x_0) + o_{x_0}(x-x_0)$ si et seulement si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.*

Démonstration. En effet, par troncature, f est continue en x_0 et $f(x_0) = a$. Enfin

$$f(x) = a + bx + o_{x_0}(x-x_0) \iff \frac{f(x)-a}{x-x_0} = b + o_{x_0}(1) \xrightarrow{x\to x_0} b$$

□

Remarque 254. — ⚠ Ce résultat, vrai si f est continue ou dérivable, n'est plus vrai pour les dérivées d'ordre supérieur. Ainsi, une fonction peut avoir un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 sans être deux fois dérivable en 0.

Exemple 271. — Soit $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $f(x) = o_0(x^2)$ mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Solution. Rapidement, pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x)}{x^2} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$ en 0 (par encadrement classique). Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calculons alors le taux d'accroissement de f' en 0 :

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le premier terme admet une limite en 0 (qui vaut 0). En revanche, le deuxième terme n'en admet pas (car cos n'admet pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Ainsi, f' ne peut être dérivable en 0, et f n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

5) Intégration

Proposition 17.11.

Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}_{=\mathrm{P}(x)} + o_0(x^n)$$

Alors une primitive de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0, dont la partie régulière est la primitive de P nulle en F(0) :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o_0\left(x^{n+1}\right)$$

Démonstration. Posons $Q(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. La fonction $t \mapsto F(t) - Q(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;x]$ (pour x bien choisi), donc par inégalité des accroissements finis

$$\left|\frac{F(x) - Q(x) - (F(0) - Q(0))}{x - 0}\right| \leqslant \max_{t\in[0;x]} |(F-Q)'(t)| = \max_{t\in[0;x]} |f(t) - P(t)|$$

Ainsi,

$$\left|\frac{F(x) - Q(x)}{x^{n+1}}\right| \leqslant \frac{\max\limits_{t\in[0;x]} |f(t) - P(t)|}{x^n} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Puisque $f(x) - P(x) = o_0(x^n)$. □

Exercice 242. — Déterminer un $DL_{n+1}(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ et un $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$.

Solution. On part d'un $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ que l'on intègre :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$

et donc

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$$

De même, on écrit un $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ que l'on intègre :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n})$$

et donc

$$\arctan(x) = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$$

III. Formule de Taylor-Young

1) Formule de Taylor-Young

Théorème 17.12. Formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathscr{C}^n(I)$ où I est un intervalle contenant x_0. Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n)$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence et est admise. □

Exercice 243. — Déterminer le $DL_n(0)$ de exp.

Solution. exp est de classe $\mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout entier n (puisqu'en réalité, exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$) et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(k)} = \exp \quad \text{et donc} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$$

Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o_0(x^n)$$

2) Développements limités usuels

En utilisant la formule de Taylor-Young, on obtient les développements limités au voisinage de 0 suivants, qui sont à connaître par cœur.

- Les développements limités liés à $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0\left(x^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

- Les développements limités liés à l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) \\
\operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n}) \\
\operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1}) \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5)
\end{aligned}$$

- Puissance :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_0(x^n)$$

et en pratique

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + o_0(x^n)$$

IV. Applications

1) Calcul de limite

On peut utiliser les développements limités pour lever des formes indéterminées.

Exercice 244. — Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(e^x+1)-3(\ln(1+x)+1)+1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Solution. Dans le premier cas, on utilise le développement limité de exp et de $x\mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 (car le x^2 au dénominateur nous donne l'intuition) :

$$\frac{(x+1)(1+x+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)+1)-3(x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)+1)+1}{x^2}=\frac{3x^2+o_0(x^2)}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}3$$

De même, en effectuant un développement limité à l'ordre 2 de $x\mapsto \ln(1+x)$:

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)-x}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{2}$$

2) Recherche d'équivalents

Proposition 17.13.

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o_0(x^n)$$

Soit p l'indice du premier coefficient a_p non nul. On appelle **forme normalisée** du développement limité l'écriture

$$f(x)=x^p\left(a_p+a_{p+1}x+\cdots+a_nx^{n-p}+o_0(x^{n-p})\right)$$

et dans ce cas

$$f(x)\sim_0 a_px^p$$

Remarque 255. — On peut raisonner en dehors de 0, en faisant un développement limité à l'ordre n de $x\mapsto f(x_0+x)$.

Exercice 245. — Déterminer un équivalent simple en 0 de

$$f:x\mapsto\frac{\mathrm{sh}(x)-\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

Solution. On utilise un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de chacune des fonctions :

$$\frac{\mathrm{sh}(x)-\sin(x)}{1-\cos(x)}=\frac{x+\frac{x^3}{3!}-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+o_0(x^3)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o_0(x^3)\right)}=\frac{\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)}{\frac{x^2}{2}+o_0(x^3)}=\frac{\frac{x}{3}+o_0(x)}{\frac{1}{2}+o_0(x)}$$

Ainsi,

$$f(x)\sim_0\frac{2}{3}x$$

3) Position relative de courbe

Méthode 17.2.

Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_1(x_0)$. Alors on obtient l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 en prenant la partie régulière du développement limité. En appliquant le résultat précédent, et

sous réserve qu'un DL d'ordre suffisant existe, on peut écrire

$$f(x)-(a+bx)\sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p$$

Alors le signe de $a_p(x-x_0)^p$ permet de donner la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0 : s'il est positif, la courbe est au dessus de sa tangente ; sinon elle est au-dessous.

Remarque 256. — Attention : le résultat n'est vrai que localement autour de x_0.

Exemple 272. — Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Montrer que f est dérivable en 0, et étudier la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Solution. Utilisons le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de x_0 :

$$f(x)=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o_0(x^4)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^2+o_0(x^2)$$

D'une part, puisque f admet (par troncature) un $\mathrm{DL}_1(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{3}$, mais de plus, $f(x)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)=-\frac{1}{4}x^2+o_0(x^2)$.
Puisque $-\frac{1}{4}x^2<0$ au voisinage de 0, on en déduit que la tangente à la courbe de f au voisinage de 0 est localement toujours au-dessus de la courbe de f.

4) Asymptote

Définition 217. — On dit qu'une fonction f admet un **développement asymptotique** à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si on peut écrire

$$f(t)=a_0+\frac{a_1}{t}+\cdots+\frac{a_n}{t^n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

Méthode 17.3.

Pour obtenir un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$, on cherche un développement limité au voisinage de 0 de $f\left(\frac{1}{t}\right)$, puis on pose $t=\frac{1}{x}$.

Exercice 246. — Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}$$

Solution. Notons $u=\frac{1}{x}$. On a alors $f(u)=u\sqrt{1+u}$. Faisons un développement limité au voisinage de 0 :

$$f(u)=u\left(1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o_0(u^2)\right)=u+\frac{1}{2}u^2+u_0(u^2)$$

On obtient alors de développement asymptotique

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Proposition 17.14.

Soit f une fonction, telle que $\frac{f(x)}{x}$ admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ à l'ordre n :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

soit encore

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \cdots + \ă\frac{a_n}{x^{n-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Soit $p \geqslant 2$ l'indice du premier coefficient a_p non nul. Alors $y = a_0 x + a_1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, et le signe de $\frac{a_p}{x^{p-1}}$ donne la position de la courbe et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 247. — Déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et la position relative avec la courbe de la fonction

$$f : x \mapsto x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

Solution. En procédant comme précédemment, posons $u = \frac{1}{x}$. $f(u) = \frac{1}{u}\sqrt{1+u}$ et faisons un développement limité à l'ordre 2 de $u \mapsto \sqrt{1+u}$:

$$f(u) = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}u + o_0(u)$$

Soit, en revenant à x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la courbe de f admet la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ comme asymptote oblique, et puisque $-\frac{1}{8x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe de f est localement en dessous de son asymptote.

fFileExiststex/Chap17/Exo17

Exercices

Développements limités

Exercice 248. — A partir du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer un développement limité à l'ordre 4 de

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2} \qquad x \mapsto \sqrt{1-x^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et en déduire un développement limité à l'ordre 5 de arcsin.

Solution. En utilisant le développement limité du cours en 0 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o\left(x^4\right)$$

on en déduit, par composée :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)$$
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Mais alors, en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)} \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^2 + o\left(x^4\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

On en déduit alors, par intégration :

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \arcsin(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right) \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$

Exercice 249. — Déterminer les développements limités suivant :

1. $x \mapsto \frac{1}{3+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \sin(2x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
3. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
4. exp au voisinage de 1 à l'ordre 4.
5. $x \mapsto \exp(1+\sin(x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

Solution. On se ramène aux DL usuels par somme, composée, produit, …

1. On factorise et on utilise le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3+x} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\\ &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{3}\right)^3+o\left(x^3\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}-\frac{x^3}{81}+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= (2x)-\frac{(2x)^3}{6}+o\left(x^4\right)\\ &= 2x-\frac{4x^3}{3}+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

3. Puisque $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(\ln(1+x))^2 &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right)^2\\ &= x^2-x^3+2\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\\ &= x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

4. Attention, ici on est au voisinage de 1. Pour utiliser le développement limité en 0, il faut se ramener à 0. On pose $x = 1+h$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{1+h}\\ &= \mathrm{e}\mathrm{e}^h\\ &= \mathrm{e}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+o_0(h^4)\right)\\ &= \mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}\frac{(x-1)^2}{2}+\mathrm{e}\frac{(x-1)^3}{6}+\mathrm{e}\frac{(x-1)^4}{24}+o_1((x-1)^4)\end{aligned}$$

5. On développe tout d'abord $1+\sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4, puis on compose les développements limités :

$$1+\sin(x) = 1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp(1+\sin(x)) &= \exp\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)\\ &= \exp(1)\exp\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^3}{6}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &= \mathrm{e}+\mathrm{e}x+\mathrm{e}\frac{x^2}{2}-\mathrm{e}\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Exercice 250 (DL de tan)**.** — L'objectif de cet exercice est de déterminer un développement limité de tangente suivant plusieurs méthodes.

1. Pourquoi tan admet-elle un $DL_n(0)$ pour tout n ?
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer un développement limité à l'ordre 2 de tangente.
3. Méthode par unicité.
   (a) Expliquer pourquoi $\tan'$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 (pour tout entier n).
   (b) On note $\tan'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o_0(x^4)$. Déterminer en fonction des a_i le développement limité de tan au voisinage de 0.
   (c) En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire une relation sur les a_i, puis déterminer ceux-ci.
4. Méthode par polynôme.
   Soit (P_n) la suite de polynôme définie par $P_0(X) = X$ et pour tout entier n, $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X)$.
   (a) Déterminer P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.
   (b) Montrer par récurrence sur , n que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a
   $$\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$$
   (c) En déduire $\tan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in [\![1;5]\!]$, puis un développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Limites de fonctions

Exercice 251. — Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Solution.

Méthode 17.4.

On utilise les développements limités à des ordres bien choisis pour déterminer les limites.

1. On effectue un développement limité à l'ordre 3 (car il y a x^3 au dénominateur) :
$$\begin{aligned} e^x - e^{\sin(x)} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^3}{6}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$
Ainsi
$$\frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{6}$$

2. On effectue également un développement limité à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)-x\operatorname{ch}(x) &= x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x\left(1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)\\ &= -\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\operatorname{sh}(x)-x\operatorname{ch}(x)}{x^3} = -\frac{1}{3}+o(1)\longrightarrow -\frac{1}{3}$$

3. Rappelons que

$$\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

Puisque la limite est en $+\infty$, posons $u=\frac{1}{x}$ pour se ramener à 0. On cherche alors

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)}{u}}$$

On veut alors un développement limité de $\ln\left(\dfrac{\sin(u)}{u}\right)$ à l'ordre 1. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(u)}{u} &= \frac{u-\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)}{u}\\ &= 1-\frac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right) &= \ln\left(1-\frac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)\right)\\ &= -\frac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)}{u} = -\frac{u}{6}+o(u)\longrightarrow 0$$

Par composée

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = 1}$$

4. De même :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}}$$

On cherche donc un développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$. Or, dans la question précédente, on a obtenu :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)$$

et donc

$$\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2} = -\frac{1}{6}+o(1)\longrightarrow -\frac{1}{6}$$

Par composée :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}}$$

Etude locale de fonction

Exercice 252. — Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x(1+x^2)}$.

1. A partir du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1-x}$, déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\sqrt{\cos(x)}-1$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.
3. Démontrer que f est continue et dérivable en 0, et donner $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Déterminer la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Solution.

1. Puisque
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o\left(x^4\right)$$
et que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$, par composée :
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 + o\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o\left(x^4\right)\end{aligned}$$
et
$$\sqrt{\cos(x)} - 1 = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right)$$
2. Alors, puisque
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right)$$
on a
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{-\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right)}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{-\frac{x}{4} - \frac{x^3}{96} + o\left(x^3\right)}{1+x^2} \\ &= \left(-\frac{x}{4} - \frac{x^3}{96} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right)\right) \\ &= -\frac{x}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{96} + o\left(x^3\right) \\ &= -\frac{x}{4} + \frac{23}{96}x^3 + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$
3. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 3, donc au moins à l'ordre 1, on en déduit que f est continue et dérivable en 0, et que $f(0) = 0$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

4. D'après le développement limité, on a

$$f(x)-\left(-\frac{x}{4}\right)=\frac{23}{96}x^3+o\left(x^3\right)$$

Puisque $x^3>0$ si $x>0$ et $x^3<0$ si $x<0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, la courbe de f est au-dessous de sa tangente avant 0 et au dessus après.

Exercice 253. — Soit $f:x\mapsto\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$.

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. En déduire un prolongement par continuité, la dérivabilité et la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Solution.

1. Puisqu'on veut un développement limité à l'ordre 3 de f, il nous faut un développement limité à l'ordre 4 de $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$, et donc un développement limité à l'ordre 5 de e^x-1.

$$\mathrm{e}^x-1=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)$$

donc

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)$$

et

$$\begin{aligned}\ln\ă\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)&=\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)\\&=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)^3\\&\quad-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)^4+o\left(x^4\right)\\&=\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)x^3+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{72}-\frac{1}{48}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}\right)x^4+o\left(x^4\right)\\&=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^4}{2880}+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

on a alors

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{24}-\frac{x^3}{2880}+o\left(x^4\right)$$

2. Le résultat précédent nous permet de dire, puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\frac{1}{2}$, que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{24}$. Enfin, le terme $-\frac{x^3}{2880}$ permet de donner la position relative de f au voisinage de 0 : localement, la courbe de f est au-dessus de sa tangente avant 0, et en-dessous après 0.

CHAPITRE 18

INTÉGRALE SUR UN INTERVALLE

Résumé

Dans ce chapitre, on généralise la notion d'intégrale, vue sur un segment, au cas d'un intervalle quelconque. On verra des méthodes pour s'assurer que ces intégrales existent, et pour les calculer.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'intégrale sur un intervalle :
- connaître la définition. . . . . □
- connaître les différentes propriétés usuelles. . . . . □

② Concernant les théorèmes d'existence :
- connaître le théorème de majoration des fonctions positives . . . . . □
- savoir utiliser les équivalents de fonctions de signe constant . . . . . □
- connaître les intégrales de référence (Riemann, exponentielle) . . . . . □
- savoir appliquer un changement de variable à une intégrale généralisée . . . . . □

③ Connaître la notion de convergence absolue :
- connaître la définition. . . . . □
- l'inégalité triangulaire, et le cas d'une fonction continue dont l'intégrale converge absolument vers 0 . □

I. Intégrale sur un intervalle quelconque

L'idée est d'étendre la notion d'intégrale, mais sur un intervalle infini, du type $[a;+\infty[$, $]-\infty;a[$ voire $]-\infty;+\infty[$; où sur un intervalle du type $]a;b]$ ou la fonction n'est pas définie en a.ă

1) Définition

Définition 218. — Soit f une fonction continue, définie sur $[a;b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **convergente** si et seulement si $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 257. — On définit de même le cas où f est définie sur $]a;b]$, ou $]a;b[$ (dans ce cas, il y a deux limites à traiter).

Remarque 258. — On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale **impropre** (puisque, rigoureusement, l'intégrale n'est définie que sur un segment).

Exemple 273. — Soit $f : t \mapsto e^{-t}$ sur $[0;+\infty[$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. Soit $x > 0$. Alors

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 0$. Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

2) Propriétés

Toutes les propriétés de base se généralisent aux intégrales sur un intervalle quelconque.

a) Linéarité

Propriété 61 (Linéarité)**.** — *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et*

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- *Si* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent, alors* $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ *converge également, et*

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 259. — Attention : l'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ peut exister, sans pour autant que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ n'existent.
Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ne convergent pas, et pourtant la somme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Relation de Chasles

Propriété 62 (Relation de Chasles). — *Soient* $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant +\infty$ *et* f *une fonction continue sur* $]a;b[$. *Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent. Dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Positivité et croissance de l'intégrale

Propriété 63 (Positivité et croissance). — *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur l'intervalle* $[a;b[$. *On suppose que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent.*

- *Positivité : si* f *est positive sur* $[a;b[$ *(avec* $a \leqslant b$*), alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- *Croissance : si, pour tout* $t \in [a;b[$, $f(t) \leqslant g(t)$ *(avec* $a \leqslant b$*) alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

II. Théorèmes d'existence

1) Intégrales de référence

Théorème 18.1. Intégrale de Riemann

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Démonstration. Dans le cas où $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha > 1$: quand x tend vers $+\infty$, cette intégrale converge vers $\frac{1}{\alpha-1}$

- Si $\alpha < 1$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$$
donc l'intégrale diverge.
- Si $\alpha = 1$, on a
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
L'intégrale diverge donc.

□

Théorème 18.2. Intégrale de Riemann - 2

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas,
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$

Démonstration. Pour $\alpha \neq 1$, on a, pour tout $u \in]0;1[$,
$$\int_u^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_u^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{u^{\alpha-1}}$$
Si $\alpha > 1$, $\lim_{u\to0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = +\infty$. L'intégrale diverge donc. Si $\alpha < 1$, $\lim_{u\to0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = 0$ donc l'intégrale converge et
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$
Si $\alpha = 1$, pour $u \in]0;1[$,
$$\int_u^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(1) - \ln(u) = -\ln(u) \xrightarrow{u\to0} +\infty$$
Donc l'intégrale diverge également. □

Théorème 18.3.

La fonction $f : t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas,
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$, $e^{-\alpha t} = 1$ et la fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$. Sinon,
$$\int_0^x e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$
Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha > 0$, et dans ce cas
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

□

Théorème 18.4.

La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0;1]$, et on a
$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

Démonstration. Soit $a \in]0;1[$. Par intégration par parties, ou en utilisant une primitive de ln, on a

$$\int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_a^1 = -1 - a\ln(a) + a$$

Or, on a $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ (croissance comparée). Par somme, $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Ainsi, l'intégrale converge, et

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

□

2) Majoration

Théorème 18.5.

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b[$. On suppose que

$$\forall\ x \in [a;b[, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Alors, si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente, et on a

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 260. — Attention : il faut absolument que f et g soient positives.

Remarque 261. — Il suffit que l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ soit vraie au voisinage de b pour que le résultat puisse tout de même s'appliquer.

Exemple 274. — Montrer que $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{1}{t+t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$. Remarquons que pour tout $t \geqslant 1$ on a $t+t^2 \geqslant t^2$, soit

$$0 \leqslant \frac{1}{t+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Equivalences et négligeabilité

Théorème 18.6.

Soient f et g deux fonctions continues, **positives** sur l'intervalle $[a;b[$. On suppose que

$$f(x) \sim_b g(x)$$

Alors, $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

Remarque 262. — Attention : il faut absolument que f et g soient positives, ou a minima, de signe constant (si f et g sont négatives, on peut raisonner sur $-f$ et $-g$).

Exercice 254. — Traiter le cas de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'équivalents.

Solution. Par équivalences usuelles :

$$\frac{1}{t+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Les deux fonctions sont continues et positives sur $[1;+\infty[$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 18.7.

Soient f et g deux fonctions continues, **positives** sur l'intervalle $[a;b[$. On suppose que

$$f(x) = o_b\big(g(x)\big)$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

Remarque 263. — Attention : il faut absolument que f et g soient positives.

Méthode 18.1.

La plupart du temps, on essaiera de comparer à l'une des intégrales de références, et principalement les intégrales de Riemann convergentes.

Exemple 275. — Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1;+\infty[$. On constate que

$$\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1/t^2} = t^3\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $t\mathrm{e}^{-t} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Puisque les deux fonctions sont positives, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

4) Méthode d'étude

Méthode 18.2.

Pour montrer qu'une intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge :

① On étudier tout d'abord la continuité de la fonction sur $]a;b[$.

② On vérifie en quel(s) point(s) a, b ou les deux, l'intégrale est impropre.
③ On utilise les théorèmes de majoration ou d'équivalence pour montrer que l'intégrale converge.

Exemple 276. — Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$:

$$\mathrm{e}^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En effet,

$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1/t^2} = t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

5) Changement de variable

L'intégration par partie et le changement de variable, sous condition de convergence de chacune des intégrales, sont encore valables.

Proposition 18.8.

Soit f une fonction continue sur $]a;b[$. Soit φ une fonction **strictement croissante** de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha;\beta[$, avec

$$\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$$

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Si elles sont convergentes, on a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

Remarque 264. — Le résultat est valable si φ est strictement décroissante, excepté que dans ce cas, les bornes α et β sont inversées.

Exemple 277. — Soit $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Calculer I en effectuant le changement de variable $t = u^2$.

Solution. Remarquons déjà que $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;+\infty[$. De plus,

$$f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{et} \quad f(t) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Les trois fonctions sont positives, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ (Intégrale de Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0;1]$ (Intégrale de Riemann, $\frac{1}{2} < 1$). Ainsi, I est convergente.
Le changement de variable $t = u^2$ sur $[0;+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissant sur $[0;+\infty[$. Par changement

de variable, l'intégrale étant convergente :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u+u^2\times u}(2u\,du)\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du\end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^a \frac{1}{1+u^2} = [\arctan(u)]_0^a = \arctan(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Bilan : $I = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$.

III. Convergence absolue

1) Définition

Définition 219. — Soit f une fonction continue sur $[a;b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge absolument** sur $[a;b[$ si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque 265. — Rigoureusement, on dit que f est **intégrable** sur $[a;b[$ si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 18.9.

Soit f une fonction continue sur $[a;b[$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 266. — ⚠ La réciproque n'est pas vraie. Une intégrale peut être convergente, sans être absolument convergente. On dit alors que l'intégrale est **semi-convergente**. On pourra regarder l'exercice 259.

2) Intégrale convergeant absolument vers 0

Proposition 18.10.

Soit f une fonction continue sur $]a;b[$. f est nulle sur $]a;b[$ si et seulement si

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$$

Démonstration. Si f est nulle, alors son intégrale existe et est nulle. La réciproque se montre comme la proposition similaire du chapitre *Intégration sur un segment.* □

fFileExiststex/Chap18/Exo18

Exercices

Intégrales impropres

Exercice 255. — Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculer leur valeur.

$$\mathrm{A}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx \quad \mathrm{B}=\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{C}=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \mathrm{D}=\int_3^{+\infty}\frac{du}{u\ln u}$$

Solution. Remarquons que chacune des fonctions considérées est continue sur les intervalles donnés.

- Soit $u>0$. On a alors
$$\int_0^u\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right]_0^u=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{2}$$
Or,
$$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1+u^2}=0 \text{ par quotient}$$
Par somme et produit de limite, on en déduit que l'intégrale A converge, et
$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}}$$
- Soit $u>0$. On a alors
$$\int_0^u t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^u=-\frac{1}{3}e^{-u^3}+\frac{1}{3}$$
Par composée, $\lim\limits_{u\to+\infty}e^{-u^3}=0$. Par sommet et produit, l'intégrale B est convergente, et
$$\boxed{\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}}$$
- Soit $u>1$. On a alors
$$\int_1^u\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_1^u=\frac{(\ln(u))^2}{2}-\frac{(\ln(1))^2}{2}=\frac{(\ln(u))^2}{2}$$
Or $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$ donc par composée
$$\lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln(u))^2}{2}=+\infty$$
Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale C est divergente.}}$
- Soit $x>3$. On a alors
$$\int_3^x\frac{du}{u\ln(u)}=\int_3^x\frac{1/u}{\ln(u)}=[\ln(|\ln(u)|)]_3^x=\ln(\ln(x))-\ln(\ln(3))$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln(x))=+\infty$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale D est divergente.}}$

Exercice 256. — Démontrer la convergence et déterminer la valeur de
$$\mathrm{I}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$$

On pourra dériver la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

Solution. Remarquons déjà que la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x-e^{-x}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ comme quotient de fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$. f est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
En écrivant $f(x) = \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1)$ pour $x \geqslant 1$, on a alors

$$\forall\, x \geqslant 1,\quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2e^x}{e^x(e^x-e^{-x})} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

Ainsi, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x-e^{-x}}$ est $\frac{1}{2}f$.
Soit alors $u \geqslant 1$. On a donc

$$\int_1^u \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx = \left[\frac{1}{2}f(x)\right]_0^u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$

On a alors

$$\frac{\mathrm{e}^u-1}{\mathrm{e}^u+1} \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u} = 1$$

Par composée,

$$\lim_{u\to+\infty} \ln\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right) = 0$$

et par somme

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx = 0 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$

Ainsi, l'intégrale I converge, et

$$\boxed{\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\right)}$$

Sujets

Exercice 257. — Pour tout $a > 0$, et pour tout entier n, on note

$$\mathrm{I}_n(a) = \int_0^a t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On note également

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

L'objectif du problème est de montrer que les intégrales I_n existent, et de calculer leur valeur.

1. Montrer que pour tout entier n, I_n converge.
2. Calculer $\mathrm{I}_0(a)$, puis déterminer la valeur de I_0.
3. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{n+1}(a)$ et $\mathrm{I}_n(a)$.
4. Ecrire la relation liant I_n et I_{n+1}. Déterminer alors la valeur de I_n en fonction de n.

Solution.

1. Remarquons que, pour tout entier n, $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est impropre en $+\infty$. De plus, on a
$$t^n\mathrm{e}^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En effet,

$$\frac{t^n e^{-t}}{1/t^2} = t^{n+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (Riemann), par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge.

Bilan : l'intégrale I_n est convergente.

2. Pour tout $a > 0$, on a

$$I_0(a) = \int_0^a t^0 e^{-t}\,dt = \int_0^a e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^a = -e^{-a} + 1$$

Mais alors,

$$\lim_{a\to+\infty} I_0(a) = \lim_{a\to+\infty} -e^{-a} + 1 = 1 \text{ par composée}$$

Ainsi, I_0 converge, et $I_0 = 1$.

3. Partons de $I_{n+1}(a)$ et faisons une intégration par parties.
On note $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$, soit $u'(t) = (n+1)t^{n+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;a]$. Par intégration par parties,

$$I_{n+1}(a) = \int_0^a t^{n+1}e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}t^{n+1}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-t}(n+1)t^n\,dt$$

soit

$$\boxed{I_{n+1}(a) = -e^{-a}a^{n+1} + (n+1)\int_0^a t^n e^{-t}\,dt = -e^{-a}a^{n+1} + (n+1)I_n(a)}$$

4. Par passage à la limite, puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a}a^{n+1} = 0$ par croissance comparée, et que $I_n(a)$ et $I_{n+1}(a)$ convergent (question 1), on en déduit par produit que, pour tout entier n,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Ainsi, $I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)\cdots 2\times 1\times I_0$ et donc

$$\forall\, n,\ I_n = n!$$

> **Remarque.** — Rigoureusement, il faut montrer le résultat par récurrence sur n.

Exercice 258. — Soient I, J et K les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))dx$$

1. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1, montrer que $\ln(\sin(x)) \sim_0 \ln(x)$. En déduire que I est convergente.
2. Montrer que, au voisinage de 0, $\ln(\tan(x)) \sim_0 x$ et que $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \sim -\ln(x)$. En déduire que K est convergente.
3. En posant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans I, montrer que J est convergente et J = I.
4. Montrer que

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)dx$$

5. En posant $v = 2x$, montrer que $I + J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,dx - \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

6. En écrivant $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$ (la dernière intégrale étant convergente puisque les deux autres le sont), et en posant $v = x - \frac{\pi}{2}$ dans la dernière intégrale, montrer que $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.
7. En déduire la valeur de K.

Solution.

1. Remarquons tout d'abord que $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. I est impropre en 0.
Puisque $\sin(x) = x + o_0(x)$, on a
$$\begin{aligned}\ln(\sin(x)) &= \ln(x + o_0(x)) \\ &= \ln(x(1 + o_0(x))) \\ &= \ln(x) + \ln(1 + o_0(1))\end{aligned}$$
et donc
$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln x} = \frac{\ln(1 + o_0(1))}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
Ainsi $\ln(\sin(x)) \sim_0 \ln(x)$ et donc $|\ln(\sin(x))| \sim_0 |\ln(x)|$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ln(x)|\,\mathrm{d}x$ étant convergente, et les deux fonctions étant positives sur $]0;1]$, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale I converge en 0.
Bilan : I est convergente.
2. De même, $x \mapsto \ln(\tan(x))$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. L'intégrale K est impropre en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.
Par le même raisonnement que précédemment, puisque $\tan(x) = x + o_0(x)$, on en déduit que $\ln(\tan(x) \sim_0 \ln(x)$ et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(\tan(t))\,\mathrm{d}t$ converge en 0.
De plus, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ et donc
$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{\tan(x)}\right) = -\ln(\tan(x)) \sim_0 -\ln(x)$$
Ainsi, par changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ et par l'équivalent précédent, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))\,\mathrm{d}x$ converge.
Bilan : K converge.
3. On pose $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui un changement de variable $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante. On a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Par changement de variable dans une intégrale généralisée :
$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u \text{ car } \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)\end{aligned}$$
Ainsi, I = J et J est convergente.
4. I et J étant convergente, par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned}\mathrm{I}+\mathrm{J} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x \text{ en utilisant la formule de trigonométrie } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$
5. On pose $v = 2x$ dans l'intégrale précédente qui est convergente (car c'est la somme de deux intégrales convergentes). Le changement de variable est $\mathscr{C}^1$ strictement croissant. $\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{d}x$. Par changement de

variable dans une intégrale généralisée, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I}+\mathrm{J} &= \int_0^\pi \ln\left(\frac{\sin(v)}{2}\right)\frac{\mathrm{d}v}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin(v))-\ln(2)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin(v))\,\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(2)\,\mathrm{d}v \text{ car la première et la dernière intégrales convergent} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin(v))\,\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\pi\ln(2) \end{aligned}$$

6. Puisque $\int_0^\pi \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$ et I convergent, on peut appliquer la relation de Chasles et

$$\int_0^\pi \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

Dans l'intégrale convergente $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$, on pose $v = x-\frac{\pi}{2}$, changement de variable $\mathscr{C}^1$ strictement croissante, avec $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}u = \mathrm{J}$$

car $\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(u)$.
Ainsi, on regroupant les différents résultats 4, 5 et 6 :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}+\mathrm{J} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln(2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{I}+\mathrm{J})-\frac{\pi}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{I}+\mathrm{J}=-\pi\ln(2)$ et puisque $\mathrm{I}=\mathrm{J}$,

$$\boxed{\mathrm{I}=\mathrm{J}=-\frac{\pi}{2}\ln(2)}$$

7. Remarquons que, par linéarité :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}-\mathrm{J} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))-\ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))\,\mathrm{d}x = \mathrm{K} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathrm{I}=\mathrm{J}$, on a $\boxed{\mathrm{K}=0}$.

Exercice 259. — Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f:t\mapsto\frac{\sin(t)}{t}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
2. Soient $0<a<b$ deux réels. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin^2(t/2)}{t}\right]_a^b+\int_{a/2}^{b/2}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Indication : on utilisera la formule $\cos(t) = \cos(2\times t/2) = 2\sin^2(t/2) - 1$ *et on posera un changement de variable* $u = 2t$ *pour terminer.*

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
5. Montrer que
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$$
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Solution.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, naturellement (limite usuelle ou développement limité) que
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$
En posant $f(0) = 1$, la fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $0 < a < b$. Pour $t \in [a;b]$, on pose $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$, c'est-à-dire $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Ainsi, par changement de variables :
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{2\sin^2(t/2)-1}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ car } \cos(t) = \cos(2t/2) = 1 - 2\sin^2(t/2) \\
&= 2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) - \int_a^b \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_a^b \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ par la même formule qu'avant} \\
&= 2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \text{ en posant } t = 2u, \mathscr{C}^1 \text{ strictement croissant}
\end{aligned}$$
3. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (car $g = f^2$ donc en posant $g(0) = 1$). L'intégrale est donc impropre au voisinage de $+\infty$. Or, pour tout $t \geqslant 1$:
$$\left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est positive et d'intégrale convergente sur $[1;+\infty[$ (Riemann avec $2 > 1$). Par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ converge, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également. Par continuité, on en déduit que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

4. En utilisant la formule obtenue en 2, on constate que l'intégrale du membre de droite converge quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$. Si le terme crochet converge, on pourra alors conclure que l'intégrale de f converge sur $[0;+\infty[$.
Or
$$\frac{\sin^2(a)}{a} = \sin(a)\frac{\sin(a)}{a} \xrightarrow{a\to 0} 0$$
et
$$\left|\frac{\sin^2(b)}{b}\right| \leqslant \frac{1}{b} \xrightarrow{b\to+\infty} 0$$
Donc le terme crochet tend vers 0 et par conséquent
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

5. Remarquons que, pour $t \in [n\pi;(n+1)\pi]$, par décroissance de la fonction inverse :
$$\frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n\pi}$$
et donc
$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \text{ par périodicité}\\ &\geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}\end{aligned}$$
Mais alors, pour tout $N \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t\\ &\geqslant \sum_{n=0}^{N-1}\frac{2}{(n+1)\pi}\\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \xrightarrow{N\to+\infty} +\infty\end{aligned}$$
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais pas absolument convergente.

CHAPITRE 19

SÉRIES NUMÉRIQUES

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit la notion de série, qui est à rapprocher de l'intégrale généralisée, mais dans le cas d'une suite. On y verra des méthodes de calculs, mais aussi des théorèmes pour montrer des convergences ou divergences de séries, sans pouvoir nécessairement calculer la somme de la série.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de série :
- connaître la définition d'une série, d'une somme et du reste d'une série ..... □
- connaître les différentes opérations usuelles ..... □
- connaître le lien entre suite et série ..... □
- connaître la condition nécessaire de convergence ..... □
- connaître les séries de référence ..... □

② Concernant les théorèmes de convergence :
- connaître le théorème de comparaison ..... □
- connaître le théorème d'équivalence ..... □

③ Concernant l'absolue convergence :
- connaître la définition ..... □
- connaître le lien entre absolue convergence et convergence ..... □
- connaître le cas particulier des séries alternées ..... □

I. Définitions

Dans l'ensemble de cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Séries

Définition 220. — Soit (u_n) une suite à valeur dans $\mathbb{K}$. On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$, la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque 268. — Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des sommes partielles est $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple 278. — Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$. La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**.
Les premières sommes partielles sont $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots$.

2) Convergence

La série $\sum u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 221. — Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Dans ce cas :

- la limite de la suite (S_n) est alors appelée **somme** de la série, et est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On a ainsi
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
- on appelle **reste** de la série la suite (R_n) définie par
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$$

Remarque 269. — ⚠ L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série converge, alors que l'écriture $\sum u_n$ a bien un sens, puisqu'elle désigne une suite.

Remarque 270. — Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calculera (presque) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

3) Premiers exemples

Exemple 279. — Soit (u_n) la suite définie pour tout n par

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Etudier la série $\sum u_n$.

Solution. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Alors

$$\forall\, n,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Par somme et produit, on en déduit donc que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Exemple 280. — Montrer que la série harmonique, de terme général $\frac{1}{n}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, est divergente.

Solution. Pour tout $n \geqslant 1$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.
Nous avons vu dans le chapitre sur le calcul différentiel que l'on a, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

En additionnant ces inégalités, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

Or, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1), \text{ les termes se téléscopant.}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

II. Propriétés

1) Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, dans certains cas, aux séries :

Théorème 19.1. Linéarité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, on a alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est également convergente, et on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque 271. — La réciproque du deuxième point n'est pas vraie. Par exemple, si pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$, alors la série $\sum u_n + v_n$ converge (vers 0) alors que ni $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ ne convergent.

2) Suite et série

Théorème 19.2.

Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans ce cas, en notant ℓ la limite de (u_n), on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0$$

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$. On constate que $S_n = u_{n+1} - u_0$ par télescopage. Ainsi, (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge. Si (u_n) converge vers ℓ, par passage à la limite, on obtient bien $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0$.

□

3) Limite de la suite et convergence

Théorème 19.3.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Pour tout n, notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_n) admet, par définition, une limite que l'on note S. Mais alors
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$$

□

Remarque 272. — La contraposée du théorème est intéressante : si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ n'est pas convergente. Par exemple, la série $\sum \dfrac{2n}{n+1}$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.

Remarque 273. — Cette condition est nécessaire, mais pas suffisante : en effet, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et pourtant la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge.

Exemple 281. — Soit q un réel. On s'intéresse à la série $\sum q^n$. Alors, pour que la série $\sum q^n$ converge, il faut que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$, c'est à dire $|q|<1$. On verra plus tard que la réciproque, dans ce cas, est vraie.

4) Séries réelle à termes positifs

Le cas des séries à coefficients réels positifs est plus simple à étudier.

Théorème 19.4.

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la série $\sum u_n$ est convergente, si et seulement si, la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

Démonstration. Notons $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$. On a alors $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}\geqslant 0$: la suite (S_n) est donc croissante. D'après les théorèmes sur les suites monotones, (S_n) converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée. □

5) Lien entre intégrale et série

On dispose d'un lien fort entre série et intégrale généralisée :

Théorème 19.5. Critère de comparaison série-intégrale

Soit n_0 un entier. Soit $f:[n_0;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. Alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0}f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty}f(t)dt$ sont de même nature.
S'il y a convergence, on a alors

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(t)dt\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}f(k)\leqslant\int_{n}^{+\infty}f(t)dt$$

S'il y a divergence, on a alors

$$\int_{n_0}^{n+1}f(t)dt\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}f(k)\leqslant f(n_0)+\int_{n_0}^{n}f(t)dt$$

Démonstration. f étant décroissante, pour tout entier $n\geqslant n_0$, on a

$$\forall\ t\in[n;n+1]\quad f(n+1)\leqslant f(t)\leqslant f(n)$$

D'après l'inégalité de la moyenne :

$$f(n+1)(n+1-n)\leqslant\int_n^{n+1}f(t)dt\leqslant f(n)(n+1-n)$$

soit

$$f(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}f(t)dt\leqslant f(n)$$

Pour $N\geqslant n_0$, en additionnant ces inégalités, nous avons alors

$$\sum_{n=n_0}^{N}f(n+1)\leqslant\int_{n_0}^{N+1}f(t)dt\leqslant\sum_{n=n_0}^{N}f(n)$$

où encore, en notant $S_n = \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$, et après changement de variable :

$$S_N - f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,dt \leqslant S_N \qquad (*)$$

ce qui permet de déduire que (par positivité de la fonction f) (S_N) converge si et seulement si $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Le résultat suivant convergence/divergence n'est ensuite qu'une ré-éecriture de $(*)$.

□

Remarque 274. — Ce résultat permet d'obtenir un équivalent de la somme partielle ou du reste, selon qu'il y ait convergence ou divergence.

Exercice 260. — On a vu que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.Montrer que $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

Solution. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue, positive et décroissante sur $[1;+\infty[$. D'après le théorème précédent, l'intégrale diverge et on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt$$

ce qui nous donne

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

et donc $(\ln(n) > 0)$

$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

Par équivalence, les membres de gauche et droite tendent vers 1. Par encadrement, la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$ existe et vaut 1.
Bilan : $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

III. Séries de référence

1) Séries géométriques

Définition 222. — Pour tout entier p, la série $\sum q^n$ s'appelle **série géométrique** de raison q.

Théorème 19.6.

La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Remarque 275. — Plus généralement, la série $\sum_{n\geqslant p} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$$

Démonstration. La suite (q^n) converge vers 0 si et seulement si $|q|<1$. Par condition nécessaire de convergence, la série $\sum q^n$ ne peut pas converger si $|q|\geqslant 1$.
Supposons alors que $|q|<1$. Notons $S_n=\sum_{k=0}^{n} q^k$. On a $S_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1}=0$ car $|q|<1$. Donc la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$: la série converge, et sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$. □

2) Séries de Riemann

Définition 223. — La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) est appelée **série de Riemann**.

Théorème 19.7.

La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Démonstration. On utilise le critère de comparaison série-intégrale. Remarquons tout d'abord que si $\alpha\leqslant 0$, le terme général ne tend pas vers 0 et la série ne peut donc converge.
Pour $\alpha>0$, la fonction $f_\alpha : t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^\alpha}dt$. Or, on a vu, dans le chapitre précédent, que cette intégrale converge si et seulement si $\alpha>1$. Ainsi, la série elle-même converge si et seulement si $\alpha>1$. □

Remarque 276. — Même si la série converge, on ne connait pas explicitement la valeur de la somme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ sauf dans certains cas particuliers.

IV. Théorèmes de convergence

1) Théorème de comparaison

Pour majorer (S_n), on commence en général par majorer (u_n). On somme alors ces majorants pour en déduire un majorant de (S_n). On dispose ainsi du théorème suivant :

Théorème 19.8. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que pour tout n,

$$0\leqslant u_n\leqslant v_n$$

Alors, si la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum u_n$ est également convergente. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Démonstration. Si on note $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, on a, pour tout n, $S_n\leqslant T_n$ (addition des inégalités). De plus, la suite (T_n) est également croissante, de limite T. Donc pour tout n, $T_n\leqslant T$. Donc

$$\forall\, n, S_n\leqslant T_n\leqslant T$$

La suite (S_n) est donc majorée, et d'après le théorème précédent, la série $\sum u_n$ converge. L'inégalité précédente donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

□

Exemple 282. — Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant, pour tout n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Puisque la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série convergente, la série $\sum u_n$ est donc convergente, et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant 2$.

On dispose également d'un critère de divergence :

Théorème 19.9.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors, si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum v_n$ diverge également vers $+\infty$.

Exemple 283. — Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Alors, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum u_n$ est également divergente.

2) Equivalence et négligeabilité

On peut enfin utiliser les équivalents :

Théorème 19.10.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Alors, la série $\sum v_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est également convergente.

Exemple 284. — Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n+3^n}$ converge.

Solution. Remarquons que

$$\frac{1}{2^n+3^n} \sim \frac{1}{3^n}$$

Puisque les deux suites sont à termes positifs, et que la série $\sum \dfrac{1}{3^n}$ converge (série géométrique), on en déduit que par équivalent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n+3^n}$ converge.

On dispose également d'un critère en cas de négligeabilité :

Théorème 19.11.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est également convergente.

Exemple 285. — Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2}$ est une série convergente.

Solution. Remarquons que $e^{-n^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n^2}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^2} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

Les deux suites (e^{-n^2}) et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont positives, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann). Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit que la série $\sum e^{-n^2}$ converge.

V. Convergence absolue

1) Définition

Définition 224. — Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Exemple 286. — La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente : en effet, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann).

2) Absolue convergence et convergence

Théorème 19.12.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque 277. — Pour démontrer qu'une série de signe quelconque est convergente, il peut ainsi être judicieux de montrer qu'elle est absolument convergente, et se ramener donc à une série à termes positifs.

3) Convergence et absolue convergence

Remarque 278. — La réciproque n'est pas vraie : une série peut être convergente sans être absolument convergente (on dit que la série est **semi-convergente**).
Par exemple, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente, puisque la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

4) Séries alternées

Un exemple de séries classiques qui ne converge pas forcément absolument, mais qui converge : les séries alternées.

Définition 225. — Soit (u_n) une suite positive, décroissante de limite nulle. La série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ est appelée **série alternée**.

Remarque 279. — De manière plus générale, on appelle série alternée une série $\sum u_n$ où le terme générale $(|u_n|)$ est décroissante de limite nulle. Ainsi, si (u_n) est croissante et négative, de limite nulle, $(|u_n|)$ est croissante, positive de limite nulle.

Théorème 19.13. Théorème spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite positive, décroissante, de limite nulle. Alors la série alternée $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

Démonstration. L'idée est de poser deux suites, a et b définies par $a_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$. On montre alors que (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc ont la même limite. Or, si une suite (c_n) vérifie que (c_{2n}) et (c_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors la suite (c_n) elle-même converge. □

Exercice 261. — Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$ converge. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Solution. La suite définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{2^n}$ est positive, décroissante, de limite nulle. Par théorème des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$ converge. De même, la suite v définie pour tout $n \geqslant 1$ par $v_n = \frac{1}{n}$ est une suite positive, décroissante de limite nulle. Par le même théorème, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge. En revanche,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

5) Etudier une série

Méthode 19.1.

Pour étudier une série $\sum u_n$, on suit différentes étapes :

1. On vérifie si la suite (u_n) tend vers 0. Si non, la série est divergente.
2. On pose la suite des sommes partielles (S_n) et on vérifie si on peut la calculer. Si oui, on peut conclure quant à la convergence, et la valeur de la somme le cas échéant.
3. On vérifie si on peut se ramener à une série de référence (géométrique, Riemann, exponentielle), éventuellement par équivalence. Si oui, on peut conclure quant à la convergence, et la valeur de la somme le cas échéant.
4. On essaie de voir si la série n'est pas alternée, en s'intéressant à $(|u_n|)$.
5. Si tout ce qui précède n'a pas abouti, on essaie de majorer (ou minorer) les sommes partielles (S_n) si la série est à termes positifs, ou alors on s'intéresse à l'absolue convergence sinon.

Remarque 280. — On ne peut pas forcément calculer la somme de la série, même si on arrive à prouver que la série converge.

fFileExiststex/Chap19/Exo19

Exercices

Généralités

Exercice 262. — Pour chacune des suites suivantes (définies pour $n \geqslant 3$), calculer la suite des sommes partielles, et déterminer si la série associée est convergente. Le cas échéant, donner la valeur de la somme.

$$u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \quad v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad w_n = \frac{1}{n^2(n^2-1)}$$

Solution. Constatons que

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Notons pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ par téléscopage.}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{\ln(3)}$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ converge, et

$$\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\ln(3)}$$

De même,

$$v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n)$$

Notons, pour tout entier $n \geqslant 3$, $T_n = \sum\limits_{k=3}^{n} v_k$. Alors,

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) = \ln(2) - \ln(n) \text{ par téléscopage.}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -\infty$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} v_n$ diverge.

Méthode 19.2.

Dans le cas d'une série avec des fractions rationnelles, on essaie de décomposer en éléments simples, et on observe ce qu'il se passe.

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a

$$w_n = \frac{1}{n^2(n^2-1)} = \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1} - \frac{1}{n^2}$$

Notons alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $U_n = \sum\limits_{k=3}^{n} w_k$. Alors,

$$U_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ par téléscopage.}$$

La deuxième somme converge (somme de Riemann), donc (U_n) converge également. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 3} w_n$ converge, et

$$\sum_{k=3}^{+\infty} w_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 263. — Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2-1}$$

Montrer pour tout pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Montrer alors que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Solution.

Méthode 19.3.

Pour montrer qu'une série converge ou diverge, on peut raisonner par comparaison.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $n^2-1 \leqslant n^2$. Par passage à l'inverse, on en déduit donc que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2-1} \geqslant \frac{1}{n^2}$. Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \frac{n}{n^2-1} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs et divergente. Par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Remarque. — On aurait pu traiter la divergence par équivalence. En effet, $\frac{n}{n^2-1} \sim_{+\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann). Par équivalence de suites à **termes positifs**, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ diverge également.

Exercice 264. — Démontrer que $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge.

Solution. Pour tout $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant 1$. Donc, pour $n \geqslant 3$, $4^n \ln(n) \geqslant 4^n$. Par passage à l'inverse, on en déduit donc que

$$\forall\, n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n}$ est à termes positifs et convergente (série géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$). Par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$, qui est également à termes positifs, converge.

Suites et séries

Exercice 265. — Démontrer le théorème spécial des séries alternées

Exercice 266. — Soit u la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Démontrer que pour tout n, $0 < u_n < 1$. Montrer alors que la suite u converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum_n u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$?

Solution.

1. Le premier résultat se montre par récurrence sur n, en constatant que si $u_n \in]0;1[$ alors $u_n - u_n^2 \leqslant u_n < 1$ et $u_n > u_n^2$, donc $0 < u_{n+1} < 1$. De plus, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. En notant l sa limite, et puisque la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, $l = l - l^2$ et donc $l = 0$.
   Bilan : la suite u converge vers 0.
2. Par définition, $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Notons, pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$. D'après ce qui précède,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \text{ par télescopage.}$$

   Puisque la suite (u_n) converge vers 0, (S_n) converge vers u_0. Donc, par définition, la série $\sum_n u_n^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$$

3. Notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$. Par télescopage,

$$T_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$$

   Puisque (u_n) converge vers 0, par composée, $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\infty$$

   La série $\sum_n (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge.

Exercice 267. — (*) On considère la suite (u_n) définie par

$$0 < u_0 < 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$$

1. Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à $]0;1[$.
2. Montrer que pour tout n, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Solution.

1. Montrons par récurrence la proposition P_n : "u_n existe et $0 < u_n < 1$".
   - Pour $n = 0$, puisque $0 < u_0 < 1$, la proposition P_0 est vraie.
   - On suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie. Puisque, par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < 1$, alors

$$0 < u_n^2 < u_n < 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + u_n^2 < 1 + u_n < 2$$

soit, puisque la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$1 < \sqrt{1+u_n^2} < \sqrt{1+u_n} < \sqrt{2}$$

u_{n+1} existe donc. De plus, d'une part,

$$\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2} > 0$$

et d'autre part $-\sqrt{1+u_n^2} < -1$ et donc

$$\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2} < \sqrt{2} - 1 < 1$$

donc $0 < u_{n+1} < 1$: la proposition P_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.

2. On constate que, pour tout entier n (et puisque $u_n < 1$) :

$$u_{n+1} = \frac{(1+u_n)-(1+u_n^2)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}} = \frac{u_n - u_n^2}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}} \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}}$$

Puisque $u_n \geqslant 0$, alors $\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2} \geqslant 2$ et donc

$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$$

On peut alors montrer, par récurrence rapide, que pour tout entier n,

$$u_n \leqslant u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque la suite (u_n) est positive, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et à termes positifs et converge, par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

CHAPITRE 20

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES

Résumé

Dans ce chapitre, on va reprendre l'algèbre linéaire, et on va essayer de trouver une base d'un espace vectoriel dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est diagonale, ou, à défaut, triangulaire supérieure.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de valeur propre :
- connaître la définition de valeur propre, vecteur propre et espace propres ..... □
- connaître le lien entre inversibilité et valeur propre 0 ..... □
- connaître les propriétés des sous-espaces vectoriels ..... □

② Concernant la diagonalisation :
- connaître la définition du polynôme caractéristique ..... □
- connaître le lien entre valeur propre et polynôme caractéristique ..... □
- savoir utiliser les conditions de diagonalisabilité ..... □
- connaître la méthode générale pour diagonaliser un endomorphisme ou une matrice ..... □

③ Concernant la trigonalisation :
- connaître la définition ..... □
- savoir utiliser la conditions de trigonalisabilité ..... □

④ Savoir appliquer la diagonalisation et la trigonalisation :
- pour calculer la puissance n-ième d'une matrice ..... □
- pour résoudre des systèmes récurrents linéaires homogènes ..... □

Nous avons vu dans les chapitres précédentes d'algèbre linéaire qu'un endomorphisme, en dimension finie, peut être représenté par une matrice, et que toutes les matrices d'un même endomorphisme sont semblables.

L'idée de ce chapitre est de pouvoir trouver une base de l'espace vectoriel dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est diagonale, ou bien triangulaire si cela n'est pas possible : c'est ce qu'on appelle la **réduction d'endomorphisme**.

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

I. Eléments propres

1) Valeurs propres, vecteurs propres

Dans cette partie, on se donne E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

Définition 226. — On dit qu'un vecteur non nul u est un **vecteur propre** de f, associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si $f(u) = \lambda u$.

Définition 227. — Si λ est une valeur propre de f, on notera $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ l'ensemble appelé **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le **spectre** de f, et est noté $\text{Sp}(f)$.

Proposition 20.1.

λ est une valeur propre de f si et seulement si E_λ n'est pas réduit à 0.

Démonstration. En effet, s'il existe $u \in E$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$, alors $(f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E$ et donc $u \in E_\lambda$. Réciproquement, si $E_\lambda \neq \{0\}$, soit $u \in E_\lambda$ non nul. Alors, $(f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E$ soit $f(u) = \lambda u$. □

Méthode 20.1.

Pour vérifier qu'un vecteur u donné est un vecteur propre, il suffit de calculer $f(u)$ et de remarquer que $f(u) = \lambda u$ pour un certain élément $u \in \mathbb{K}$.

Exemple 287. — On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que u est un vecteur propre de f.

Solution. On constate rapidement que

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, u est un vecteur propre de f, associé à la valeur propre 2.

Méthode 20.2.

Pour montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, on détermine $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ et on montre que celui-ci n'est pas réduit à 0. On en profitera pour déterminer une base de E_λ.

Exemple 288. — Montrer que 4 est valeur propre de l'endomorphisme de l'exemple 341.

Solution. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 = \text{Ker}(f - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3})$. Alors, X vérifie

$$\begin{aligned} f(X) = 4X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x-y+z \\ x+3y+z \\ 2x+2y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & & & = & 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= & -\frac{1}{2}z \\ y &= & \frac{1}{2}z \\ z &= & z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, E_4 n'est pas réduit à 0 : 4 est une valeur propre de f et

$$E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 268. — Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP'$. Montrer que $1, X, X^2$ et X^3 sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres à déterminer. Quelle est la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$?

Solution. On constate rapidement que

$$f(1) = 0, \quad f(X) = X, \quad f(X^2) = 2X^2 \quad \text{et} \quad f(X^3) = 3X^3$$

Ainsi, 1 est associé à la valeur propre 0, X à la valeur propre 1, X^2 à la valeur propre 2 et enfin X^3 à la valeur propre 3. Dans la base canonique, f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque 282. — Si u est un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $f(\alpha u) = \alpha\lambda u \in \text{Vect}(u)$.
On a donc $f(\text{Vect}(u)) \subset \text{Vect}(u)$: on dit que la droite $\text{Vect}(u)$ est **stable** par f.

2) Valeur propre et inversibilité

Proposition 20.2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective.

Démonstration. En effet, 0 est valeur propre si et seulement si $\text{Ker}(f - 0\text{id}_E)$ n'est pas réduit à 0, c'est-à-dire si $\text{Ker}(f)$ n'est pas réduit à 0, c'est-à-dire si f n'est pas injective. □

Remarque 283. — Ainsi, si, en dimension finie, f n'est pas bijective, alors 0 est nécessairement valeur propre de f.

Exemple 289. — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que 0 est valeur propre de f, et déterminer E_0.

Solution. Remarquons que A n'est pas inversible (en effet, elle possède deux lignes égales). D'après le résultat précédent, on en déduit que 0 est valeur propre de f. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un élément de E_0 si et seulement si $x+y+z=0$, soit $x = -y-z$, avec $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

3) Sous-espaces propres en somme directe

Proposition 20.3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_n}$ sont en sommes directes.

Démonstration. Soient (λ, μ) deux valeurs propres distinctes de f. Soit $u \in E_\lambda \cap E_\mu$. Alors

- $u \in E_\lambda$ donc $(f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E$, c'est-à-dire $f(u) = \lambda u$.
- De même, $u \in E_\mu$ donc $f(u) = \mu u$.

Mais alors, $f(u) = \lambda u = \mu u \Leftrightarrow (\lambda - \mu)u = 0_E$. Or $\lambda \neq \mu$ donc nécessairement $u = 0_E$.
Ainsi, $E_\lambda \cap E_\mu = \{0_E\}$: E_λ et E_μ sont en somme directe. □

Conséquence 14. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors :

- $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$.
- Si on note $\mathscr{B}_1$, ă$\cdots$, $\mathscr{B}_n$ des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_n}$, alors la famille réunissant les bases $\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_n$ est une base de $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}$.

4) Diagonalisation

Remarque 284. — Remarquons que, d'après le résultat précédent, nous avons

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) \leqslant \dim(E)$$

puisque $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}$ est un sous-espace vectoriel de E. On s'intéresse au cas où la dimension $\dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n})$ est égale à $\dim(E)$, c'est-à-dire au cas particulier où $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$.

Définition 228. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Remarque 285. — Ainsi, diagonaliser un endomorphisme, c'est trouver une base de vecteurs propres et les valeurs propres associées.

Exercice 269. — Montrer que 6 est valeur propre de l'endomorphisme f de l'exemple 341, puis diagonaliser f.

Solution. Nous avons vu d'une part que 2 et 4 sont valeurs propres, et $E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Par le même calcul, on peut montrer que $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Enfin, en résolvant le système $f(X) = 6X$, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z = z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $E_6 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Remarquons finalement que $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (puisque composée de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes) de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et dans cette base, la matrice de f est

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Proposition 20.4.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E, diagonalisable. On note $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, dont les valeurs propres associées sont respectivement notées $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors, dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de f est

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

5) Matrice diagonalisable

Remarque 286. — L'ensemble du vocabulaire énoncé pour les endomorphismes se transpose aux matrices carrées. En effet, si A est une matrice carré de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut lui associer l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

Par exemple, $X \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, si et seulement si $AX = \lambda X$.

Proposition 20.5.

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas dans le spectre de A.

Démonstration. En effet, A est inversible si et seulement si A est injective (puisqu'on est en dimension finie). Or A est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, où f est l'endomorphisme canoniquement associé à A. □

Définition 229. — Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque 287. — Cette définition est bien sûr cohérente avec la définition de diagonalisabilité d'un endomorphisme. Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Remarque 288. — Diagonaliser une matrice, c'est donc donner une matrice P inversible, et une matrice D diagonale, telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 270. — En reprenant l'exemple 341, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. On pourra s'intéresser à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

constituée des vecteurs propres trouvés précédemment, et calculer $P^{-1}AP$.

Solution. P est inversible, et par les méthodes classiques, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A est diagonalisable, et $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1}$

II. Diagonalisation

L'exemple précédent a permis de donner une intuition sur la méthode que nous allons appliquer pour diagonaliser, si c'est possible, un endomorphisme.

Il faut cependant une méthode pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.

1) Polynôme caractéristique

Définition 230. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f ou P_f, le déterminant

$$\chi_f(X) = \det(f - X\mathrm{id}_E) \in \mathbb{K}_n[X]$$

On définit de même le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarque 289. — Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré $n = \dim(E)$. En effet, en notant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11-X} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-X \end{vmatrix}$$

qui va bien donner un polynôme de degré n (en utilisant la définition par récurrence du déterminant).

Exemple 290. — En reprenant l'exemple 341, déterminer le polynôme caractéristique de f. Calculer l'image par χ_f de chacune des valeurs propres. Que constate-t-on ?

Solution. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \det(f - X\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= \det(A - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 5-X & -1 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 2 & 2 & 4-X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5-X \\ 1 & 3-X & 1 \\ 4-X & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5-X \\ 0 & 4-X & -4+X \\ 0 & 6-X & -18+9X-X^2 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 4-X & -4+X \\ 6-X & -18+9X-X^2 \end{vmatrix} \\
&= -((4-X)(-18+9X-X^2) - (6+X)(-4+X) - \\
&= -(4-X)(-18+9X-X^2+6+X) \\
&= (4-X)(12-8X+X^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_f(X) = (4-X)(12-8X+X^2)$. On constate alors que $\chi_f(2) = \chi_f(4) = \chi_f(6) = 0$.

2) Valeur propre et polynôme caractéristique

Le résultat vu dans l'exemple précédent est général : $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si λ est une racine de χ_f.

Théorème 20.6.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E.
$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique de f.
On appelle **multiplicité** de la valeur propre λ la multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique.

Méthode 20.3.

Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f on peut

- soit résoudre le système $f(u) = \lambda u$, et chercher pour quelle(s) valeur(s) de λ le système admet une infinité de solution.
- soit déterminer le polynôme caractéristique de f, puis déterminer les racines du polynôme.

Exercice 271. — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs propres de f.

Solution. Déterminons son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \det(f - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} 9-X & -4 \\ 12 & -5-X \end{vmatrix} \\ &= (9-X)(-5-X) - (-4)*(12) \\ &= 3 - 4X + X^2 \end{aligned}$$

On constate que $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. Ainsi, les valeurs propres de f sont 1 et 3.

En dimension finie, nous avons également un lien entre dimension du sous-espace propre, et multiplicité d'une valeur propre, qui vous nous servir :

Proposition 20.7.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f, de multiplicité m_λ, et soit $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ l'espace propre associé. Alors

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$$

Démonstration. Par définition, λ est valeur propre de f si E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc si $\dim(E_\lambda) \geqslant 1$.
On note $d = \dim(E_\lambda)$, et on prend une base $(e_1, \cdots, e_d)$ de E_λ. On complète cette base en une base de E noté $(e_1, \cdots, e_d, e_{d+1}, \cdots, e_n)$.
Dans cette base, la matrice de f s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0_{n-d,d} & A \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$. Mais alors, on a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \lambda \text{id}_E) = \begin{pmatrix} (\lambda - X)I_d & B \\ 0_{n-d,d} & A - XI_{n-d} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\chi_f(X) = \det(f - \lambda \text{id}_E) = (\lambda - X)^d \det(A - XI_{n-d})$$

Ainsi, le polynôme $(\lambda - X)^d$ divise $\chi_f(X)$, ce qui signifie que la multiplicité de λ dans le polynôme $\chi_f(X)$ est supérieure ou égale à d : $m_\lambda \geqslant d$. □

3) Condition de diagonalisabilité

Nous avons vu que les sous-espaces propres étaient en somme directe. Ainsi, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, on a

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_n}) \leqslant \dim(E)$$

Conséquence 15. — f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E.

Démonstration. En effet, dans ce cas, $\dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}) = \dim(E)$ implique, puisque $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}$ est un sous-espace vectoriel de E, que $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$. □

Ce résultat va nous servir de base pour déterminer une condition de diagonalisabilité : f sera diagonalisable si la multiplicité des valeurs propres coïncide avec la dimension du sous-espace propre.

Théorème 20.8. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E.
f est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (c'est-à-dire que ses facteurs irréductibles sont de degré 1), et si, pour chaque valeur propre λ de f, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité de λ.

Démonstration. Admis. □

On a un cas particulier qui nous garantit la diagonalisabilité :

Proposition 20.9. Condition suffisante de diagonalisabilité

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Si $\chi_f(X)$ est scindé et à racines simples, alors f est diagonalisable.

Remarque 290. — ⚠ La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que f est diagonalisable que son polynôme caractéristique sera scindé à racine simple.

Exemple 291. — Montrer que la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Solution. Déterminons le polynôme caractéristique de A_θ :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) - X & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - X \end{vmatrix} \\ &= (\cos(\theta) - X)(\cos(\theta) - X) - \sin(\theta)(-\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta)^2 - 2X\cos(\theta) + X^2 + \sin(\theta)^2 \\ &= X^2 - 2X\cos(\theta) + 1 \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu (voir chapitre Nombres complexes) que les racines de ce polynôme sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ainsi

$$\chi_A(X) = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

est scindé, à racines simples : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Remarquons que A n'a pas de valeur propre réelle, d'après ce qui précède (sauf si $\theta = 0$). Elle ne peut donc pas

être diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque 291. — Ainsi, une matrice ou un endomorphisme peut être diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$. La condition de diagonalisabilité dépend donc fortement du corps de base.

Pour terminer, un théorème sur les matrices diagonalisables ayant une seule valeur propre :

Proposition 20.10.

Les seules matrices diagonalisables n'ayant qu'une seule valeur propre sont les matrices d'homothétie λI_n.

Solution. En effet, si M est diagonalisable avec une seule valeur propre λ, il existe, d'après ce qui précède, une matrice P inversible telle que

$$M = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n$$

4) Méthode générale

La méthode générale de diagonalisation d'une matrice dépend de la matrice (ou de l'endomorphisme) et de l'exercice.

Méthode 20.4.

Pour montrer qu'un endomorphisme f est diagonalisable, on utilise les résultats précédents.

- **1ère étape** : on détermine les valeurs propres.

Pour cela, plusieurs possibilités :

  - On résout le système $f(u) = \lambda u$, d'inconnue u, et on détermine les valeurs de λ pour lesquelles ce système n'est pas de Cramer.
  - On détermine le polynôme caractéristique χ_f et on détermine les racines de χ_f.

- **2ème étape** : on détermine les sous-espaces propres associés.

Pour cela, pour chacune des valeurs propres $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on résout le système $f(u) = \lambda u$ et on détermine l'ensemble des solutions pour en déduire E_λ.

- **3ème étape** : on conclut.

On détermine la dimension de chacun des sous-espaces propres, et

  - on vérifie que la dimension est égale à la multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique ;
  - ou on vérifie que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace E.

Remarque 292. — Si, dans la troisième étape, on constate que la somme des dimensions ne fait pas $\dim(E)$, ou bien que la dimension d'un sous-espace propre n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre associée, on peut conclure que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 272. — Soit $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 & 3 \\ -20 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base ca-

nonique est A. Montrer que f est diagonalisable dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer deux matrices P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Solution. On applique la méthode.

- **1ère étape** : déterminons les valeurs propres de A. Pour cela, on détermine $\chi_A(X) = \det(A - \lambda X I_3)$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} (-14-X) & 12 & 3 \\ -20 & (17-X) & 4 \\ 0 & 0 & (1-X) \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -20 & (17-X) & 4 \\ (-14-X) & 12 & 3 \\ 0 & 0 & (1-X) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{20}\begin{vmatrix} -20 & (17-X) & 4 \\ 0 & X^2-3X+2 & 4-4X \\ 0 & 0 & (1-X) \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(X^2-3X+2) = -(X-1)^2(X-2)
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique : 1 de multiplicité 2, et 2 de multiplicité 1.
Bilan :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1;2\}}$$

- **2ème étape** : on détermine les sous-espaces propres.

On résout tout d'abord le système AX = X pour la valeur propre $\lambda = 1$. En reprenant le travail précédent,

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -20x + 16y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}y + \frac{1}{5}z \\ y = y \\ z = z \end{cases}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)}$$

De même, on résout AX = 2X :

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -20x + 15y + 4z = 0 \\ -4z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

- **3ème étape** : on conclut.

On remarque que $\dim(E_1) = 2$ (les vecteurs ne sont pas colinéaires) et $\dim(E_2) = 1$. Ainsi

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

Ainsi, $\boxed{\text{A est diagonalisable}}$.

Posons $\mathscr{B}$ la base canonique, et $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right)$ la base de vecteur propre. Par construction, on obtient

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

En notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix}4&1&3\\5&0&4\\0&5&0\end{pmatrix}$, d'après la formule du changement de bases :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = PDP^{-1}$$

Remarque. — On peut vérifier (avec SciLab par exemple) que $P^{-1} = \begin{pmatrix}4&-3&-\frac{4}{5}\\0&0&\frac{1}{5}\\-5&4&1\end{pmatrix}$ et $PDP^{-1} = A$.

III. Trigonalisation

Toute matrice (ou tout endomorphisme) n'est pas nécessairement diagonalisable. On peut alors essayer de la rendre non pas diagonale, mais triangulaire.

1) Définition

Définition 231. — On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Définition 232. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. On dit que f est **trigonalisable** si et seulement si sa matrice dans une base est triangulaire supérieure.

2) Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Théorème 20.11. Condition nécessaire et suffisante de trangularisation

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Remarque 294. — Ainsi, pour montrer qu'un endomorphisme est trigonalisable, on détermine son polynôme caractéristique et on vérifie qu'il ne possède que des facteurs irréductibles de degré 1.

Exemple 292. — Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ est trigonalisable.

Solution. En effet

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-X & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-X \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}-X\right)\left(\frac{3}{2}-X\right)+\frac{1}{4} \\ &= X^2-2X+1=(X-1)^2\end{aligned}$$

qui est bien scindé.

Proposition 20.12.

Le théorème de d'Alembert-Gauss garantit que tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé. Ainsi, toute **matrice carré complexe est trigonalisable**.

3) Méthode pratique en basse dimension

Remarque 295. — Dans un exercice, si on indique "réduire" la matrice A, c'est trouver une matrice diagonale ou triangulaire supérieure semblable à A.

Méthode 20.5.

Pour montrer qu'une matrice carré de taille 2 est trigonalisable, il suffit de trouver une valeur propre et un vecteur propre, puis de rajouter un vecteur quelconque non colinéaire à ce vecteur propre. Dans cette base, la matrice sera triangulaire.

Exemple 293. — Réduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -2x-y \end{pmatrix}$$

Solution. On pose $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $\chi_A(X)=\begin{vmatrix} 3-X & 2 \\ -2 & -1-X \end{vmatrix}=(3-X)(-1-X)+4=X^2-2X+1=(X-1)^2$.
Ainsi, 1 est valeur propre. En résolvant $AX=X$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on constate que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1. On constate que puisque $\dim(E_1)=1\neq\dim(\mathbb{R}^2)$, f n'est pas diagonalisable.
On pose alors $\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ qui est une base de $\mathbb{R}^2$ (car les vecteurs ne sont pas colinéaire). Par construction $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus,

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que A est semblable à

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV. Applications

1) SciLab

SciLab permet de déterminer le spectre d'une matrice, et obtenir également la matrice P composée de vecteur propre. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que SciLab renvoie une base de vecteurs propres de norme 1.

```
// On définit la matrice A
A=[5 -1 1; 1 3 1; 2 2 4]

// Première instruction : obtenir simplement les valeurs propres
spec(A)
```

```
ans  =

   6.
   4.
   2.
```

```
// Deuxième instruction : on récupère P et D :
[vec,val]=spec(A)
// vec : matrice P
// val : matrice D
```

```
val  =

   6.    0     0
   0     4.    0
   0     0     2.
vec  =

   0.4082483    0.4082483  - 0.4082483
   0.4082483  - 0.4082483  - 0.4082483
   0.8164966  - 0.8164966    0.8164966
```

2) Trace, déterminant et valeurs propres

Il y a un lien profond entre les valeurs propres et deux éléments caractéristiques d'une matrice ou d'un endomorphisme : sa trace et son déterminant.

Proposition 20.13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E **trigonalisable** ou **diagonalisable**. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Alors

$$\det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Démonstration. Puisque f est trigonalisable, sa matrice dans une certaine base de E est triangulaire et s'écrit

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, par définition de la trace et du déterminant, on en déduit bien que $\mathrm{Tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et $\det(f) = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$. □

Remarque 296. — Ce résultat s'étend aux matrices trigonalisables.

3) Puissances de matrices

Dans le cas où une matrice A est diagonalisable, on peut calculer A^n assez facilement.

Méthode 20.6.

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

① On détermine une base de vecteurs propres $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^n$.

② On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C}$. Puisque A est diagonalisable, la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

③ On calcule D^n pour tout entier n.

④ On revient à A^n en montrant que, pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exemple 294. — Déterminer A^n pour tout entier n, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution. On commence par déterminer les valeurs propres de A. Le polynôme caractéristique est, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+2} \times (2-X) \times \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)((1-X)^2 - 1) \\ &= (2-X)X(X-2) = -X(X-2)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 0 et 2. Déterminons les sous-espaces propres.

- Déterminons E_0 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \quad \Leftrightarrow \quad AX = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ & 2y & & & = & 0 \\ x & & + & z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= & -z & & \\ y &= & 0 & , & z \in \mathbb{R} \\ z &= & z & & \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons E_2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \quad \Leftrightarrow \quad AX = 2X$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2x & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 2y & = & 0 \\ x & & & + & z & - & 2z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array} \right. , \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi,

$$\boxed{E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

On constate que $\dim(E_0) + \dim(E_2) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (les vecteurs propres de E_2 sont bien libres car non colinéaires). Ainsi, A est diagonalisable.

- **Diagonalisation** :

On pose $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\mathscr{C}$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$. Posons P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{C}$. Alors $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis, après calcul, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Enfin, par construction, on a

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- **Conclusion** :

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on constate que

$$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

que l'on peut prouver rapidement par récurrence. Puisque D est diagonale, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

puis

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}}$$

4) Systèmes récurrents linéaires homogènes

On s'intéresse dans cette partie à des systèmes d'équations linéaires homogènes dont les inconnues sont des suites à déterminer.

Exemple 295. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n &+ 4v_n \\ v_{n+1} &= -2u_n &+ 3v_n \end{cases}$$

Méthode 20.7.

Lorsqu'on dispose d'un système récurrent linéaire homogène :

① On pose U_n le vecteur colonne des inconnues (par exemple, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$), et on introduit la matrice A vérifiant $U_{n+1} = AU_n$.
② On montre par récurrence sur n que $U_n = A^n U_0$.
③ On détermine A^n (par exemple, par la méthode précédente).
④ On conclut.

Exemple 296. — Déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0 en reprenant l'exemple 295.

Solution. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On a bien, pour tout entier n, $U_{n+1} = AU_n$.
On montre par récurrence sur n que pour tout entier n, P_n : "$U_n = A^n U_0$" :

- Pour $n = 0$, on a $A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$. P_0 est donc vraie.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certaine entier n. Montrons alors que P_{n+1} est vraie. En effet, par définition de A :
$$U_{n+1} = AU_n \underset{\text{H.R.}}{=} A(A^n U_0) = A^{n+1} U_0$$
P_{n+1} est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc bien démontré que $U_n = A^n U_0$ pour tout entier n.

- **Détermination de A^n** :

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -3-X & 4 \\ -2 & 3-X \end{vmatrix} = (-3-X)(3-X)+8 = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

Les valeurs propres sont donc 1 et -1. Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, A est diagonalisable.
On détermine alors les sous-espaces propres. Après calcul :

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

En posant $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{C}$, on a respectivement

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Mais alors, pour tout entier n :

$$A^n = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1+2(-1)^n & 2+2(-1)^{n+1} \\ -1+(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} \end{pmatrix}}$$

- **Conclusion** :

On revient à U_n : $U_n = A^n U_0$ et donc

$$\boxed{\forall\, n, \quad u_n = (-1+2(-1)^n)u_0 + (2+2(-1)^{n+1})v_0 \quad \text{et} \quad v_n = (-1+(-1)^n)u_0 + (2+(-1)^{n+1})v_0}$$

fFileExiststex/Chap20/Exo20

Exercices

Généralités

Exercice 273. — Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution. Soit χ_A le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} -4-X & -2 & -4 \\ 1 & -X & 2 \\ 3 & 1 & 4-X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -X & 2 \\ -4-X & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 4-X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -X & 2 \\ 0 & -X^2-4X-2 & 4+2X \\ 0 & 1+3X & -X-2 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -X^2-4X-2 & 4+2X \\ 1+3X & -(X+2) \end{vmatrix} \\
&= -(X+2)\begin{vmatrix} -X^2-4X-2 & 2 \\ 1+3X & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(X+2)(X^2+4X+2-2(1+3X)) \\
&= -(X+2)(X^2-2X) = -X(X-2)(X+2)
\end{aligned}$$

Ainsi, le spectre est $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\}$. Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, A est diagonalisable.
Déterminons les sous-espaces propres :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}$ si et seulement si

$$\begin{cases} -2x-2y-4z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ 3x+y+6z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-2y-4z=0 \\ -4y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-2z \\ y=0 \\ z=z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0$ si et seulement si

$$\begin{cases} -4x-2y-4z=0 \\ x+2z=0 \\ 3x+y+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4x-2y-4z=0 \\ -2y+4z=0 \\ -2y+4z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4x-2y-4z=0 \\ -2y+4z=0\,, \quad z\in\mathbb{R} \\ z=z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-2z \\ y=2z \\ z=z \end{cases}$$

Ainsi, $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} -6x-2y-4z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -6x-2y-4z=0 \\ -14y+8z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-\frac{6}{7}z \\ y=\frac{4}{7}z \quad , \quad z\in\mathbb{R} \\ z=z \end{cases}$$

Ainsi, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, en posant $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$, $\mathscr{C}$ est une base de vecteurs propres de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et alors $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 274. — A quelle condition sur a la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 275. — Diagonaliser la matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution. Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \det(A - XI_3)\\ &= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2-5X & 0 & 1\\ 9 & 5-5X & -3\\ 6 & 0 & 3-5X\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{5}(-1)^{2+2}(5-5X)\begin{vmatrix} 2-5X & 1\\ 6 & 3-5X\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{5}5(1-X)((2-5X)(3-5X)-6)\\ &= (1-X)(25X^2-25X) = -25X(X-1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0, de multiplicité 1, et 1 de multiplicité 2.

On détermine alors les espaces propres :

- $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in E_0$ si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}z = 0\\ \frac{9}{5}x + y - \frac{3}{5}z = 0\\ \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}z = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z\\ y = \frac{3}{2}z\\ z = z\end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

  Ainsi, $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ -2\end{pmatrix}\right)$ et $\dim(E_0) = 1$ (vecteur non nul).

- $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in E_1$ si et seulement si

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}z = 0\\ \frac{9}{5}x - \frac{3}{5}z = 0\\ \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}z = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}z\\ y = y\\ z = z\end{cases}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

  Ainsi, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\right)$ et puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires, $\dim(E_1) = 2$.

Ainsi, on constate que $\dim(E_0) + \dim(E_1) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$. Ainsi, par théorème, A est diagonalisable.

En posant $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\right)$, $\mathscr{C}$ est une base de vecteurs propres e $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et par changement de base, on en déduit que

$$\boxed{A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}}$$

Exercice 276. — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (u_1, u_2, u_3) est $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3\\ 5 & 1 & -5\\ -3 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que 1 est valeur propre triple de f.
2. Montrer que E_1 est de dimension 1. On notera e_1 une base de E_1. Que peut-on en déduire ?
3. On note $F = \text{Ker}((f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$. Montrer que $\dim(F) = 2$ et que $e_1 \in F$. Déterminer e_2 tel que (e_1, e_2) soit une

base de F.

4. Montrer que (e_1, e_2, u_1) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, u_1).

Solution.

1. Déterminons le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) &= \det(M - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 2-X & 2 & -3 \\ 5 & 1-X & -5 \\ -3 & 4 & -X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2-X \\ -5 & 1-X & 5 \\ -X & 4 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2-X \\ 0 & -7-3X & 5+5X \\ 0 & 12-2X & X^2-2X-9 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{9}(-3)\begin{vmatrix} -7-3X & 5+5X \\ 12-2X & X^2-2X-9 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}((X^2-2X-9)(-7-3X)-(12-2X)(5+5X)) \\
&= \frac{1}{3}(-3X^3+9X^2-9X+3) = -(X^3-3X^2+3X-1) = -(X-1)^3
\end{aligned}$$

Ainsi 1 est bien valeur propre triple.

2. Soit $X = (x, y, z) \in E_1$. Alors

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-5z=0 \\ -3x+4y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -10y+10z=0 \\ 10y-10z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z, \quad z\in\mathbb{R} \\ z=z \end{cases}$$

Ainsi, $E_1 = \text{Vect}((1,1,1))$ et puisque le vecteur est non nul, on en déduit que $\dim(E_1) = 1$.
Puisque $\dim(E_1) \neq 3$, qui est la multiplicité de la valeur propre, on en déduire que M n'est pas diagonalisable.

3. Soit N la matrice de $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et Q la matrice de $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ dans la base canonique. Alors $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = N^2 = \begin{pmatrix} 20 & -10 & -10 \\ 20 & -10 & -10 \\ 20 & -10 & -10 \end{pmatrix}$. Soit alors $X = (x, y, z) \in \ker((f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$. On obtient le système

$$\begin{cases} 20x-10y-10z=0 \\ 20x-10y-10z=0 \\ 20x-10y-10z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$$

Ainsi, $F = \ker((f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = \text{Vect}\left(\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)\right)$ qui est bien de dimension 2, et $e_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) \in F$.
En posant $e_2 = (1, 2, 0)$ par exemple, (e_1, e_2) est une famille libre de F (car vecteurs non colinéaires) et est donc une base fe F.

4. Montrons que la famille (e_1, e_2, u_1) est libre. Puisqu'elle est de cardinal 3, celui de R^3, on pourra conclure que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda e_1+\mu e_2+\nu u_1=0$. Mais alors

$$\begin{aligned}\lambda e_1+\mu e_2+\nu u_1=0 &\iff \begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0\\ \lambda+2\mu+\nu=0\\ \lambda+\nu=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0\\ \mu=0\\ -\mu+\nu=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\\ \nu=0\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, la famille est libre, et de bon cardinal : (e_1,e_2,u_1) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, on a $f(e_1)=e_1$, $f(e_2)=(6,7,5)=5e_1+e_2$ et $f(u_1)=(2,5,-3)=-3e_1+4e_2+u_1$. Ainsi, dans la base (e_1,e_2,u_1), la matrice de f est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,u_1)}(f)=\begin{pmatrix}1&5&-3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

Sujets de concours

Exercice 277 (ATS 2016)**.** — On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{U}=(u_1,u_2,u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{U}$.

1. (a) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (c) Déterminer les valeurs propres λ_1,λ_2 et λ_3 de A. On choisira $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.
   (d) Déterminer des vecteurs propres v_1,v_2 et v_3 de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ et tels que leur première composante soit égale à 1.
   (e) Montrer que (v_1,v_2,v_3) est une base de E.
2. (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P, tels que $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$.
   (b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif, on a

$$\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}a_n&a_{n+1}&a_n\\a_{n+1}&a_{n+2}&a_{n+1}\\a_n&a_{n+1}&a_n\end{pmatrix},$$

   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner a_1,a_2 et a_3.
5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\mathrm{B}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$, avec $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$.
   (b) Diagonaliser B en déterminant une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ avec $\mathrm{B}=\mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q}^{-1}$.
   (c) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q.
   (d) Pour tout entier strictement positif n, calculer B^n en fonction de n.
6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\mathrm{B}^{n-1}\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix}$.
   (b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Solution.

1. (a) Remarquons que, par définition, dans la base $\mathscr{U}$, $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de l'image. Celle-ci n'est pas libre (car deux fois le même vecteur), mais la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre (car vecteurs non colinéaires).
Ainsi, $\boxed{(u_2, u_1+u_2+u_3) \text{ forme donc une base de Im } (f)}$.
$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{U}$ est dans le noyau de A si et seulement si $AX = 0$, ce qui, après calcul, donne $x = -z, y = 0$. Ainsi,
$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_1 - u_3)}$$

   (b) On note χ_A le polynôme caractéristique. On a alors
$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix}-X & 1 & 0\\ 1 & 1-X & 1\\ 0 & 1 & -X\end{vmatrix}\\ &= -X\begin{vmatrix}1-X & 1\\ 1 & -X\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -X\end{vmatrix}\\ &= -X^3 + X^2 + 2X\end{aligned}$$

   (c) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Or, $\chi_A(X) = -X(X-2)(X+1)$. Ainsi
$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}}$$

   (d) On détermine les sous-espaces propres pour chacune des valeurs propres. Le cas $\lambda_2 = 0$ a été traité en a), puisqu'il s'agit du noyau. Ainsi, on prend $v_2 = e_1 - e_3$.
Par un raisonnement classique, on a
$$E_2 = \text{Vect}(u_2 + 2u_2 + u_3) \quad \text{et} \quad E_{-1} = \text{Vect}(u_1 - u_2 + u_3)$$
Ainsi, on pose $v_1 = u_1 - u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 - u_3$ et $v_3 = u_1 + 2u_2 + u_3$.

   (e) Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. A est donc diagonalisable, et donc (v_1, v_2, v_3) forme une base de vecteurs propres de E.

2. (a) Puisque A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$, avec
$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
P représentant la matrice de passage de la base $\mathscr{U}$ à la base (v_1, v_2, v_3) et D la matrice de f dans cette base.

   (b) On écrit $(P|I_3)$ et on inverse. On obtient alors
$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

3. Après calcul,
$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

4. Soit P_n la proposition de récurrence : "$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$ pour certains réels a_n".

•Pour $n=1$, on a $A^1 = A$, qui s'écrit bien $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 1$.

•Supposons alors que P_n est vraie. On peut donc écrire $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$. Mais alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &\underset{\text{H.R.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ 2a_n + a_{n+1} & 2a_{n+1} + a_{n+2} & 2a_n + a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+2} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en supposant que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.
Bilan : la proposition P_n est vraie pour tout n, et la suite (a_n) vérifie la relation $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout entier n.

5. (a) Remarquons que $a_{n+2} = 1 \times a_{n+1} + 2 \times a_n$ et $a_{n+1} = 1 \times a_{n+1} + 0 \times a_n$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(b) Le polynôme caractéristique est $\chi_B(X) = (1-X)(-X) - 2 = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. Ainsi, B est diagonalisable (polynôme scindé à racines simples) et ses valeurs propres sont -1 et 2. Après calculs, on a

$$E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, on peut écrire $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Après calculs, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(d) On a alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $B^n = Q\Delta^n Q^{-1}$.
On a donc $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1, \quad B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}}$$

6. (a) Montrons le résultat P_n :"$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$" par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Pour $n=1$, le résultat est vraie puisque $B^0\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
- Supposons le résultat vrai pour un certain entier n fixé. Mais alors, puisque

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{B}(\mathrm{B}^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathrm{B}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Le résultat est donc vrai au rang $n+1$ et la propriété est héréditaire.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Ainsi, pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}+2^n & -2(-1)^{n-1}+2^n \\ (-1)^n+2^{n-1} & 2(-1)^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}+2^n \\ (-1)^n+2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n+2^{n-1}}{3}}$$

Exercice 278 (ATS 2014)**.** — Soit E l'espace vectoriel des matrices $2x2$ avec la base

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

On notera par une matrice unicolonne les composantes d'un vecteur de E dans une base. Ainsi, la matrice unicolonne des composantes de $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. et g l'endomorphisme de E défini par $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $\mathrm{P_A}$.
3. Montrer que A admet deux valeurs propres distinctes λ et μ à calculer (Choisir $\lambda < \mu$). Quelles sont les multiplicités de λ et μ comme racines de $\mathrm{P_A}$?
4. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de base du sous-espace propre E_λ. On choisira des matrices dont la premier composante non nulle est 1.
5. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de base du sous-espace propre E_μ. On choisira des matrices dont la premier composante non nulle est 1.
6. Peut-on déduire de ce qui précède que A est diagonalisable ?
7. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. (Ne pas calculer P^{-1}).

Partie B

1. Donner la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique P_B.
3. Montrer que B admet trois valeurs propres distinctes, 0, α et β (Choisir $\alpha < \beta$). Quelles sont les multiplicités de 0, α et β comme racines de P_B ?
4. Déterminer la matrice unicolonne des composantes V_0 dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteurs de base v_0 du sous-espace propre E_0. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.
5. Déterminer la matrice unicolonne des composantes V_α dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteurs de base v_α du sous-espace propre E_α. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.
6. Déterminer la matrice unicolonne des composantes V_β dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteurs de base v_β du sous-espace propre E_β. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.
7. Peut-on déduire de ce qui précède que B est diagonalisable ? Justifier.
8. Soit la famille de vecteurs $\mathscr{B}_2 = (v_0, e_1, v_\alpha, v_\beta)$. Montrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de E.
9. Calculer les composantes des images par g des vecteurs de $\mathscr{B}_2$, d'abord dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}_2$.
10. En déduire l'expression de la matrice C de g dans la base $\mathscr{B}_2$.

CHAPITRE 21

COURBES PARAMÉTRÉES

Résumé

Dans ce chapitre, on va étudier et représenter des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ces courbes sont très souvent utilisées en Physique et en SI (par exemple, pour représenter la trajectoire d'un objet en fonction du temps).

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître les notions générales :

- connaître la définition de fonctions vectorielles, et les propriétés (dérivabilité, ⋮) ..... □
- connaître la définition du vecteur vitesse, du vecteur accélération et comment les obtenir ..... □
- connaître la définition de tangente, de vecteur tangent et de droite normale ..... □
- savoir obtenir un vecteur tangent et un vecteur normal ..... □

② Savoir étudier une courbe paramétrée :

- utiliser les symétries pour réduire l'intervalle d'étude ..... □
- déterminer les branches infinies lorsqu'il y en a ..... □
- savoir dresser un tableau de variations conjointes ..... □
- savoir tracer une courbe paramétrée en utilisant toutes les propriétés obtenues ..... □

③ Savoir calculer la longueur d'une courbe ..... □

L'idée de ce chapitre est de représenter des courbes paramétrées, et de faire le lien avec la représentation du mouvement en physique, où l'on récupère régulièrement non pas y en fonction de x, mais x et y en fonction du temps t.

Dans l'ensemble de ce chapitre, et quand c'est nécessaire, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Généralités

1) Fonctions vectorielles

Définition 233. — On appelle **fonction vectorielle** une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple, une fonction vectorielle du plan est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 297. — ⚠ Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ est une fonction vectorielle du plan, $f(t)$ (pour $t \in \mathrm{I}$) est un point. En général, on note, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x(t)$ l'abscisse et $y(t)$ l'ordonnée du point $f(t)$.

Définition 234. — Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle du plan. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on note $(x(t), y(t))$ les coordonnées du point $f(t)$. Alors, on appelle **courbe paramétrée** par f l'ensemble des points

$$\Gamma = \left\{(x(t), y(t)), \quad t \in \mathrm{I}\right\}$$

On dit également que Γ est le **support** de f, et f est un **paramétrage** de Γ.

Exemple 297 (Courbe d'une fonction)**.** — Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeur réelle, son support est $\left\{(x, f(x)), \quad x \in \mathrm{I}\right\}$, c'est-à-dire que son support est paramétrée par la courbe

$$g : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \end{array}$$

Exemple 298 (Droite et cercle)**.** — On a vu dans le chapitre de géométrie dans le plan qu'une droite peut être paramétrée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases}$$

où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ désigne un vecteur directeur de la droite, et (x_0, y_0) un point quelconque de la droite.

De même, le cercle de centre (a, b) et de rayon r peut être paramétrée par la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{cases}$$

Remarque 298. — Un même support peut avoir plusieurs paramétrages possibles : par exemple, une droite admet une infinité de paramétrage (on peut par exemple changer le vecteur directeur par un autre - colinéaire au premier).

2) Vecteur vitesse, vecteur accélération

Remarque 299. — Etudier la continuité (respectivement la dérivabilité, ou les limites) d'une fonction vectorielle, c'est équivalent à étudier la continuité (resp. la dérivabilité ou les limites) de chacune des fonctions coordonnées, qui elles sont à valeurs réelles.

Remarque 300. — L'ensemble des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

Exemple 299. — Si $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ est une fonction vectorielle du plan, f est continue en t si et seulement si x est continue en t et y est continue en t.

f est dérivable en t si et seulement si x et y sont dérivables en t. Dans ce cas, $f'(t) = (x'(t), y'(t))$. On constate alors que $f'(t)$ peut être vu comme les coordonnées d'un vecteur.

Définition 235 (Vecteur vitesse)**.** — Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, et $t_0 \in \mathrm{I}$. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on note $\mathrm{M}(t)$ le point de paramètre t, c'est-à-dire de coordonnées $f(t)$ (tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = f(t)$). On suppose que f est dérivable en t_0. On appelle **vecteur vitesse** de f en t_0 le vecteur $f'(t_0)$.

Si $f'(t_0) = \vec{0}$, on dit que le point $\mathrm{M}(t_0)$ est **stationnaire** ou singulier. Sinon, on dit qu'il est **régulier**.

Remarque 301. — ⚠ Attention : $f'(t_0)$ est un vecteur. Si f est une fonction vectorielle du plan, $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Définition 236 (Vecteur accélération)**.** — Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, et $t_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que f est deux fois dérivable en t_0. On appelle **vecteur accélération** de f en t_0 le vecteur $f''(t_0)$.

Exemple 300. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{cases}$$

Donner vecteur vitesse et vecteur accélération de f au point $t \in \mathbb{R}$. Montrer que dans ce cas, pour tout réel t, $f'(t)$ et $f''(t)$ sont orthogonaux, et que $t \mapsto ||f'(t)||$ est constante.

Solution. Remarquons que x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f possède un vecteur vitesse et un vecteur accélération en tout point $t \in \mathbb{R}$, et on a

$$f'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)) \quad \text{et} \quad f''(t) = (-r\cos(t), -r\sin(t))$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) \cdot f''(t) = -r\sin(t)(-r\cos(t)) + r\cos(t)(-r\sin(t)) = 0$$

et

$$||f'(t)|| = \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = r$$

⮌. — En cinétique, une fonction vectorielle peut être vue comme le vecteur position d'un point mobile en fonction du temps. Le support est alors la trajectoire de ce point, et c'est cela qui justifie la terminologie de vecteur vitesse et de vecteur accélération.
Le mouvement sera uniforme si $t \mapsto ||f'(t)||$ est constant, et rectiligne si le support est une droite.

3) Tangente et vecteur tangent

L'idée est d'étendre la notion de tangente connue dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour le cas des fonctions vectorielles du plan.

Définition 237. — Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle du plan. On note, pour tout $t \in I$ $f((t) = (x(t), y(t))$. Soit $M(t_0)$ le point de paramètre t_0 de la courbe Γ paramétrée par f.

On s'intéresse à la limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$$

- Si cette limite existe et est finie, alors la droite d'équation $y = a(x - x(t_0)) + y(t_0)$ (où a représente la limite précédente) est appelée la **tangente** à Γ en $M(t_0)$.
- Si cette limite est infinie, la droite d'équation $x = x(t_0)$ est la tangente (verticale) à Γ en $M(t_0)$.

On appellera alors **normale** à Γ au point $M(t_0)$ la droite, passant par $M(t_0)$ est perpendiculaire à la tangente en Γ en $M(t_0)$.

On peut obtenir rapidement un vecteur directeur de la tangente en dérivant simplement :

Proposition 21.1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle du plan suffisamment dérivable. Soit $t_0 \in I$. Un vecteur directeur de la tangente à la courbe paramétrée par f au point de paramètre t_0 est $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ si celui-ci n'est pas nul, ou bien $f^{(n)}(t_0)$ si celui-ci n'est pas nul mais que $f'(t_0), f''(t_0), \cdots, f^{(n-1)}(t_0)$ sont nuls.

On appelle **vecteur tangent** tout vecteur directeur de la tangente.

Démonstration. Cela repose sur les développements limités : on écrit le développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de t_0 et on cherche la première fois où l'un des coefficients n'est pas nul. □

Exemple 301. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos^2(t) \\ y(t) = \sin^2(t) \end{cases}$$

Déterminer l'équation de la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Déterminer un vecteur normal en ce point.

Solution. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = -2\sin(t)\cos(t) \\ y'(t) = 2\cos(t)\sin(t) \end{cases}$$

On a alors $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1, 1)$. Ainsi, $(-1, 1)$ est un vecteur directeur de la tangente, et donc $\frac{1}{-1} = -1$ est le coefficient directeur. L'équation de la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est donc $y = -\left(x - x\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -x + 1$.

II. Etude d'une courbe paramétrée du plan

Pour étudier une courbe paramétrée du plan, il faut tout d'abord déterminer l'ensemble des éléments caractéristiques de la courbe : variations, symétrie,...

Dans l'ensemble de cette partie, on se donne $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle, dont les coordonnées sont notées $(x(t), y(t))$ pour $t \in I$, et on note Γ son support. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ pour $t \in I$.

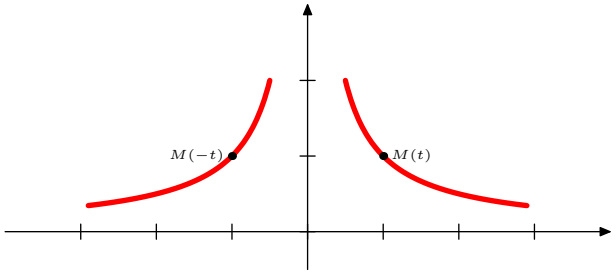
1) Symétries

On va utiliser les symétries des fonctions x et y pour en déduire des symétries de Γ.

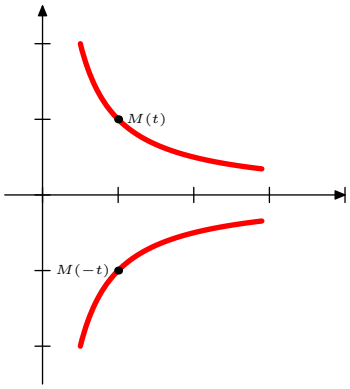
Proposition 21.2.

On suppose que I est symétrique par rapport à 0.

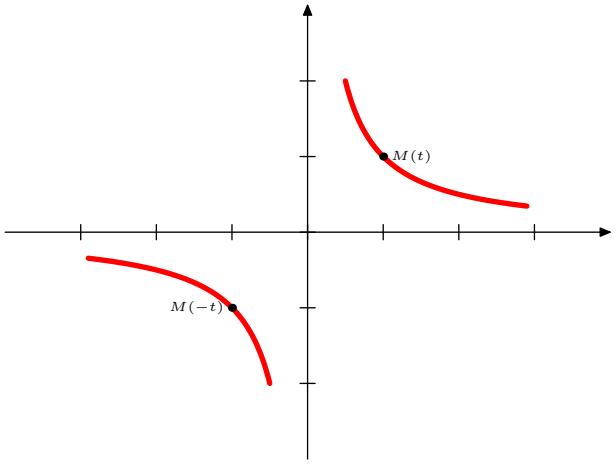
- Si, pour tout $t \in I$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus.
- Si, pour tout $t \in I$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



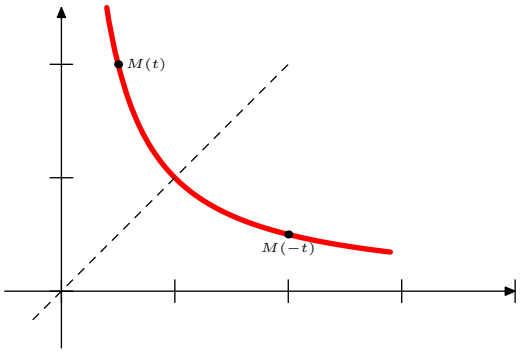
- Si, pour tout $t \in I$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



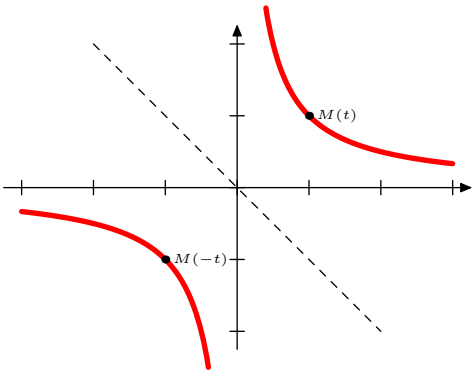
- Si, pour tout $t \in I$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'origine.



- Si, pour tout $t \in I$, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



- Si, pour tout $t \in I$, $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$, alors les points M(t) et M($-t$) sont symétriques par rapport à la droite $y = -x$.



Pour chacun des cas précédents, on peut réduire l'intervalle d'étude en ne l'étudiant que sur la partie positive de I.

On peut également utiliser les périodicités pour réduire l'intervalle d'étude.

Proposition 21.3.

Si x et y sont périodiques de période T, il suffit d'étudier x et y sur un intervalle de longueur T.

Exemple 302. — Si x et y sont 2π-périodiques, il suffit de les étudier sur $[0;2\pi]$, ou sur $[-\pi;\pi]$.

Enfin, on peut utiliser des symétries lorsqu'on a réduit suffisamment l'intervalle.

Proposition 21.4.

Si on a restreint l'étude de x et y sur l'intervalle $[a;b]$, on peut calculer $x(a+b-t)$ et $y(a+b-t)$. Les résultats obtenus permettent d'obtenir d'autres symétriques en se ramenant aux symétries vues plus haut.

On obtient ainsi la méthode suivante :

Méthode 21.1.

Pour déterminer l'intervalle d'étude de x et y :

① On déterminer la périodicité minimale commune de x et y.

② On utilise les parités pour réduire l'intervalle d'étude.

③ Enfin, on utilise la dernière proposition jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de réduire l'intervalle d'étude.

Exemple 303 (Astroïde)**.** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction vectorielle définie pour tout t par

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

Déterminer l'intervalle d'étude minimal.

Solution. Par 2π-périodicité de cos et sin, x et y sont 2π-périodiques. On peut donc étudier x et y sur $[-\pi;\pi]$.

De plus, x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, et on peut restreindre l'intervalle à $[0;\pi]$.

Remarquons que $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On restreint l'intervalle à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$. La courbe est symétrique par rapport à la droite $y = x$, et on peut restreindre l'intervalle à $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

2) Branches infinies

La méthode de détermination des branches infinies est la même que celle connue dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, exceptée qu'il faut tenir compte de x et y simultanément.

Définition 238. — Soit t_0 une extrémité de I (éventuellement infinie). Alors

- la courbe paramétrée f admet une branche infinie en t_0 si et seulement si
$$\lim_{t\to t_0} ||f(t)|| = +\infty$$
- la droite (D) est asymptote à la courbe de f en t_0 si et seulement si
$$\lim_{t\to t_0} d(\mathrm{M}(t),(\mathrm{D})) = 0$$
ce qui est équivalent à, si (D) : $ax + by + c = 0$:
$$\lim_{t\to t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$$

Méthode 21.2.

La méthode est similaire à celle déjà vue :

- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, la courbe admet la droite $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, la courbe admet la droite $x = x_0$ comme asymptote verticale.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$:
  - ◇ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - ◇ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - ◇ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$:
    - — la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$.
    - — la courbe admet une branche parabolique de direction la droite $y = ax$ si
    $$\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$$

3) Variations conjointes

Une fois l'intervalle d'étude réduit, on étudie les fonctions x et y sur cet intervalle, et on représente les variations sur un même tableau de variations du type :

t	0	$\cdots$
$x'(t)$	$+$	$\cdots$
$x(t)$	0 $\nearrow$	$\cdots$
$y(t)$	1 $\searrow$	$\cdots$
$y'(t)$	$-$	$\cdots$
Tangente		$\cdots$

Pour chaque point important (extrémité ou point d'annulation d'une des dérivées), on exprime un vecteur tangent, pour connaître la direction de la courbe.

Exemple 304. — Dresser le tableau de variations conjointes de l'astroïde.

Solution. D'après l'étude précédente, on dresse le tableau de variations sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$:

$$x'(t)=-3\sin(t)\cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t)=3\cos(t)\sin^2(t)$$

Sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$, $x'(t)<0$ et $y'(t)>0$.

En $\frac{\pi}{4}$, on a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\frac{\sqrt{2}}{4}(-1;1)$. En 0, $f'(0)=(0,0)$. En calculant x'' et y'', on constate alors que

$$x''(t)=-3(\cos^3(t)-2\sin(t)^2\cos(t)) \quad \text{et} \quad y''(t)=3(-\sin^3(t)+2\cos(t)^2\sin(t)$$

et donc $f''(0)=(-3,0)$ et la tangente est donc horizontale.

On obtient le tableau de variations conjointes suivant :

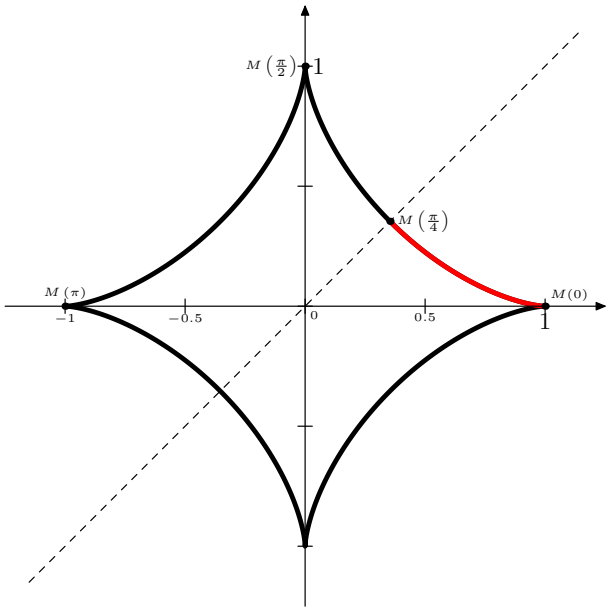
t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	$-$		
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	$+$		
Tan.	Horiz		$(-1,1)$

4) Tracé

Une fois le tableau de variations conjointes obtenu, on peut tracer la courbe, d'abord sur le plus petit intervalle obtenu et en utilisant les tangentes obtenues, puis en utilisant les différentes symétries détectées.

Exemple 305. — Tracer la courbe de l'astroïde.

Solution. On trace d'abord la courbe sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, puis dans l'ordre : symétrie par rapport à la droite $y=x$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On obtient alors la courbe suivante :



Méthode 21.3.

Pour étudier et tracer une courbe paramétrée :

① On réduit l'intervalle d'étude en utilisant les symétries, et périodicité.

② On étudie les variations conjointes de x et y sur l'intervalle précédemment obtenu, en n'omettant pas d'indiquer les vecteurs tangents aux points importants.

③ On trace enfin la courbe en utilisant les résultats précédents, tout d'abord sur l'intervalle d'étude, puis sur le domaine de définition en utilisant les variations.

Exercice 279 (Cardioïde)**.** — Soit f la fonction vectorielle du plan définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\begin{cases}x(t)=2\cos(t)(1+\cos(t))\\ y(t)=2\sin(t)(1+\cos(t))\end{cases}$$

Représenter la courbe de f.

Solution. Constatons tout d'abord que x et y sont 2π-périodiques. On étudie alors f sur $[-\pi;\pi]$, symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $t\in[-\pi;ă\pi]$, en utilisant la parité de cos et l'imparité de sin :

$$x(-t)=x(t) \quad \text{et} \quad y(-t)=-y(t)$$

Ainsi, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$. On constate enfin que $x(\pi-t)$ et $y(\pi-t)$ ne peuvent s'exprimer en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
Bilan : on étudie f sur $[0;\pi]$ et on utilise la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin(t)(1+\cos(t)) + 2\cos(t)(-\sin(t)) \\ &= -2\sin(t)(1+2\cos(t)) \\ \text{et } y'(t) &= 2\cos(t)(1+\cos(t)) + 2\sin(t)(-\sin(t)) \\ &= 2\cos(t) + 2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) \\ &= 2(\cos(t)+\cos(2t)) \\ &= 4\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarquons que $1+2\cos(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(t) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc, sur $[0;\pi]$, $1+2\cos(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

De même, sur $[0;\pi]$, $\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \geqslant 0$ si et seulement si $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est toujours positif sur $[0;\pi]$.

On obtient le tableau de variations suivant :

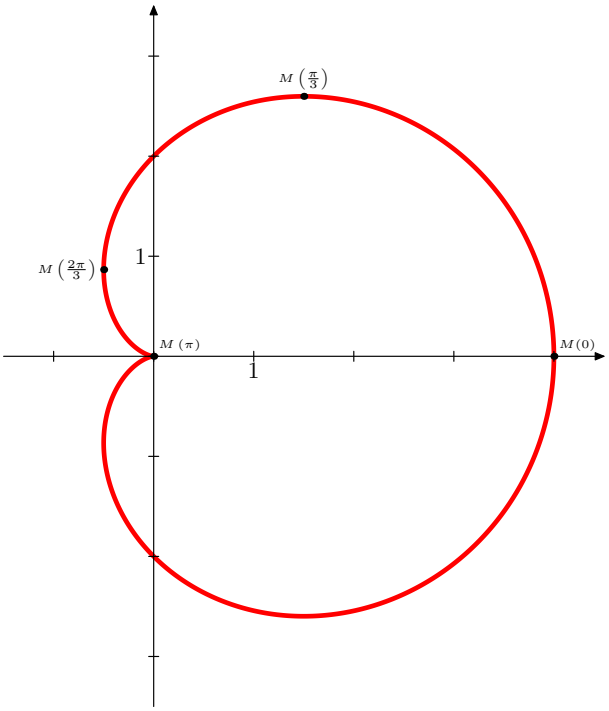
t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	4	↘	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0
$y(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$y'(t)$	4	$+$	0	$-$	-2	$-$	0
Tangente	Vert		Horiz		Vert		Horiz

Pour la tangente en π, puisque $f'(\pi) = (0,0)$, on détermine $f''(\pi)$

$$x''(t) = -2\cos(t)(1+2\cos(t)) - 2\sin(t)(-2\sin(t)) \quad \text{et} \quad y''(t) = -2\sin(t) - 4\sin(2t)$$

et on a alors $f''(\pi) = (-2;0)$ et la tangente est horizontale.

On obtient alors la courbe représentative suivante, que l'on trace sur $[0;\pi]$ et qu'on complète par symétrie par rapport à l'axe des abscisses :



5) Longueur d'une courbe

Définition 239. — Soient $a < b$ et f une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}$ sur $[a;b]$. La longueur de la courbe paramétrée par f est

$$\mathrm{L}_{[a,b]}(f) = \int_a^b ||f'(t)||\,\mathrm{d}t$$

Exemple 306. — Calculer la longueur de l'astroïde.

Solution. La courbe est parcourue une et seulement fois si t parcourt $[0;2\pi]$ (ou tout intervalle de longueur 2π). Par symétrie, la longueur de l'astroïde est égale à 8 fois celle obtenue sur $[0;\frac{\pi}{4}]$. Puisque, pour tout t, on

$$x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$$

on a alors $(x'(t))^2 = 9\sin^2(t)\cos^4(t)$ et $(y'(t))^2 = 9\cos^2(t)\sin^4(t)$ et donc

$$||f'(t)||^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = 9\sin^2(t)\cos^2(t)$$

et donc

$$||f'(t)|| = 3|\sin(t)||\cos(t)|$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_{[0;\pi/4]}(f) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3|\sin(t)||\cos(t)|dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sin(t)\cos(t)dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin(2t)dt \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{L}_{[0;2\pi]}(f) = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} ||f'(t)||dt = 6}$$

fFileExiststex/Chap21/Exo21

Exercices

Courbes paramétrées

Exercice 280 (Bicorne)**.** — Étudier et représenter la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\frac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Solution. Remarquons tout d'abord que x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (par produit et quotient de fonctions trigonométriques, avec $2+\sin(t) \geqslant 1 \neq 0$.

Après calcul rapide de $x(-t)$ et $y(-t)$, on n'obtient pas, *a priori*, de symétrie autre que la 2π-périodicité des deux fonctions x et y. On étudie alors la fonction f sur $[-\pi;\pi]$.

On détermine $f'(t)$ pour tout réel t :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a\sin(t) \\ \text{et } y'(t) &= a\frac{2\cos(t)\sin(t)(2+\sin(t)) - \sin^2(t)\cos(t)}{(2+\sin(t))^2} \\ &= a\frac{\sin(t)\cos(t)(4+\sin(t))}{(2+\sin(t))^2} \end{aligned}$$

Remarquons ainsi que $x'(t)$ est du signe de $\sin(t)$ et $y'(t)$ est du signe de $\sin(t)\cos(t)$ (car $4+\sin(t) > 0$). On obtient alors le tableau de signe suivant :

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(t)$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos(t)$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1
$x'(t)$	0	$+$	a	$+$	0	$-$	$-a$	$-$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

En $-\frac{\pi}{2}$, un vecteur directeur de la tangente est $(a,0)$ et en $\frac{\pi}{2}$, un vecteur directeur est $(-a,0)$. Remarquons que, pour $t \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a :

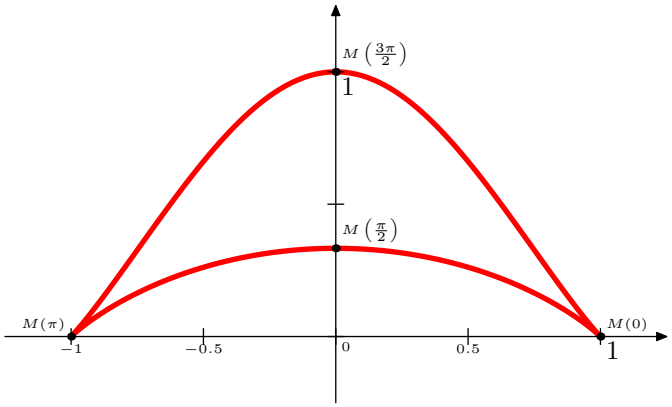
$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{2\cos(t)(4+\sin(t))}{(2+\sin(t))^2}$$

qui vaut 1 en $-\pi$ et π, et -1 en 0. Ainsi, $(1,1)$ est un vecteur directeur de la tangente en $-\pi$ et π, et $(1,-1)$ est un vecteur directeur de la tangente en 0.

On obtient alors le tableau de variations conjointes suivant :

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$	a	$+$	0	$-$	$-a$	$-$	0
$x(t)$	$-a$	↗	0	↗	a	↘	0	↘	$-a$
$y(t)$	0	↗	a	↘	0	↗	$\frac{a}{3}$	↘	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
Tangente	$(1,1)$		$(-a,0)$		$(1,-1)$		$(a,0)$		$(1,1)$

Puis on obtient la courbe suivante :



Exercice 281 (Deltoïde)**.** — Étudier et représenter la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Solution. Remarquons tout d'abord que x et y sont 2π-périodiques. On peut restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $t \in [-\pi; \pi]$:

$$\begin{aligned} x(-t) &= 2\cos(-t) + \cos(-2t) = x(t) \\ y(-t) &= 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -y(t) \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, et on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$.

x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0; \pi]$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin(t) - 2\sin(2t) \\ &= -2(\sin(t) + \sin(2t)) \\ &= -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } y'(t) &= 2\cos(t) - 2\cos(2t) \\ &= 2(\cos(t) - \cos(2t)) \\ &= -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(-\frac{t}{2}\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Sur $[0; \pi]$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$. On obtient le tableau de signe suivant :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	−	0	+	0
$y'(t)$	0	+	0	−	−4

Remarquons que, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$:

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{x'(t)} &= \frac{4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{-4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

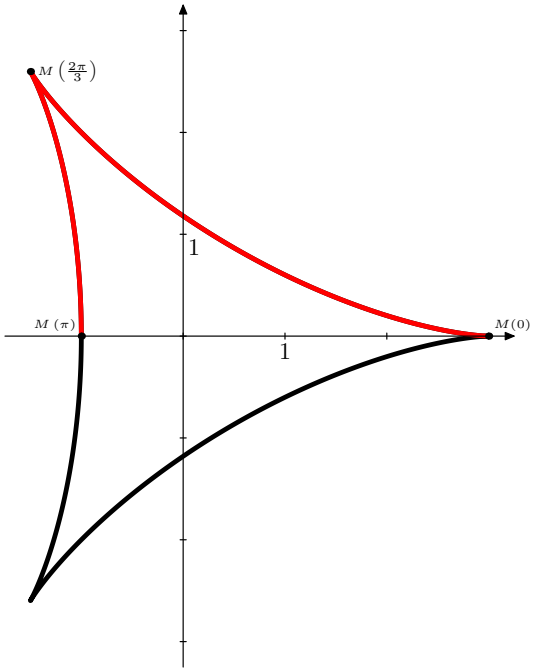
et alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to \frac{2\pi}{3}} \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\sqrt{3}$$

On obtient alors le tableau de variations conjointes suivant :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	-4
Tangente	$(1,0)$		$(1,-\sqrt{3})$		$(0,-4)$

Et ainsi, la courbe suivante :



Exercice 282 (Tractrice)**.** — Étudier et représenter la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t - \text{th}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Solution. Remarquons ici que x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonctions hyperboliques et polynômes, et $\text{ch}(t) \neq 0$ pour tout réel t).

Pour tout réel t, on a

$$x(-t) = (-t) - (-t) \qquad \text{et } y(-t) = \frac{1}{\text{ch}(-t)}$$
$$= -(t - (t)) = -x(t) \qquad = \frac{1}{\text{ch}(t)} = y(t)$$

Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+$.

Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\text{ch}(t) = +\infty$, par somme et quotient :

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} ||f(t)|| = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$: l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$x'(t) = 1 - (1 - {}^2(t)) \qquad \text{et } y'(t) = -\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)}$$
$$= {}^2(t)$$

Ainsi, $x'(t) > 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}^+$, et $y'(t)$ est du signe de $-\text{sh}(t)$.

Enfin, on constate que, pour $t > 0$:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)}}{{}^2(t)}$$
$$= -\frac{\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)}}{\frac{\text{sh}^2(t)}{\text{ch}^2(t)}} = -\frac{1}{\text{sh}(t)}$$

Mais alors, par quotient,

$$\lim_{t\to 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\infty$$

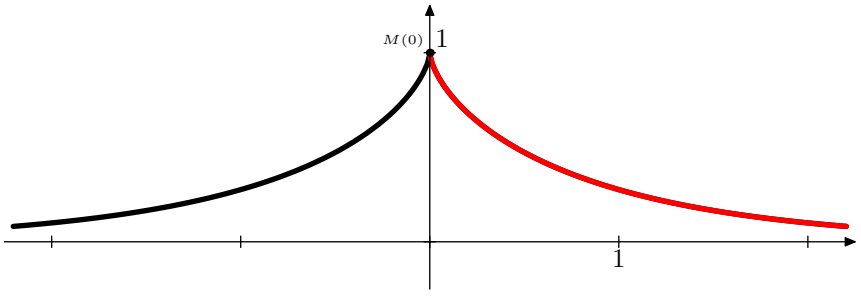
Ainsi, la tangente au point M(0) est verticale.

> **Remarque.** — On aurait pu, ici, faire la dérivée seconde :
>
> $$f''(t) = \left(2(1 + {}^2(t))(t); -\frac{\text{ch}^3(t) - 2\text{sh}^2(t)\,\text{ch}(t)}{\text{ch}^4(t)}\right)$$
>
> et alors $f(0) = (0; -1)$.

On obtient de tableau de variations conjointes suivant :

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	↗	$+\infty$
$y(t)$	1	↘	0
$y'(t)$	0	$-$	
Tangente	Verticale		

et la courbe représentative suivante :



Sujet de concours

Exercice 283 (ATS 2014)**.** — Soit la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin(\alpha) \\ y(\alpha) = 1 - \cos(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

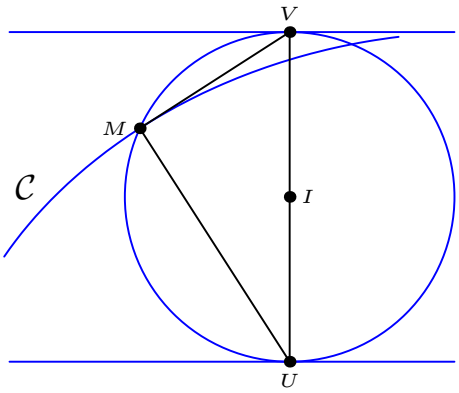
On note $M(\alpha)$ le point de paramètre α de $\mathscr{C}$.

1. (a) Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Donner les coordonnées du milieu du segment $[M(\alpha), M(2\pi - \alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.
   (c) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{M(\alpha)M(\alpha + 2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe $\mathscr{C}$ invariante.
   (d) Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe $\mathscr{C}$.
2. (a) Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0;2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)
   (b) Déterminer la limite $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en $M(0)$.
   (c) Donner une représentation graphique de $\mathscr{C}$ pour $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose maintenant que $\alpha \in]0;\pi[$. On note M le point $M(\alpha)$ de $\mathscr{C}$.

3. (a) Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en M, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale $\mathscr{N}$ à $\mathscr{C}$ en M.
   (b) Donner une équation de la droite $\mathscr{N}$ normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point U, intersection de $\mathscr{N}$ avec l'axe (Ox).
   (c) Donner une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point V, intersection de $\mathscr{T}$ avec la droite d'équation $y = 2$.

On appelle I le milieu du segment [UV].



4. (a) Montrer que le cercle de centre I et de rayon 1 contient U, V et M.
   (b) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{IM}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{IU}, \overrightarrow{IM}}$.
   (c) Comparer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{UM}$ (situé sous la droite (UM)) et la longueur [OU] (O est l'origine du repère).

Solution.

Remarque. — L'objectif de cet exercice est multiple :

- Manipuler une courbe paramétrée, avec les méthodes classiques.
- Déterminer une tangente en utilisant un développement limité.
- Déterminer des propriétés concernant la courbe.

Aucune difficulté, il suffit d'écrire proprement les choses.

1. (a)

   (b)

   (c)

   (d)

2. (a)

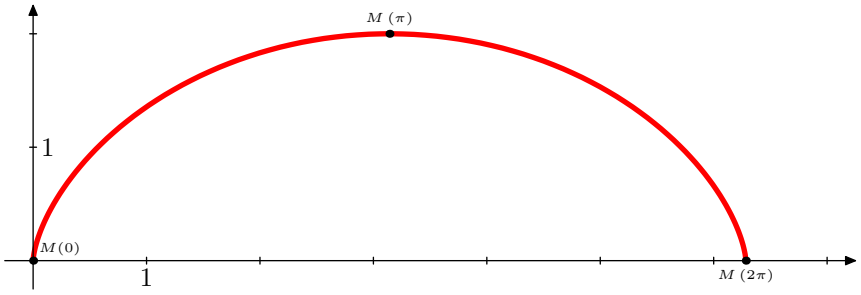
t	0		π		2π
$x'(t)$		$+$		$+$	
$x(t)$	0	↗	π	↗	2π
$y(t)$	0	↗	2	↘	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

(b) La limite étant indéterminée, effectuons un développement limité :

$$\begin{aligned}\frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} &= \frac{1-(1-\frac{\alpha^2}{2}+o_0(\alpha^3))}{\alpha-(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+o_0(\alpha^3))}\\ &= \frac{\frac{\alpha^2}{2}+o_0(\alpha^3)}{\frac{\alpha^3}{3!}+o_0(\alpha^3}\\ &\sim_0 \frac{3}{\alpha} \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = +\infty}$: la courbe $\mathscr{C}$ admet donc une tangente verticale au point M(0).

(c) En utilisant d'une part les tangentes (horizontale en π, verticale en 0 et donc en 2π) ainsi que les symétries précédentes, on obtient sur $[-2\pi;2\pi]$ la courbe suivante :



3. (a) Pour $\alpha\in]0;\pi[$, on constate que $f'(\alpha)(x'(\alpha), y'(\alpha)$ n'est jamais nul. Un vecteur directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en M est donc

$$\vec{t}\left(x'(\alpha), y'(\alpha)\right) = (1-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Un vecteur directeur de la normale $\mathscr{N}$ est donc donné par un vecteur normal au vecteur directeur de la tangente. Ainsi, un vecteur directeur de la normale est

$$\vec{n}(-\sin(\alpha), 1-\cos(\alpha))$$

(b) Puisque $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}$ a une équation de la forme $(1-\cos(\alpha))x+\sin(\alpha)y+c=0$. Puisque $M\in\mathscr{N}$, on a

$$(1-\cos(\alpha))(\alpha-\sin(\alpha))+\sin(\alpha)(1-\cos(\alpha)+c=0$$

soit

$$c=-\alpha(1-\cos(\alpha))$$

$\mathscr{N}$ a donc pour équation $(1-\cos(\alpha))x+\sin(\alpha)y-\alpha(1-\cos(\alpha))=0$.
Le point d'intersection U vérifie le système

$$\begin{cases}\sin(\alpha)y+(1-\cos(\alpha))x & -\alpha(1-\cos(\alpha))=0\\ y & =0\end{cases}$$

soit, après résolution rapide

$$\boxed{\mathrm{U}(\alpha,0)}$$

(c) Puisque $\vec{t}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}$ a une équation de la forme $-\sin(\alpha)x+(1-\cos(\alpha)y+c=0$. Puisque $M\in\mathscr{T}$, on a

$$-\sin(\alpha)(\alpha-\sin(\alpha))+(1-\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha)+c=0$$

soit

$$c=\alpha\sin(\alpha)-2(1-\cos(\alpha))$$

$\mathscr{T}$ a donc pour équation $-\sin(\alpha)x+(1-\cos(\alpha))y+\alpha\sin(\alpha)-2(1-\cos(\alpha))=0$.
Le point d'intersection V vérifie le système

$$\begin{cases}(-\sin(\alpha)x+(1-\cos(\alpha)y+\alpha\sin(\alpha)-2(1-\cos(\alpha))=0\\ y=2\end{cases}$$

soit, après résolution rapide ($\sin(\alpha)\neq 0$) :

$$\boxed{\text{V}(\alpha,2)}$$

4. I a donc pour coordonnées I$(\alpha,1)$.
   (a) **Première méthode** : On a rapidement IV = IU = 1. Enfin

$$\begin{aligned}\text{IM}&=\sqrt{(x(\alpha)-\alpha)^2+(y(\alpha)-1)^2}\\&=\sqrt{(-\sin(\alpha))^2+(\cos(\alpha)^2)}\\&=\sqrt{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}=1\end{aligned}$$

   Ainsi IM = 1 et M est bien sur le cercle de centre I et de rayon 1.
   Deuxième méthode : on calcule $\overrightarrow{\text{MU}}\cdot\overrightarrow{\text{MV}}$:

$$(\alpha-(\alpha-\sin(\alpha)))(\alpha-(\alpha-\sin(\alpha)))+(-(1-\cos(\alpha)))(2-(1-\cos(\alpha)))$$

   et après calcul, $\overrightarrow{\text{MU}}\cdot\overrightarrow{\text{MV}}=0$: ainsi M est sur le cercle de diamètre [UV], et donc sur le cercle de centre I et de rayon 1.
   (b) On a, rapidement

$$\overrightarrow{\text{IM}}(-\sin(\alpha),-\cos(\alpha)$$

   Ainsi,

$$\overrightarrow{\text{IU}}\cdot\overrightarrow{\text{IM}}=0\times(-\sin(\alpha))+(-1)(-\cos(\alpha))=\cos(\alpha)$$

   Or, par définition du produit scalaire

$$\overrightarrow{\text{IU}}\cdot\overrightarrow{\text{IM}}=\text{IU}\times\text{IM}\times\cos(\widehat{\overrightarrow{\text{IU}},\overrightarrow{\text{IM}}})=\cos(\widehat{\overrightarrow{\text{IU}},\overrightarrow{\text{IM}}})$$

   Ainsi, $\cos(\widehat{\overrightarrow{\text{IU}},\overrightarrow{\text{IM}}})=\cos(\alpha)$ et puisque $\alpha\in]0;\pi[$, on a

$$\boxed{\widehat{\overrightarrow{\text{IU}},\overrightarrow{\text{IM}}}=\alpha}$$

   (c) Puisque $\widehat{\overrightarrow{\text{IU}},\overrightarrow{\text{IM}}}=\alpha$, et que le cercle est de rayon 1 (et donc son périmètre vaut 2π), l'arc de cercle $\widehat{\text{UM}}$ a pour longueur $2\pi\times\alpha$. Puisque OU = α, on en déduit que, pour tout $\alpha\in]0;\pi[$,

$$\boxed{\widehat{\text{UM}}=2\pi\times\text{OU}}$$

CHAPITRE 22

SÉRIES DE FOURIER

Résumé

Dans ce chapitre, on va décomposer, dans certains cas, certaines fonctions comme somme de fonctions trigonométriques. Cela est très souvent utilisé en électricité et dans le cas du traitement des ondes.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître les coefficients de Fourier :
- connaître la notion de polynôme trigonométrique ..... □
- connaître la définition des coefficients de Fourier ..... □
- connaître les propriétés des coefficients de Fourier dans le cas d'une fonction paire ou impaire ..... □

② Concernant les séries de Fourier :
- connaître la définition des sommes de Fourier partielles ..... □
- connaître la définition de la série de Fourier ..... □

③ Connaître les cas de convergence :
- connaître la définition de la régularisée d'une fonction ..... □
- connaître les conditions de convergence ponctuelle de la série de Fourier ..... □
- savoir utiliser la convergence ponctuelle pour déterminer la valeur des sommes de séries particulières □
- connaître les conditions d'application de l'identité de Parseval et savoir l'appliquer ..... □

Dans ce chapitre, nous allons, sous certaines hypothèses, écrire une fonction périodique comme somme d'une série de fonctions trigonométriques.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Même si des prémices de la décomposition en série de Fourier se trouvent dans les années 1400 en Inde, on doit la théorie à *Joseph Fourier* (1768-1830) qui introduisit l'équation de la chaleur en 1807, puis donna la théorie des séries de Fourier dans son traité Théorie analytique de la chaleur. Cette théorie fut corrigée par *Dirichlet* (en 1829) puis finalisée par *Jordan* en 1881.

Dans l'ensemble de ce chapitre, $T > 0$ désignera une période, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation associée.

I. Coefficients de Fourier

1) Polynômes trigonométriques

Définition 240. — Soit $\omega > 0$. On appelle **polynôme trigonométrique** toute combinaison linéaire des fonctions

$$t \mapsto 1, \quad t \mapsto \cos(n\omega t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin(n\omega t) \text{ pour } n \geqslant 1$$

Exemple 307. — $x \mapsto \cos(2x) + \sin(3x) - 1$ est un polynôme trigonométrique (avec $\omega = 1$).

Exercice 284. — Montrer que $\cos^2$ et $\sin^2$ peuvent s'écrire comme des polynômes trigonométriques.

Solution. En effet, d'après les formules de linéarisation, on a, pour tout réel t :

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$$
$$\text{et} \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

2) Coefficients d'un polynôme de Fourier

Définition 241. — Soit f une fonction T-périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle **coefficients de Fourier** de la fonction f les réels $a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 304. — Dans le cas classique où $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, on obtient les coefficients

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 305. — Puisque l'intégrale d'une fonction T-périodique est la même sur tout intervalle de longueur T, on peut remplacer l'intervalle $[0, T]$ d'intégration par n'importe quel intervalle de longueur T, par exemple

$\left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$. Ainsi, si $\mathrm{T} = 2\pi$, on peut choisir $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 308. — Soit f la fonction 2π-périodique, constante égale à 1. Déterminer ses coefficients de Fourier.

Solution. On calcule rapidement

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 1$$

et pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3) Cas des fonctions paires et impaires

Remarque 306. — D'après la remarque précédente, on a ainsi que

$$a_0(f) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n(f) = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Si f est paire, alors $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire, et donc $b_n(f) = 0$. De même, si f est impaire, $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ est impaire, et donc $a_n(f) = 0$.

Proposition 22.1.

Soit f une fonction T-périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et pour $n \geqslant 1$

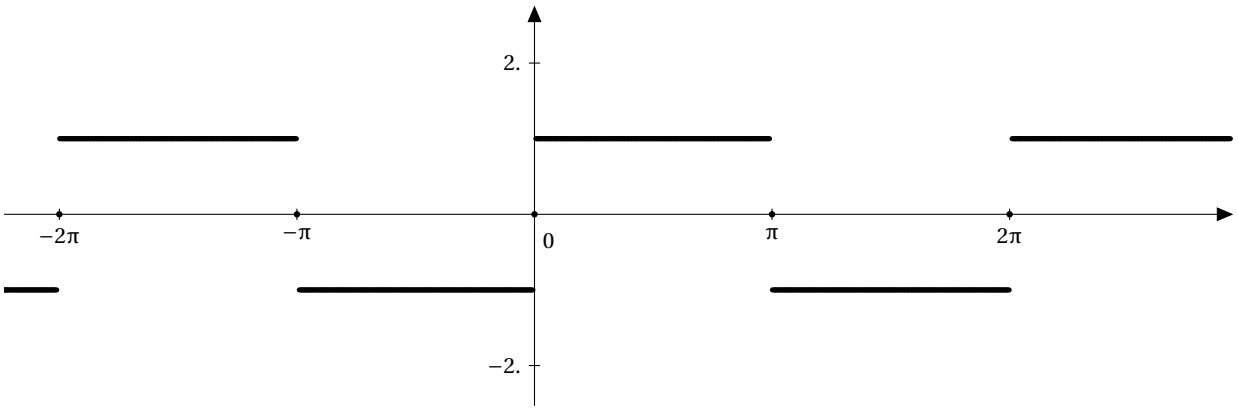
$$a_n(f) = \frac{4}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

- Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$

$$b_n(f) = \frac{4}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 285 (Signal rectangulaire)**.** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, vérifiant pour tout $x \in]0, \pi[$, $f(x) = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $f(n\pi) = 0$. Représenter f, et calculer ses coefficients de Fourier.

Solution. En utilisant l'imparité et la 2π-périodicité, on obtient :



Par imparité de f, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 0$$

Enfin, toujours par imparité de f, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(-(-1)^n + 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$ pour $n \geqslant 0$.

Remarque 307. — Pour simplifier les calculs, on peut introduire les coefficients de Fourier complexes : pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{e}^{in\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, on récupère les coefficients réels en calculant

$$a_0(f) = c_0(f), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_{-n}(f) - c_n(f))$$

II. Séries de Fourier

Définition 242. — Soit f une fonction T-périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle **somme de Fourier partielle** de rang n de f le polynôme trigonométrique défini par

$$\mathrm{S}_n(f) : t \mapsto a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t))$$

Remarque 308. — Pour t réel fixé, on peut s'intéresser à la suite $(\mathrm{S}_n(f)(t))_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une série, appelée **série de Fourier** de f évaluée en t.

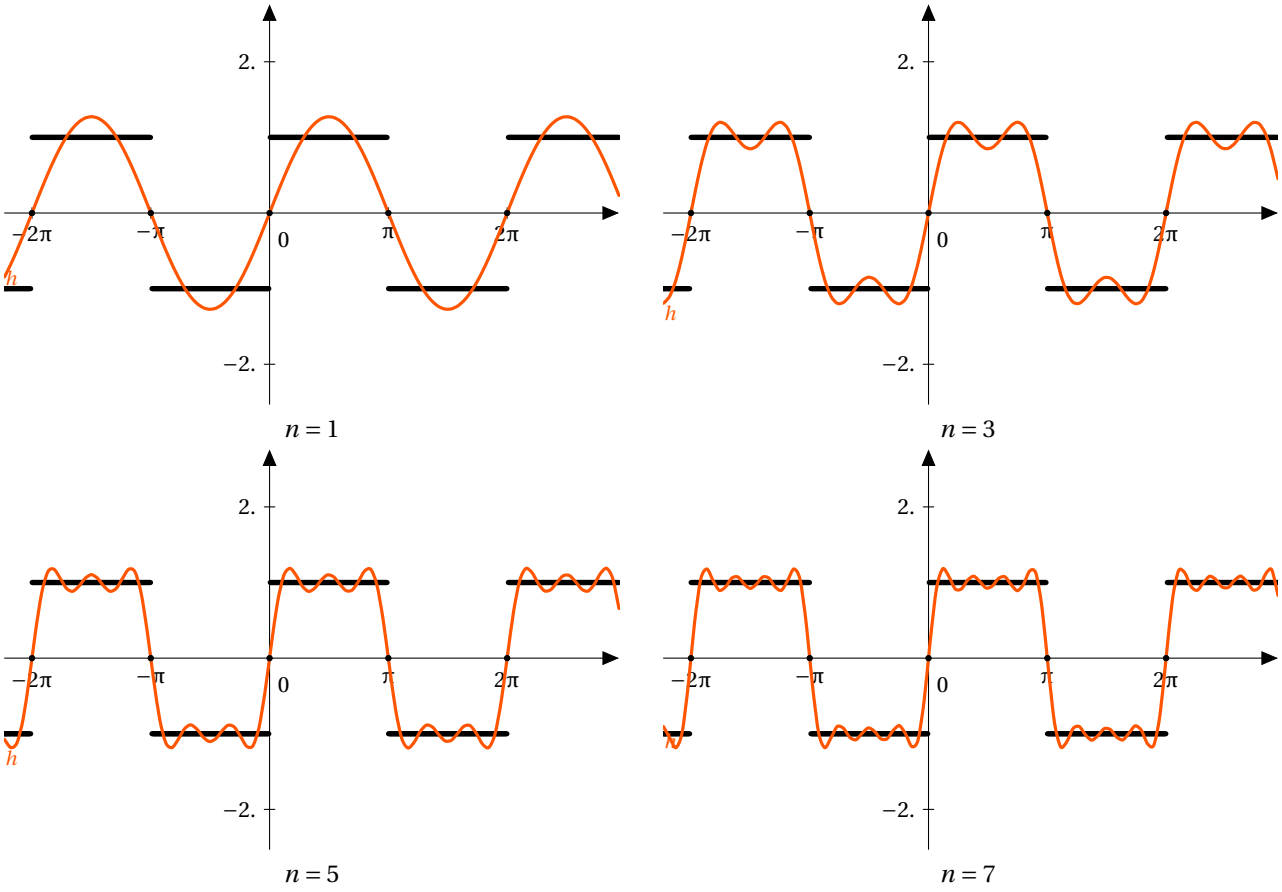
Puisqu'il s'agit d'une série, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 243. — Soit f une fonction T-périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et t un réel. Si la série $(S_n(f)(t))$ converge, on appelle alors **somme de Fourier** de f, évaluée en t, et on note $S(f)(t)$, la somme de la série :

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t))$$

Remarque 309. — ⚠ Attention : il n'y a aucune raison que la somme $S(f)(t)$ soit finie, car rien ne garantit a priori la convergence de la série.

Exemple 309. — On reprend l'exemple du créneau : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, vérifiant pour tout $x \in]0,\pi[$, $f(x) = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $f(n\pi) = 0$. On représente ci-dessous les premiers termes de la somme de Fourier partielle, pour $n = 1, 3, 5$ et 7 (puisque les coefficients de terme pair sont nuls) :



Remarque 310. — On constate sur l'exemple précédent qu'il semblerait que la série de Fourier partielle se rapproche de la fonction f quand n grandit. Ce résultat n'est pas vrai dans le cas général, mais l'est sous certaines conditions que nous nous allons voir.

III. Convergence de la série de Fourier

1) Régularisée d'une fonction

Définition 244. — Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert I. On appelle **régularisée** de f, et on note $\tilde{f}$, la fonction définie sur I par

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^+} f(t) + \lim_{t\to x^-} f(t)\right) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Remarque 311. — Si f est continue en x, alors $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ et donc $\tilde{f}(x) = f(x)$.
Si f n'est pas continue en x, alors $\tilde{f}(x)$ est égale à la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite de f en x.

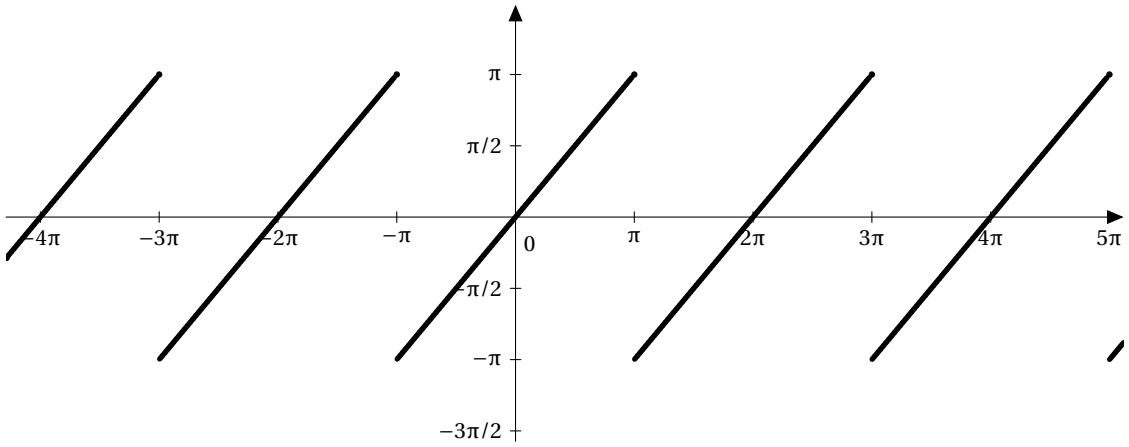
Exemple 310. — Si on reprend l'exemple du créneau, f est continue sur $]0;\pi[$ et sur $]-\pi;0[$, donc sur ces intervalles, $\tilde{f}(x) = f(x)$. En 0, on constate alors que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

donc $\tilde{f}(0) = \frac{-1+1}{2} = 0 = f(x)$.
C'est pour cela qu'on avait posé $f(n\pi) = 0$, car dans ce cas $\tilde{f} = f$.

Exercice 286. — Soit f la fonction 2π-périodique, impaire, définie sur $]-\pi;\pi]$ par $f(x) = x$. Représenter f et déterminer $\tilde{f}$.

Solution. En utilisant la définition de f, on obtient rapidement :



Sur chacun des intervalles $]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$, f est continue, donc $\tilde{f} = f$.
En $x = (2k+1)\pi$, on a rapidement

$$\lim_{t\to x^-} f(t) = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{t\to x^+} f(t) = -\pi$$

donc $\tilde{f}(x) = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0$.

2) Convergence ponctuelle

Théorème 22.2. Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge ponctuellement vers la régularisée de f :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S}(f)(x) = \tilde{f}(x)}$$

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier converge ponctuellement vers f.

Méthode 22.1.

Pour déterminer la convergence d'une série de Fourier :

1. On vérifie que la fonction est périodique.
2. On vérifie que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On peut alors conclure que la série de Fourier converge vers la régularisée.

3) Application

La convergence de la série de Fourier permet de calculer des valeurs de somme de séries qu'on ne savait pas calculer précédemment.

Exemple 311. — En reprenant la fonction créneau, celle-ci est bien de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (puisque en escalier). Ainsi, sa série de Fourier converge vers sa régularisée, ce qui dans notre cas, vaut f. On a alors

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))=f(x)$$

soit, en reprenant les valeurs de $a_n(f)$ et $b_n(f)$:

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}=f(x)$$

En posant $x=\frac{\pi}{2}$, et en constant que $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$ et que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 287. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi;\pi]$ par $f(x)=|x|$.

1. Représenter f, puis déterminer ses coefficients de Fourier.
2. Sa série de Fourier converge-t-elle ?
3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, puis celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Solution.

1. La fonction f est continue donc continue par morceaux. On utilise la définition de f et on obtient rapidement :
   La fonction f étant paire, on en déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$, $b_n(f)=0$. De plus,

$$\begin{aligned}a_0(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|t|\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |t|\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{I.P.P}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 0 - \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 0$, $a_{2n}(f) = 0$ et pour $n \geqslant 0$, $a_{2n+1}(f) = -\dfrac{4}{\pi(2n+1)^2}$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge donc vers la régularisée de f. Or ici,

$$\lim_{t\to\pi^-} f(t) = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\pi^+} = \lim_{t\to(-\pi)^+} = \pi$$

Ainsi, f est continue en π et est donc continue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité : la série de Fourier de f converge vers f.

3. Ainsi, on peut écrire pour tout réel t :

$$\mathrm{S}f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)t) = f(t)$$

En prenant $t = 0$ (puisqu'il y a convergence), on en déduit

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2} = 0$$

$$\text{soit} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Remarquons enfin que, en séparant termes pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

soit encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4) Identité de Parseval

Nous verrons dans un chapitre ultérieur une version améliorée du Théorème de Pythagore. Appliqué dans le cas des séries de Fourier, cela donne l'identité de Parseval :

Théorème 22.3. Identité de Parseval

Soit f une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors les séries de terme général $|a_n(f)|^2$ et

$|b_n(f)|^2$ convergent et on a

$$\boxed{|a_0(f)|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right)=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

Exemple 312. — En reprenant l'exemple du créneau, la fonction f est bien continue par morceaux, donc d'après l'identité de Parseval :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{4}{\pi(2n+1)}\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

f étant impaire, $|f|^2$ est paire, et on a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\,\mathrm{d}t=1\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=1\quad\text{soit}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 288. — En reprenant la fonction de l'exercice 287, déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Solution. La fonction f est bien continue par morceaux (elle était même continue) et 2π- périodique. D'après l'identité de Parseval :

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, par parité

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t&=2\int_0^{\pi}t^2\,\mathrm{d}t\\&=2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^3}{3}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^2}{3}$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}}$$

Puis, par un raisonnement similaire à l'exercice 287, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

fFileExiststex/Chap22/Exo22

Exercices

Séries de Fourier

Exercice 289. — Soit f la fonction 2π-périodique, définie sur $]-\pi;\pi]$ par $f(x)=x^2-\pi^2$.

1. Représenter f.
2. Déterminer sa série de Fourier.
3. Calculer la somme des séries $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Solution.

1. f est paire, 2π-périodique. On la représente sur $]-\pi;\pi]$ et on prolonge par périodicité :
2. f étant paire, pour tout entier $n\geqslant 1$, $b_n(f)=0$. De plus,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2-\pi^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}-\pi^2 t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}-2\pi^3\right) \\ &= -\frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

et pour $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2-\pi^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{I.P.P}}{=} \frac{2}{\pi}\left[(t^2-\pi^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{I.P.P}}{=} -\frac{4}{\pi n}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\pi\cos(n\pi) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

3. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue sur tout intervalle de la forme $]-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi]$. De plus, on constate que

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to(-\pi)^+} f(x)$$

Ainsi, la fonction f est continue en π, et par 2π-périodicité, f est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers la régularisée de f, qui ici est égale à f car f est continue. On a alors, pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = -\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)}$$

Pour $x=0$, on obtient alors

$$\begin{aligned} -\pi^2 = f(0) &= -\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2} \\ &= -\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Pour $x=\pi$, on obtient

$$0=f(\pi)=-\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)$$
$$=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Sujet de concours

Exercice 290 (ATS 2016)**.** — On considère la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$g(t)=\begin{cases}\cos(t) & \text{si } t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\\ 0 & \text{si } t\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right].\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifiez votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée
$$\mathrm{S}g(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)).$$
   (a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.
   (b) Calculer a_0 et a_1.
   (c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a
$$a_n=\frac{1}{\pi(n+1)}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)+\frac{1}{\pi(n-1)}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$
   (d) En déduire que si n est impaire et $n\neq 1$, alors $a_n=0$.
   (e) Montrer que si $n=2p$ est un entier pair non nul, alors
$$a_{2p}=\frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}.$$
4. On s'intéresse à la convergence de la série de Fourier de g.
   (a) A-t-on pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=\mathrm{S}g(t)$? Justifier précisement votre réponse.
   (b) Montrer que
$$\forall\, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\quad \cos(t)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)}\cos(2pt).$$
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.
5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$.

Solution.

1. On utilise la définition sur $]-\pi;\pi[$ et la périodicité. On obtient la courbe suivante :
2. Remarquons que sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, g est paire car cos l'est. Puisque sur $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ la fonction est nulle,

on constate que

$$\forall\, x \in]-\pi;\pi[, \quad g(-x) = g(x)$$

De plus, $g(\pi) = 0$ et $g(-\pi) = g(\pi)$ par 2π-périodicité. Donc

$$\forall\, x \in [-\pi;\pi], \quad g(-x) = g(x)$$

Enfin, par 2π-périodicité, on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = g(x)$$

Ainsi, g est paire.

3.

(a) Puisque g est paire, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, $b_n = 0$.

(b) Par définition :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ par parité} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \text{ par parité} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \text{ par parité} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((n+1)t)+\cos((n-1)t)}{2}\,\mathrm{d}t \text{ car } \cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ car } n \geqslant 2 \\ &= \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n+1)} + \frac{\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n-1)} \end{aligned}$$

(d) Pour $n \geqslant 2$ impaire, on peut écrire $n = 2k+1$ avec $k \geqslant 1$. Ainsi, $\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin((k+1)\pi) = 0$ et $\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$. Dans ce cas, $a_n = 0$.

(e) Notons $n = 2p$ avec $p \geqslant 1$. Alors

$$\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \qquad \text{et } \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((2p-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{p-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{(-1)^p}{\pi(2p+1)} + \frac{(-1)^{p-1}}{\pi(2p-1)} \\ &= \frac{(-1)^p(2p-1)+(-1)^{p-1}(2p+1)}{\pi(2p-1)(2p+1)} \\ &= \frac{(-1)^p(2p-1-(2p+1))}{\pi(4p^2-1)} \\ &= \frac{(-1)^p(-2)}{\pi(4p^2-1)} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)} \end{aligned}$$

4.

(a) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g converge vers la régularisée de g. Or ici, g est également continue : en effet, elle l'est par construction sur $]-\pi;\pi]$ et on constate que

$$\lim_{x\to\pi^-} g(x) = \lim_{x\to(-\pi)^+} g(x) = 0$$

Ainsi, par 2π-périodicité, g est continue sur $\mathbb{R}$ et donc g est sa propre régularisée.
Bilan : la série de Fourier de g converge vers g.

(b) D'après ce qui précède, on a donc

$$\forall\ t\in\mathbb{R},\quad g(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}\cos(2pt)$$

Ainsi, pour $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}\cos(2pt)$$

soit

$$\frac{1}{2}\cos(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos(2pt)$$

et finalement

$$\forall\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\quad \cos(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos(2pt)$$

(c) Le résultat précédent étant valable pour tout $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, prenons $t=0$. On obtient

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$$

soit

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

5.

(a) La fonction f étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer l'identité de Parseval. Ainsi :

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{p^1}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}\right)^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) f étant impaire, f^2 est paire et on a alors

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\sin(2t)}{2}+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, l'identité de Parseval devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\sum_{p^1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(4p^2-1)^2}\right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{8}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{p^1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}}$$

CHAPITRE 23

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES GÉNÉRALES

Résumé

Dans ce chapitre, on reprend le chapitre Equations différentielles déjà vu en ajoutant des méthodes pour des équations différentielles particulières.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les équations différentielles d'ordre 2 :
- connaître la définition ..... □
- connaître les conditions d'application du théorème de Cauchy ..... □
- savoir résoudre une équation homogène connaissant une solution particulière ..... □

② Concernant les systèmes d'équations différentielles :
- connaître la structure des solutions ..... □
- savoir résoudre dans le cas où la matrice associée est diagonalisable ..... □
- connaître le lien entre équation linéaire d'ordre n et système d'équations différentielles ..... □

Dans l'ensemble de ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Equations différentielles scalaire d'ordre 2

1) Définition

Définition 245. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'équation (E) $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est appelée équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

L'équation (H) $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ est appelée équation linéaire homogène associée à (E).

Remarque 312. — Les solutions de (E) ou (H) sont donc nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$.

Exemple 313. — L'équation $y'' + xy' + x^2 y = \cos(x)$ est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, d'équation homogène associée $y'' + xy' + x^2 y = 0$.

2) Solutions de l'équation homogène

Proposition 23.1. Principe de superposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit (E) $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et (H) son équation homogène associée.

Alors on obtient toutes les solutions (E) en ajoutant à une solution générale de l'équation (H) une solution particulière quelconque de (E).

Remarque 313. — Ainsi, pour résoudre (E), il "suffit" de résoudre (H) de manière générale, et de trouver une solution particulière quelconque de (E).

Proposition 23.2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des solutions définie sur I de l'équation homogène (H) $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Admis. □

Remarque 314. — On ne dispose pas de méthode générale pour résoudre l'équation homogène associée. Nous verrons, avec les séries entières, une méthode pour obtenir certaines solutions.

3) Résolution connaissant une solution de (H)

Dans le cas où on arrive à obtenir une solution particulière ne s'annulant pas de l'équation homogène, on peut obtenir l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Méthode 23.1 (Méthode de Lagrange).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit (H) $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ et h une solution de (H) ne **s'annulant pas** sur I.

① On pose $y(x) = h(x)z(x)$.

② On remplace y, y' et y'' dans l'équation (E).

③ On obtient alors une équation de fonction inconnue z, qu'on peut résoudre en posant $Z = z'$.

Exercice 291. — Soit (H) : $x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0$ définie sur $I =]0;+\infty[$.

1. Montrer que $h : x \mapsto x^2$ est solution de (H).
2. Déterminer alors toutes les solutions de (H).

Solution. h est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

1. On constate que, pour tout $x > 0$: $x^2h''(x) + xh'(x) - 4h(x) = x^2(2) + x(2x) - 4(x^2) = 0$. Ainsi h est bien solution de (H).
2. On pose alors $y(x) = z(x)x^2$, où z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. On a alors

$$y'(x) = z'(x)x^2 + 2xz(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = z''(x)x^2 + 2z'(x)x + 2z(x) + 2xz'(x) = z''(x)x^2 + 4z'(x)x + 2z(x)$$

et en remplaçant dans (H) :

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) &= x^2(z''(x)x^2 + 4z'(x)x + 2z(x)) + x(z'(x)x^2 + 2xz(x)) - 4z(x)x^2 \\ &= x^4z''(x) + 5z'(x)x^3 \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (H) si et seulement si $x^4z''(x) + 5z'(x)x^3 = 0$, soit encore $Z' + \frac{5}{x}Z = 0$, en posant $Z = z'$. L'ensemble des solutions de cette équation est

$$S_1 = \left\{ x \mapsto ke^{-5\ln(x)} = \frac{k}{x^5}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi, y est solution de (H) si et seulement si $Z \in S_1$, soit si et seulement si

$$z \in S_2 = \left\{ x \mapsto -\frac{k}{4x^4} + k', \quad (k,k') \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et donc si et seulement si

$$y \in S_3 = \left\{ x \mapsto x^2\left(-\frac{k}{4x^4} + k'\right), \quad (k,k') \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Bilan : l'ensemble des solutions de (H) est donc

$$\boxed{S_3 = \left\{ x \mapsto -\frac{k}{4x^2} + k'x^2, \quad (k,k') \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

4) Problème de Cauchy

Proposition 23.3.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit (E) l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$. On se donne $x_0 \in I$, et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

Alors il existe une unique solution y de E, définie sur I, vérifiant $y(x_0) = a$ et $y'(x_0) = b$.

Remarque 315. — Ainsi, si on impose une valeur et le coefficient directeur en un point, la courbe intégrale définie sur I est unique.

II. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définition

Définition 246. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $n \geqslant 2$. On appelle **système différentiel linéaire** d'ordre 1 homogène à coefficients constants un système du type

$$(S) \quad X' = AX \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

où A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 314. — Le système suivant est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) &+ 3y(t) \\ y'(t) &= -3x(t) &+ y(t) \end{cases}$$

En effet, celui-ci peut s'écrire $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 247. — On appelle **solution** de (S) une fonction $X : I \to \mathbb{K}^n$ vérifiant, dérivable sur I, vérifiant

$$\forall\ t \in I, \quad X'(t) = AX(t)$$

Ainsi, résoudre un système différentiel linéaire d'ordre 1, c'est trouver toutes les fonctions $X : I \to \mathbb{K}^n$ dérivable vérifiant le système d'équations différentielles.

2) Structure des solutions

Tout comme dans le cas des équations du premier ordre homogène, les solutions forment un espace vectoriel.

Théorème 23.4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Soit $(S) : X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de (S) forme un espace vectoriel de dimension n.

Démonstration. Montrons que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K}^n)$. Soient X, Y deux solutions de (S), et λ un réel. Alors, on a

$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda X' + Y' = (\lambda X + Y)'$$

Ainsi, $\lambda X + Y \in \mathscr{S}$.

On admet que ce sous-espace vectoriel est de dimension n. □

Puisque celui-ci est de dimension n, on dispose alors d'une unicité de la solution en imposant n valeur :

Théorème 23.5. Théorème de Cauchy

Soit $(S) : X' = AX$, avec $X : I \to \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ n éléments fixés, et $t_0 \in I$. Alors, il existe une unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ au problème de Cauchy (S) vérifiant $x_1(t_0) = \alpha_1, \dots, x_n(t_0) = \alpha_n$.

Démonstration. En effet, l'ensemble des solutions de (S) étant de dimension n, il y a une unique solution si on impose n conditions distinctes. □

3) Résolution dans le cas où A est diagonalisable

Pour résoudre un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants, on va effectuer un changement de fonctions inconnues en diagonalisant la matrice A.

Proposition 23.6.

Soit $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Soit (S) le système $X' = DX$ avec $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$(S) : \begin{cases} x_1' &= a_1 x_1 \\ x_2' &= a_2 x_2 \\ \cdots & \\ x_n' &= a_n x_n \end{cases}$$

Alors (S) se résout facilement en résolvant chacune des équations :

$$x_1 : t \mapsto \alpha_1 e^{a_1 t}, x_2 : t \mapsto \alpha_2 e^{a_2 t}, \cdots, x_n : t \mapsto \alpha_n e^{a_n t} \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$$

et donc

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{a_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{a_n t} \end{pmatrix}, \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Démonstration. En effet, dans ce cas, il s'agit de n équations du premier ordre à coefficients constants, que l'on sait résoudre. □

Exercice 292. — Résoudre le système (S) : $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver l'unique solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec (x, y) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le système (S) s'écrit

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$

et a donc comme solution

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{2t} \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, cela donne donc $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi, l'unique solution de (S) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

L'idée, dans le cas général, est donc de se ramener à un système diagonale comme précédemment.

Proposition 23.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on suppose diagonalisable, et (S) : $X' = AX$. On écrit $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice

diagonale. Alors, en posant $Y = P^{-1}X$, Y est dérivable si et seulement si X et dérivable et on a l'équivalence

$$X \text{ solution de (S)} \Leftrightarrow Y \text{ solution de } Y' = DY$$

Ainsi, résoudre (S) revient à résoudre le système diagonal $Y' = DY$.

Méthode 23.2.

Supposons A diagonalisable.

① On diagonalise A sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale et en ne calculant pas P^{-1}.

② On pose $Y = P^{-1}X$ et on résout le système équivalent $Y' = DY$ de fonction inconnue Y.

③ On revient à X : Y est solution de $Y' = DY$ si et seulement si $X = PY$ est solution de $X' = A$. Ainsi

$$\mathscr{S} = \{PY, \quad Y \text{ solution de } Y' = DY\}$$

Exercice 293. — Résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} x' &= 4x &- 2y \\ y' &= x &+ y \end{cases}$$

4) Exemple dans le cas où A est trigonalisable

Si la matrice n'est pas diagonalisable, mais qu'elle est trigonalisable, on peut tout de même résoudre, on "remontant" le système d'équations différentielles.

Exercice 294. — Soit (S) le système

$$(S) : \begin{cases} x' &= 2x &- y &+ 2z \\ y' &= 10x &- 5y &+ 7z \\ z' &= 4x &- 2y &+ 2z \end{cases}$$

1. Montrer que -1 et 0 sont valeurs propres. Déterminer une base e_1 de E_{-1} et e_2 de E_0, (on prendra des vecteurs dont la première coordonnée non nulle vaut 1).
2. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. En notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$, montrer que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire.
4. Résoudre le système $Y' = TY$.
5. En déduire les solutions de (S).

Solution.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Puisqu'on nous donne des valeurs propres, on déterminer directement E_{-1} et E_0. Après calcul, on obtient :
$$E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
2. On note donc $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque le cardinal de (e_1, e_2, e_3) est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer, par méthode classique, que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Or, si on prend $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tels

que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, on obtient alors

$$\begin{pmatrix} a+b \\ -a+2b+c \\ -2a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne rapidement $a = b = c = 0$. La famille est libre de bon cardinal, donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On a donc $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Après calcul,

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

et après calculs

$$\mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On pose $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Le système $\mathrm{Y}' = \mathrm{TY}$ s'écrit alors

$$\begin{cases} u' &= -u \\ v' &= w \\ w' &= 0 \end{cases}$$

On résout par remontées successives : $w : t \mapsto a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Puis $v' = a$ et donc $v : t \mapsto at + b$ avec $b \in \mathbb{R}$. Enfin, $u' = -u$ nous donne $u : t \mapsto ce^{-t}$, avec $c \in \mathbb{R}$.
Bilan : L'ensemble des solutions de $\mathrm{Y}' = \mathrm{TY}$ est

$$\mathscr{S}_{\mathrm{Y}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ce^{-t} \\ at+b \\ a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

5. En posant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, le système $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ s'écrit $\mathrm{Y}' = \mathrm{TY}$, que l'on vient de résoudre. Pour trouver l'ensemble des solutions de (S), il suffit alors de calculer $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ce^{-t} + at + b \\ -ce^{-t} + 2at + 2b + a \\ -2ce^{-t} + a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

5) Relation entre équation différentielle d'ordre n et système d'équations différentielles d'ordre 1

On peut interpréter une équation différentielle homogène à coefficients constants d'ordre n comme un système d'équations différentielles d'ordre 1 que l'on peut donc résoudre par les méthodes précédentes.

Proposition 23.8.

Soit (E) l'équation différentielle $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, avec

$(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n\neq 0$. Alors, résoudre (E) revient à résoudre le système $X'=AX$ avec

$$X=\begin{pmatrix} y^{(n-1)}\\ y^{(n-2)}\\ \vdots\\ y\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad A=\begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-3}}{a_n} & \dots & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_0}{a_n}\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple 315 (Important)**.** — Soit l'équation différentielle homogène à coefficients constants (E) : $ay''+by'+cy=0$, avec $a\neq 0$.

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $X=\begin{pmatrix} y'\\ y\end{pmatrix}$ est solution de $X'=AX$, avec $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
2. Montrer que le polynôme caractéristique est un multiple de aX^2+bX+c.
3. Dans le cas où $\Delta=b^2-4ac>0$, terminer la résolution du système $X'=AX$, et retrouver le résultat connu sur les équations du second ordre homogène à coefficients constants.

III. Equations non linéaires

Dans certains cas, et avec certaines méthodes, on peut résoudre des équations non linéaires, par exemple une équation du type $y'=y^2$.

Proposition 23.9. Equations de Bernoulli

Dans le cas d'une équation du type (E) : $y'=ay+by^\alpha$ (où a et b sont des fonctions), la seule fonction s'annulant est la fonction nulle (d'après le théorème de Cauchy). Ainsi, toute solution non nulle ne s'annule pas, et on peut écrire, en divisant par y^α :

$$(E) : y^{-\alpha}y'=ay^{1-\alpha}+b$$

que l'on peut résoudre en changeant de fonction inconnue et en posant $z=y^{1-\alpha}$.

Exercice 295. — Résoudre l'équation $xy'+xy+y^2e^x=0$ sur $]0;+\infty[$.

Solution. On utilise la méthode proposée. On peut écrire sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation précédente sous la forme $y'=-y-y^2\dfrac{e^x}{x}$.

Posons alors $z=y^{1-2}=\frac{1}{y}$. On a alors $y=\dfrac{1}{z}$, $y'=-\dfrac{z'}{z^2}$. Ainsi, y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si

$$-\frac{z'}{z^2}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\frac{e^x}{x}$$

soit encore

$$z'=z+\frac{e^x}{x}$$

L'équation homogène a pour solution $x\mapsto ke^x$, avec $k\in\mathbb{R}$. Utilisons la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation générale. On prend k de classe $\mathscr{C}^1$ et on cherche une solution sous la forme $x\mapsto k(x)e^x$. En injectant, on obtient

$$k'(x)e^x=\frac{e^x}{x}\Leftrightarrow k'(x)=\frac{1}{x}$$

Ainsi, une solution particulière est $x\mapsto\ln(x)e^x$.

Bilan : les solutions de l'équation $z' = z + \dfrac{e^x}{x}$ sont

$$\mathscr{S}_z = \{x \mapsto \ln(x)e^x + ke^x, \quad k \in \mathbb{R}\}$$

Et puisque $y = \dfrac{1}{z}$ on en déduit que les solutions de l'équation de départ sont :

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{\ln(x)e^x + ke^x} = \frac{e^{-x}}{\ln(x) + k}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

IV. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de déterminer une représentation graphique approchée d'une solution d'une équation différentielle en calculant des points de proche en proche.

Méthode 23.3.

Soit l'équation différentielle $y' = g(x, y)$. Soit f une solution de cette équation différentielle, avec une condition intiale $f(0) = b$. On construite alors de proche en proche f en utilisant l'approximation affine

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$$

pour h suffisamment petit.

Par exemple, $f(0+h) = f(h) \approx f(0) + hf'(0) = b + hg(0, b)$. On obtient ainsi $f(h)$. On peut alors calculer $f(h+h) = f(2h) \approx f(h) + hf'(h)$ et continue ainsi.

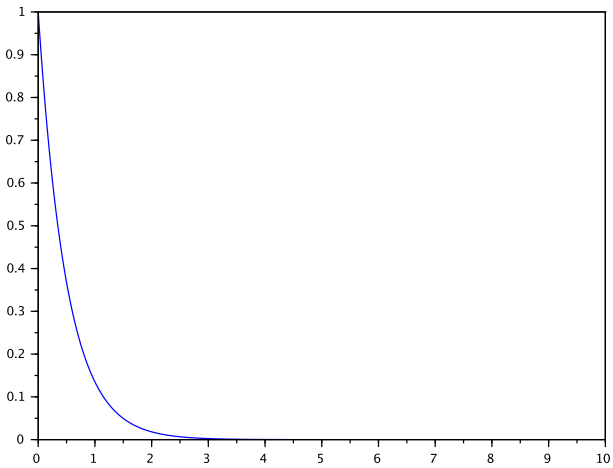
En Scilab, on peut utiliser une boucle `for` (lorsqu'on impose le nombre de points que l'on veut), ou `while` si l'on souhaite s'arrêter à une certaine abscisse :

Programme Scilab 5 : Méthode d'Euler

```
/// Résolution de l'équation différentielle y'=-2y
/// Avec y(0)=1
/// Principe : on part d'un point, et on avance par pas (petit nombre) en
utilisant l'approximation affine f(x+h)=f(x)+hf'(x)
// On utilise alors l'équation différentielle pour remplacer f' par sa
valeur.


// Pas entre chaque point
pas=0.001
// Nombre de point
N=1000
// Ainsi, on va de 0 à 0.001*10000=10

// Point de départ
//f(0)=1
x(1)=0
y(1)=1

// On calcule les N points
for i=1:N
    // De pas en pas
    x(i+1)=x(i)+pas
    // On utilise f(x+h)=f(x)+hf'(x)
```

```
    // avec f'=2f
    y(i+1)=y(i)+pas*(-2)*y(i)
end

clf
plot(x,y,'b')
//plot(x, exp(-2*x),'g')
xs2pdf(0,"23_courbe_euler.pdf");
```

ce qui donne la figure suivante :



fFileExiststex/Chap23/Exo23

Exercices

Equations différentielles scalaire d'ordre 2

Exercice 296. — Soit E l'équation définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$t^3y'' + ty' - y = 0$$

1. Chercher une solution particulière polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Méthode 23.4.

Lorsqu'on demande une solution polynomiale, soit on cherche tout d'abord de degré 1 et augmente le degré au fur et à mesure, soit on écrit directement un polynôme sous sa forme générale pour trouver une solution.

Solution.

1. Remarquons que la fonction $h : t \mapsto t$ est solution de E.
2. h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $y = hz$ avec z de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$. On a ainsi

$$y'(t) = z(t) + tz'(t) \qquad \text{et } y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$$

y est solution de E si et seulement si

$$t^3(2z'(t) + tz''(t)) + t(z(t) + tz'(t)) - tz(t) = 0$$

soit

$$t^4z''(t) + (2t^3 + t^2)z'(t) = 0$$

On pose $Z = z'$. y est solution de E si et seulement si

$$Z' = -(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2})Z$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$Z \in \left\{ t \mapsto ae^{-2\ln(t)+\frac{1}{t}} = \frac{a}{t^2}e^{\frac{1}{t}}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

c'est-à-dire, en intégrant, si et seulement si

$$z \in \left\{ t \mapsto -ae^{\frac{1}{t}} + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ainsi, les solutions de E sont :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto -ate^{\frac{1}{t}} + bt, \quad (a,b) \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 297. — Soit E l'équation définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$$

1. Chercher une solution particulière polynomiale.
2. Montrer que $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution.

1. On constate que la fonction $x \mapsto x$ est solution de (E).
2. La fonction $f : x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
$$f' : x \mapsto -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$
3. On pose alors $y = hz$ avec $h : x \mapsto x$ et z une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors
$$y' = z + xz' \quad \text{et} \quad y'' = 2z' + xz''$$
y est solution de (E) si et seulement si
$$(x^2+1)(2z' + xz'') + x(z + xz') - xz = 0$$
soit
$$(x^2+1)xz'' + (3x^2+2)z' = 0$$
On pose $Z = z'$. y est solution de (E) si et seulement si
$$Z' = -\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}Z$$
On décompose en éléments simples. On obtient :
$$\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$
On en déduit alors que y est solution de $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si
$$Z \in \left\{x \mapsto ae^{-2\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}, \quad a \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{a}{x^2\sqrt{x^2+1}}, \quad a \in \mathbb{R}\right\}$$
et donc, d'après la question 2, si et seulement si
$$z \in \left\{x \mapsto -a\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
Bilan : l'ensemble des solutions de (E) est donc
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \mapsto -a\sqrt{x^2+1} + bx, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Exercice 298. — Soit E l'équation définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$$
1. On pose $y(x) = x^\alpha z(x)$. Ecrire l'équation différentielle que vérifie z si y vérifie (E).
2. En choisissant un α particulier, résoudre l'équation vérifiée par z.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Système d'équations différentielles

Exercice 299. — Résoudre le système

$$\begin{cases} x' &= & & y &+& z \\ y' &= & x & & & \\ z' &= & x &+& y &+& z \end{cases}$$

Équations non linéaires

Exercice 300. — Soit (E) l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$

On note $z = \sqrt{y}$, pour y une solution dérivable strictement positive.

1. Déterminer l'équation (E′) vérifiée par z.
2. Résoudre l'équation (E′).
3. En déduire l'ensemble des solutions dérivables strictement positives de (E).

Solution.

1. On pose $z = \sqrt{y}$ avec $y > 0$ et dérivable. Ainsi, z est également dérivable. Puisque $y = z^2$, on a $y' = 2zz'$. L'équation (E) devient alors

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\iff 2zz' + 2z^2 - (x+1)z = 0 \\ &\iff 2z' + 2z - (x+1) = 0 \text{ (E′) car } z > 0 \end{aligned}$$

2. L'équation homogène associée à (E′) est $2z' + 2z = 0$ soit $z' + z = 0$ dont l'ensemble des solutions est $x \mapsto ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$.
   Pour déterminer une solution particulière, on peut soit faire une variation de la constante, soit chercher une solution de la forme $x \mapsto ax + b$. On obtient alors comme solution particulière $x \mapsto \dfrac{1}{2}x$.
   Bilan : L'ensemble des solutions de (E′) est

$$\mathscr{S}' = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x + ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

3. On revient à la variable de départ, puisque $y = z^2$, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\left\{ x \mapsto \left(\frac{1}{2}x + ke^{-x} \right)^2, \quad k \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 301. — Soit (E) l'équation $y' + e^y = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que (E) est équivalente à l'équation (E′) : $y'e^{-y} = -1$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution.

1. Puisque $e^{-y} > 0$, on a :

$$\begin{aligned} y' + e^y = 0 &\iff (y' + e^y)e^{-y} = 0 \\ &\iff y'e^{-y} + 1 = 0 \\ &\iff y'e^{-y} = -1 \end{aligned}$$

2. On constate que $y'e^{-y} = (-e^{-y})'$. Ainsi, l'équation (E) est équivalente à

$$(-e^{-y})' = -1$$

que l'on peut résoudre :

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\iff (-\text{e}^{-y})' = -1\\ &\iff -\text{e}^{-y} = -x + k, \quad k \in \mathbb{R}\\ &\iff y = -\ln(x-k), \quad k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Bilan : L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]k;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln(x-k) \end{array} \quad , \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

CHAPITRE 24

SÉRIES ENTIÈRES

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un concept important quant à ses applications (sur les équations différentielles, par exemple). Cet outil permettra de résoudre des équations qu'on ne peut pas résoudre autrement.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Sur les généralités :
- savoir déterminer le rayon de convergence via borne ou limite ..... □
- savoir déterminer le rayon de convergence avec le critère de d'Alembert ..... □
- connaître les propriétés des opérations sur les séries entières ..... □

② Concernant les propriétés des séries entières :
- savoir déterminer la série dérivée ou primitive d'une série entière ..... □
- connaître les séries de référence ..... □

③ Savoir trouver une solution d'une équation différentielle sous forme d'une série entière ..... □

④ Savoir déterminer le développement en série entière d'une fonction non usuelle ..... □

⑤ Savoir calculer la somme d'une série à l'aide d'une série entière ..... □

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Série entière

1) Définition

Définition 248. — On appelle **série entière** à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée d'une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, que l'on note $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$.

Notation 12. — L'ensemble des séries entières à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[[X]]$.

Exemple 316. — En prenant pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} X^n$ est une série entière.

Remarque 316. — Une série entière est une notation formelle. Il n'y a aucune raison pour que la série converge en un élément $x \in \mathrm{K}$ donné.

En revanche, toute série entière converge pour $x = 0$.

Par abus de notation, on écrira régulièrement $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ voire $\sum a_n x^n$ au lieu de $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$.

Définition 249. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ une série entière, et $\mathscr{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ pour lesquels la série converge. Alors la fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$, définie par $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est appelée **somme** de la série entière, de somme partielle $\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n x^n\right)_{\mathrm{N}}$.

2) Rayon de convergence

Remarque 317. — On peut se demander sur quel domaine la série entière va converger. On va introduire pour cela la notion de rayon de convergence.

Lemme 1 (Lemme d'Abel)**.** — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit un réel $r > 0$ pour lequel la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Alors, pour tout nombre z vérifiant $|z| < r$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration. On suppose donc que la suite $(a_n r^n)$ est bornée : on a alors, pour tout entier n, $|a_n r^n| < \mathrm{M}_0$ où $\mathrm{M}_0 \in \mathbb{R}$. Mais alors, remarquons que pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left|a_n r^n \frac{z^n}{r^n}\right| \\ &= |a_n r^n| \left|\frac{z}{r}\right|^n \\ &\leqslant \mathrm{M}_0 \left|\frac{z}{r}\right|^n \end{aligned}$$

Si $|z| < r$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{z}{r}\right|^n$ converge (série géométrique). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument. □

Exemple 317. — Soit la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}x^n$. Alors, on remarque que pour $x=1$, la suite $(\frac{1}{n})$ est bornée. D'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ converge pour tout $x\in]-1;1[$.

Définition 250. — Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nX^n$ une série entière. Alors on appelle **rayon de convergence** de la série la borne supérieure de l'ensemble non vide $\{r\in\mathbb{R}^+,\ (a_nr^n) \text{ est bornée}\}$.

Remarque 318. — Cette borne supérieure peut être nulle (si la suite n'est bornée que pour $r=0$), mais également infinie (si pour tout réel positif r, (a_nr^n) est bornée).

Le lemme d'Abel permet d'en déduire le résultat important suivant :

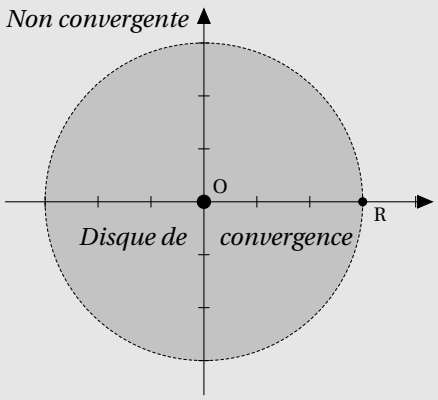
Proposition 24.1.

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nX^n$ une série entière et $R\in\mathbb{R}^+\cup ă\{\infty\}$ son rayon de convergence, qu'on suppose non nul.

- Si $|x|<R$, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ converge.
- Si $|x|>R$, la série diverge grossièrement.
- Si $|x|=R$, la série peut converger ou diverger (cas limite)

Ainsi, connaissant le rayon de convergence, on sait globalement où la série converge.

Définition 251. — Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nX^n$ une série entière à coefficients complexes et $R\in\mathbb{R}^+\cup ă\{\infty\}$ son rayon de convergence. L'ensemble $B_R=\{z\in\mathbb{K},\quad |z|<R\}$ est appelé **disque de convergence**.



Si la série est à coefficients réels, le disque de convergence est l'intervalle $]-R;R[$.

Sur l'ensemble des z vérifiant $|z|=R$, la série peut converger ou diverger. On appelle cet ensemble le **cercle d'incertitude**.

Méthode 24.1.

Pour déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$.

- On cherche un réel r pour lequel la suite (a_nr^n) est bornée. Ainsi, le rayon de convergence $R\geqslant r$.

- On cherche un réel r pour lequel la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument. Dans ce cas, $R \geqslant r$.
- On cherche un réel r pour lequel la suite $(|a_n r^n|)$ diverge ou n'est pas bornée. Dans ce cas, $R \leqslant r$.

Exercice 302. — Soient les trois séries entières suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

① $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

② $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries, ainsi que le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

Solution. Pour les séries 2 et 3, on constate que pour $x = 1$, les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ sont bornées. Donc leur rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1. Mais pour $r > 1$, les suites $\left(\frac{r^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{r^n}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ divergent vers $+\infty$ (croissances comparées). Donc $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

Pour la série 1, remarquons que pour $x = 1$, la suite (n) diverge, donc le rayon de convergence $R \leqslant 1$. Pour $r \in]0,1[$, la suite (nr^n) converge (par croissances comparées) donc est bornée. Ainsi $R = 1$.

Concernant les bornes :

- Pour la série 1, elle diverge en $x = 1$ et $x = -1$ car les suites (n) et $((-1)^n n)$ ne tendent pas vers 0. Ainsi, la série ne converge que sur $]-1;1[$.
- Pour la série 2, la série est absolument convergente pour $x = 1$ et $x = -1$ (série de Riemann). Ainsi, la série converge sur $[-1;1]$.
- Pour la série 3, elle ne converge pas pour $x = 1$ (série harmonique) mais elle converge pour $x = -1$ (série alternée). Ainsi, celle-ci converge sur $[-1;1[$.

Remarque 319. — L'exercice précédent permet de voir qu'au niveau des bornes, il peut tout arriver.

3) Critère de d'Alembert

Dans le cas des séries générales, il y a un critère permettant de déterminer si une série est convergente ou non, dans le cas où son terme général ne s'annule jamais.

Proposition 24.2. Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série à **termes strictement positifs**. On suppose que la limite

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existe.

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure

Exemple 318. — La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ converge. En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

On peut appliquer cette règle au cas des séries entières.

Méthode 24.2.

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nX^n$ une série entière à coefficients complexes. On pose $u_n=a_nz^n$ pour $z\in\mathbb{K}$. Si la limite

$$\ell(z)=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

existe, alors la série converge si $\ell(z)<1$ et diverge si $\ell(z)>1$.

Exemple 319. — On reprend la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$. On constate que, pour $n\geqslant 1$

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}=x\frac{n+1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$$

Ainsi, si $|x|<1$, la série converge, et si $|x|>1$, la série diverge. On obtient bien que le rayon de convergence vaut 1.

Exercice 303. — Déterminer le rayon de convergence sur $\mathbb{C}$ de $\sum_{n\geqslant 0}a^nz^n$ (avec $a\in\mathbb{C}^*$) et de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$.

Solution. On constate que

$$\left|\frac{a^{n+1}z^{n+1}}{a^nz^n}\right|=|az|$$

Ainsi, si $|az|<1$, $\sum_{n\geqslant 0}a^nz^n$ converge, et si $|az|>1$, $\sum_{n\geqslant 0}a^nz^n$ diverge. Le rayon de convergence est donc $R=\frac{1}{|a|}$.

De même, après calcul, on a

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right|=\frac{|z|}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ converge donc pour tout $z\in\mathbb{C}$, et donc $R=\infty$.

4) Séries entières et opérations

L'ensemble des séries entières $\mathbb{K}^{[X]}$ est un espace vectoriel (puisqu'il ne s'agit que d'une ré-écriture de l'ensemble des suites). On dispose alors du résultat suivant quant au rayon de convergence.

Proposition 24.3.

Soient $\sum a_nx^n$ et $\sum b_nx^n$ deux séries entières de $\mathbb{R}^{[X]}$, de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. Soit λ un réel. Alors

- la série $\sum(a_n+b_n)x^n$ a un rayon de convergence $R\geqslant\min(R_a,R_b)$, avec égalité si $R_a\neq R_b$.

- la série $\sum \lambda a_n x^n$ est de rayon de convergence $R = R_a$ (sauf si $\lambda = 0$).

Exercice 304. — Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{ch}(n)x^n$.

Solution. On sait que $\mathrm{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$. Or

- le rayon de convergence de la série $\sum e^n x^n$ est de $R_1 = \frac{1}{e}$.
- le rayon de convergence de la série $\sum e^{-n} x^n$ est de $R_2 = \frac{1}{e^{-1}} = e$.

Les rayons de convergence étant différents, on en déduit que le rayon de convergence de $\sum \mathrm{ch}(n)x^n$ est $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{e}$.

II. Propriétés d'une série entière

1) Continuité

Les séries entières réelles sont très régulières sur leur intervalle de convergence : elles y sont continues.

Proposition 24.4. Continuité

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ une série entière à coefficients réels, et R son rayon de convergence. Alors la somme de cette série $S :]-R;R[\to \mathbb{R}$ définie par $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R;R[$.

Démonstration. On va utiliser la définition de continuité. Soit $a \in]-r;r[$. On note $S_N :]-R;R[\to \mathbb{R}$ définie par $S_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour $x \in]-R;R[$:

$$|S(x) - S(a)| \leqslant |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(a)| + |S_N(a) - S(a)|$$

1. Le terme $|S(x) - S_N(x)|$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge).
2. De même, le terme $|S_N(a) - S(a)|$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
3. A N fixé, le terme $|S_N(x) - S_N(a)|$ tend vers 0 quand x tend vers a, car la fonction S_N est un polynôme (car une somme finie).

Ainsi, si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_0 tel que $|S(x) - S_N(x)| \leqslant \varepsilon$ et $|S_N(a) - S(a)| \leqslant \varepsilon$ pour $N \geqslant N_0$; et un réel δ tel que $|S_{N_0}(x) - S_{N_0}(a)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in]a-\delta; a+\delta[$. Mais alors, pour $N \geqslant N_0$ et $x \in]a-\delta; a+\delta[$, on a alors

$$|S(x) - S(a)| \leqslant 3\varepsilon$$

Par définition, $S(x)$ tend bien vers $S(a)$ et S est continue en a. □

Remarque 320 (Cas au bord)**.** — Si le rayon de la série entière est R, et que la série entière converge pour $x = R$ (respectivement $x = -R$), alors la somme sera également continue en R (resp. en $-R$). Ainsi, si la série entière converge en R et en $-R$, la somme est continue sur $[-R;R]$.

2) Dérivation, intégration

Mieux, on peut dériver facilement une série entière :

Proposition 24.5. Dérivation terme à terme

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ une série entière à coefficients réels, et R son rayon de convergence. Alors la somme de cette série $S :]-R;R[\to \mathbb{R}$ définie par $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R;R[$, et on a

$$\forall\, x \in]-R;R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et la série entière S' a également R comme rayon de convergence.

On peut également intégrer terme à terme une série entière, sans changer le rayon de convergence.

Proposition 24.6. Intégration terme à terme

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, et R son rayon de convergence. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ nulle en 0, et son rayon de convergence est également R.

Méthode 24.3.

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série, on peut déterminer le rayon de convergence de sa dérivée ou de sa primitive nulle en 0, qui est des fois plus facile à obtenir.

Exemple 320. — Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, de rayon de convergence 1. Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ a également un rayon de convergence 1. Et puisque, pour $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on en déduit que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Exercice 305. — Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Solution. Cette série est la primitive nulle en 0 de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ dont le rayon de convergence est 1. Ainsi, la série de départ a pour rayon de convergence 1.

Méthode 24.4.

Pour faire apparaitre la série dérivée (première, seconde, ...), on essaiera d'exprimer les coefficients polynomiaux suivant la base $(1, (n+1), (n+1)(n+2), \cdots)$.

Exercice 306. — Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n - 1)x^n$.

Solution. Pour la première, on constate que $nx^n = x \times nx^{n-1}$. Ainsi, par linéarité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$$

La deuxième série ayant un rayon de convergence de 1, la première également par linéarité, et pour tout $x \in]-1;1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Pour la deuxième, on note R son rayon de convergence et on constate que :

$$\begin{aligned}(n^2-2n-1)x^n &= ((n+1)(n+2)-5n-3)\,x^n \\ &= ((n+1)(n+2)-5(n+1)+2)\,x^n \\ &= (n+1)(n+2)x^n - 5(n+1)x^n + 2x^n\end{aligned}$$

Chacune des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ a pour rayon de convergence 1 (car il s'agit d'une série de référence et de ses deux premières dérivées). Par linéarité, $R \geqslant 1$. Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2-2n-2$ diverge grossièrement, on en déduit que $R = 1$. En dérivant la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ deux fois, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-2n-1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - 5\frac{1}{(1-x)^2} + 2\frac{1}{1-x} = \frac{2x^2+x+4}{(1-x)^3}$$

3) Unicité du développement en série entière

Proposition 24.7.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, et R son rayon de convergence. On note $S :]-R;R[\to \mathbb{R}$ la somme de la série entière $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors, pour tout entier n, $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. Ainsi, deux séries entières qui coïncident sur un intervalle ouvert autour de 0 auront les mêmes coefficients.

Remarque 321. — ⚠ On remarque ainsi que les coefficients du développement en série entière correspond au développement limité au voisinage de 0. Mais attention : un développement en série entière est valable de manière globale sur tout un intervalle, alors qu'un développement limité n'est valable qu'au voisinage de 0.

Conséquence 16. — En utilisant l'unicité d'un développement en série entière, on en déduit que :

1. si la somme S est paire, alors pour tout n, $a_{2n+1} = 0$.
2. si la somme S est impaire, alors pour tout n, $a_{2n} = 0$.

4) Séries entière de référence

Rayon de convergence	Fonction	
$R = 1$ (si $\alpha \notin \mathbb{N}$)	$x \mapsto (1+x)^\alpha$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$R = 1$	$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
$R = 1$	$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$x \mapsto \ln(1+x)$	$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$
$R = 1$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
$R = 1$	$x \mapsto \arctan(x)$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
$R = \infty$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$R = \infty$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$R = \infty$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = \infty$	$x \mapsto \cos(x)$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$R = \infty$	$x \mapsto \sin(x)$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Remarque 322. — Le développement en série entière de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ est en réalité valable sur le plan complexe tout entier : pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Ainsi, on récupère les développements en série entière de cos en calculant $\frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}$.

III. Applications

1) Equations différentielles

Lorsqu'on ne sait pas résoudre une équation différentielle, on peut essayer d'en chercher une sous la forme d'une série entière, et en vérifiant que son rayon de convergence est strictement positif.

Méthode 24.5.

Pour résoudre une équation différentielle à l'aide des séries entières :

① On cherche une solution de la forme $S(x) = \sum a_n x^n$ sans se préoccuper de son existence.

② Après changement d'indice, identification, et unicité du développement en série entière, on obtient une relation de récurrence entre les coefficients a_n.

③ On utilise les conditions initiales pour obtenir le(s) premier(s) terme(s).

④ On étudie alors le rayon de convergence du résultat obtenu.

Exercice 307. — Soit (E) l'équation différentielle sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ définie par

$$(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$$

1. Soit $S(x) = \sum a_n x^n$ solution de (E). Déterminer une relation de récurrence entre les a_n.
2. Déterminer la dérivée de $g : x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}$.
3. En déduire l'expression d'une solution S sur l'intervalle considéré.
4. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation différentielle.

Solution.

1. On injecte la solution dans l'équation différentielle, et on effectue des changements de variables. On a alors

$$\begin{aligned} xS''(x) + 2S'(x) + xS(x) &= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)n a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1})x^n \end{aligned}$$

   S est solution de (E) si et seulement si $xS''(x) + 2S'(x) + xS(x)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$2a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

2. On en déduit donc que $a_1 = 0$ et par la relation de récurrence, pour tout entier n, $a_{2n+1} = 0$. Enfin, on a $a_2 = -\frac{1}{2\times 3}a_0 = -2\frac{1}{3!}a_0$, $a_4 = -\frac{1}{4\times 5}a_3 = \frac{2}{5!}a_0$ et on peut montrer par récurrence sur n que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n 2}{(2n+1)!}a_0$$

   Ainsi,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2}{(2n+1)!}a_0 x^{2n}$$

   ce qui se ré-écrit, pour $x \neq 0$ (puisque sur $]0;\frac{\pi}{2}[$) :

$$\begin{aligned} S(x) &= 2a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &= \frac{2a_0}{x}(\sin(x)) \end{aligned}$$

   et le rayon de convergence de la série obtenue est donc infini. Une solution particulière de l'équation (E) est donc

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}}$$

3. Cette fonction est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et on a, pour $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$:
$$g'(x)=\frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$
4. Connaissant une solution, on cherche les autres de la forme $g=f\times k$, où k est une fonction inconnue de classe $\mathscr{C}^2$. On a alors $g'=f'k+fk'$, et $g''=f''k+2f'k'+fk''$ et en injectant dans l'équation (E) :
$$\begin{aligned}xg''+2g'+xg &= x(f''k+2f'k'+fk'')+2(f'k+fk')+xfk\\ &= k(\underbrace{xf''+2f'+xf}_{=0})+2xf'k'+xfk''+2fk'\\ &= k'(2xf'+2f)+xfk''\end{aligned}$$
En posant $\mathrm{K}=k'$, on obtient l'équation différentielle
$$2\mathrm{K}\cos(x)+\sin(x)\mathrm{K}'=0$$
soit, sur $]0;\pi[$, $\mathrm{K}'=-2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, dont les solutions s'écrivent sur $]0;\pi[$:
$$\mathscr{S}_{\mathrm{K}}=\left\{x\mapsto\alpha e^{-\ln|\sin(x)|^2},\alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\mapsto\frac{\alpha}{\sin^2(x)},\quad\alpha\in\mathbb{R}\right\}$$
On revient à la fonction de départ : $\mathrm{K}=k'$, et on obtient l'équation différentielle $k'(x)=\dfrac{\alpha}{\sin^2(x)}$ ce qui, d'après la question 2, donne
$$\mathscr{S}_k=\left\{x\mapsto-\alpha\frac{1}{\tan(x)}+\beta,\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
On revient finalement à l'équation différentielle de départ (on avait posé $g=f\times k$) : l'ensemble des solutions de (E) s'écrit donc
$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}\left(-\alpha\frac{1}{\tan(x)}+\beta\right),\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
ce qui s'écrit finalement :
$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{x\mapsto-\alpha\frac{\cos(x)}{x}+\beta\frac{\sin(x)}{x},\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

2) Déterminer un développement en série entière

Pour déterminer un développement en série entière d'une fonction non usuelle, on peut chercher une équation différentielle dont elle est solution, puis en déduire son développement en série entière via l'équation différentielle.

Exercice 308. — Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par
$$f:x\mapsto\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
1. Montrer que f est solution du problème de Cauchy $(1-x^2)y'-xy=1$, avec $y(0)=0$.
2. Déterminer le développement en série entière des solutions de l'équation différentielle.
3. En déduire le DSE de f.

3) Calcul de somme de série

Connaissant le développement en série entière d'une fonction, on peut trouver des valeurs particulières de séries en choisissant des réels bien choisis dans l'intervalle de convergence.

Exemple 321. — Puisque, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, en prenant $x = 1$, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$$

Exercice 309. — Déterminer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$.

Solution. Remarquons que, pour tout $x \in]-1;1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Pour $x = \frac{1}{2} \in]-1;1[$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$$

fFileExiststex/Chap24/Exo24

Exercices

Rayons de convergence

Exercice 310. — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n+1} z^n$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n z^n$.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$.

Solution. Dans les trois cas, les suites sous-jacents sont strictement positives. On peut donc essayer d'appliquer la règle de d'Alembert.

1. Posons $a_n = \frac{n^2+n}{n+1} z^n$. Alors, on a :
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)}{(n+1)+1} z^{n+1}}{\frac{n^2+n}{n+1} z^n}\right| \\ &= \frac{\frac{n^2+3n+2}{n+2}}{\frac{n^2+n}{n+1}} |z| \\ &= \frac{(n^2+3n+2)(n+1)}{(n^2+n)(n+2)} |z| \sim \frac{n^3}{n^3} |z| \longrightarrow |z|\end{aligned}$$
Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, si $|z|<1$, la série converge ; et si $|z|>1$, la série diverge.
Bilan : $\mathrm{R}=1$.
2. On procède de même. On pose $a_n = \mathrm{e}^n z^n$. Alors
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{e^{n+1} z^{n+1}}{e^n z^n}\right| \\ &= e|z|\end{aligned}$$
Ainsi, si $e|z|<1$, c'est-à-dire si $|z|<\frac{1}{e}$, la série converge ; et si $e|z|>1$, soit $|z|>\frac{1}{e}$, la série diverge.
Bilan : $\mathrm{R}=\frac{1}{e}$.
3. Avec $a_n = \mathrm{e}^{-n^2} z^n$, on constate que :
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2} z^{n+1}}{\mathrm{e}^{-n^2} z^n}\right| \\ &= \mathrm{e}^{-2n-1}|z| \longrightarrow 0\end{aligned}$$
Ainsi, dans tous les cas, la limite est inférieure stricte à 1.
Bilan : $\mathrm{R}=\infty$.

Exercice 311. — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) z^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\sqrt{n}} z^n$

3. (*) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ où a_n représente la n-ième décimale de π.

Solution. Vues les définitions des séries entières, nous utiliserons le lemme d'Abel et la définition du rayon de convergence.

1. La suite $(\sin(n\frac{\pi}{3}))$ étant bornée, d'après le lemme d'Abel, $R \geqslant 1$. De plus, pour $r > 1$, la suite $(\sin(n\frac{\pi}{3})r^n)$ n'est pas bornée : en effet, $r^n \longrightarrow +\infty$ et pour tout n multiple de 3, $|\sin(n\frac{\pi}{3})| = 1$ donc la suite $(|\sin(n\frac{\pi}{3})r^n|)$ peut-être rendu aussi grande que l'on veut. Ainsi, pour tout $r > 1$, $R \leqslant r$.
   Bilan : $\boxed{R = 1}$.
2. Soit $r > 0$ quelconque. On constate que
$$\begin{aligned} n^{\sqrt{n}} r^n &= e^{\sqrt{n}\ln(n)} e^{n\ln r} \\ &= e^{\sqrt{n}\ln(n)+n\ln(r)} \end{aligned}$$
   Si $r \geqslant 1$, alors
$$\sqrt{n}\ln(n) + n\ln(r) \longrightarrow +\infty$$
   et donc $n^{\sqrt{n}} r^n \longrightarrow +\infty$: la suite n'est pas bornée.
   Si $r < 1$, alors
$$\sqrt{n}\ln(n) + n\ln(r) = n\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} + \ln(r)\right)$$
   et alors, puisque $\ln(r) < 0$ et que $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, on a
$$\sqrt{n}\ln(n) + n\ln(r) \longrightarrow -\infty$$
   et donc, par composée,
$$n^{\sqrt{n}} r^n \longrightarrow 0$$
   Ainsi la suite $\left(n^{\sqrt{n}} r^n\right)$ est bornée.
   Bilan : D'après ce qui précède, on en déduit alors que $\boxed{R = 1}$.
3. Si $z = 1$, alors la suite (a_n) est bornée, puisqu'à valeurs dans $[\![0;9]\!]$. Ainsi, $R \geqslant 1$.
   En revanche, pour $r > 1$, la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. En effet, on a $a_n r^n \geqslant r^n$ sauf si $a_n = 0$. Puisque π n'est pas un nombre décimal (i.e. qu'il a une infinité de décimale non nulle), on en déduit que $a_n r^n$ peut être rendu aussi grand qu'on veut. Ainsi, $R \leqslant r$.
   Bilan : $\boxed{R = 1}$.

Exercice 312. — Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n x^{2n+1}$
3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$

Développement en série entière et équation différentielle

Exercice 313. — Soit (E) l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

1. Chercher les solutions développables en série entière.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries précédentes.

3. En déduire le développement en séries entières de la fonction $x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

Solution.

1. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière solution de (E). On a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(1-x^2)S''(x) - xS'(x) &= (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ &\underset{k=n-2}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n\right) x^n\end{aligned}$$

Ainsi, $(1-x^2)S''(x) - xS'(x) = 2$ si et seulement si

$$2a_2 = 2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0$$

c'est-à-dire

$$a_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n$$

On peut alors démontrer par récurrence sur n que :

$$\forall\, n, \quad a_{2n} = \frac{2^n n!}{(2n)!} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(2n)!}{(2^{2n}(n!)^2)(2n+1)} a_1$$

Exercice 314. — On s'intéresse à la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$. On note R son rayon de convergence et f sa somme.

1. Déterminer le rayon R.
2. Déterminer, sur $]0;1[$, g'' où $g : x \mapsto x f(x)$.
3. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $]0;1[$.

Solution.

1. Appliquons la règle de d'Alembert. On note $a_n = \frac{z^n}{n(n+1)}$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{z^n}{n(n+1)}}\right| \\ &= \frac{n}{n+2}|z| \longrightarrow |z|\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum |a_n z^n|$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$.
Bilan : R = 1.

2. Sur $]-1;1[$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car série entière sur son disque ouvert de convergence). On a

alors, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$g(x) = xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

En dérivant cette expression, on obtient

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

et en dérivant à nouveau :

$$\boxed{g''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}}$$

3. On intègre. On a alors $g'(x) = -\ln(1-x) + a$ et

$$g(x) = (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + ax + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = f(0) = 0$, on obtient $b = 1$ et $a = 0$. Ainsi,

$$g(x) = (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + 1$$

et

$$\boxed{\forall\, x \in]0;1[, \quad f(0) = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1}$$

Sujet de concours

Exercice 315 (ATS 2015)**.** — Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la parité de f.
3. Donner la fonction dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. (a) Calculer la dérivée de la fonction f.
   (b) Calculer $f'(0)$.
   (c) Calculer $f'(x) - 2xf(x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par f.
5. (a) Donner le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   (b) On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   (c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
6. On considère la série entière

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1} = x + \frac{4}{6}x^3 + \cdots + \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \cdots$$

   On note g sa somme sur l'intervalle de convergence. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
7. Donner le développement en série entière de la dérivée de g.
8. Montrer que la fonction g vérifie la même équation différentielle que f.
9. En déduire que $f = g$.

Solution.

1. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant continue sur R, f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et on a rapidement que $f(0) = 0$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. On a alors

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= \mathrm{e}^{(-x)^2} \int_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{x^2} \int_0^{x} \mathrm{e}^{-(-u)^2}(-\mathrm{d}u) \text{ en posant } u = -t \\ &= -\mathrm{e}^{x^2} \int_0^{x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -f(x)\end{aligned}$$

   Ainsi f est impaire.
3. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant continue, on en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

4. (a) On peut écrire $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} h(x)$. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ et h étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{x^2} h(x) + \mathrm{e}^{x^2} h'(x) \\ &= 2xf(x) + \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2} = 2xf(x) + 1\end{aligned}$$

   (b) On a ainsi :

$$\boxed{f'(0) = 1}$$

   (c) D'après la question *a*), on a, pour tout réel x, $f'(x) - 2xf(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle

$$\boxed{y' - 2xy = 1}$$

5. (a) Remarquons tout d'abord que $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} > 0$. De plus, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant strictement positif, on en déduit que, par positivité de l'intégrale

$$\text{Si } x > 0, \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \text{si } x < 0, \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

   Ainsi f est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$. Or $2x$ est positif sur $\mathbb{R}^+$ et négatif sur $\mathbb{R}^-$. Puisque $f'(x) = 2xf(x) + 1$, par somme et produit, on en déduit que

$$\forall\, x \in \text{ă}\mathbb{R}, \quad f'(x) \geqslant 1 > 0$$

   (b) En admettant que l'intégrale converge, celle-ci converge vers une limite strictement positive (puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est positive et continue). Par produit de limite, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   (c) En utilisant les résultats précédents et l'imparité, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

6. (a) On pose $a_p = \dfrac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$. Appliquons la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| &= \left|\frac{\frac{2^{2p+2}(p+1)!}{(2p+3)!}x^{2p+3}}{\frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}}\right| \\ &= \left|\frac{2^{2p+2}(p+1)!(2p+1)!x^{2p+3}}{(2p+3)!2^{2p}p!x^{2p+1}}\right| \\ &= \frac{2^2(p+1)}{(2p+2)(2p+3)}x^2 \sim \frac{4}{4p}x^2 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, la série est absolument convergente.
Bilan : $R = \infty$.

(b) D'après ce qui précède, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g' possède le même rayon de convergence. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p}$$

(c) Calculons $g'(x) - 2xg(x)$ pour tout réel x. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}g'(x) - 2xg(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}x^{2p+2} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}(k-1)!}{(2k-1)!}x^{2k} \text{ en posant } k = p+1 \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p)!}x^{2p} \text{ en multipliant par } 2p \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi g vérifie la même équation différentielle que f.

(d) Pour en conclure que $f = g$, il faut que f et g vérifie le même problème de Cauchy. Elles vérifient la même équation différentielle. Il reste à vérifier que $f(0) = g(0) = 0$. Or, $g(0) = 0$ par calcul immédiat. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de Cauchy. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on en déduit que $f = g$.

CHAPITRE 25

ESPACES EUCLIDIENS

Résumé

Dans ce chapitre, on étend la notion de produit scalaire vue dans $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^3$ à des espaces plus généraux. On concentrera ensuite notre étude à $\mathbb{R}^n$, et des applications intéressantes : les isométries.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Sur les généralités :
- connaître la définition d'un produit scalaire ..... □
- connaître norme et distance associées à un produit scalaire ..... □
- connaître l'inégalité de Cauchy-Schwarz ..... □

② Concernant l'orthogonalité :
- connaître la définition d'orthogonalité ..... □
- connaître la définition du groupe orthogonal ..... □
- connaître la définition d'orthogonalité pour une matrice ..... □

③ Savoir déterminer la nature d'une isométrie du plan ..... □

④ Savoir déterminer la nature d'une isométrie de l'espace ..... □

⑤ Connaître le théorème spectral ..... □

I. Produit scalaire et espace euclidien

1) Produit scalaire

Remarque 323. — Si on s'intéresse au produit scalaire du plan (ou de l'espace), on avait plusieurs propriétés intéressantes :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et réel λ, on a

$$(\lambda\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}^2\| \geqslant 0$.
- Enfin, si $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$

On part de ces propriétés pour définir la notion de produit scalaire général.

Définition 252. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- *Symétrie* : pour tous vecteurs u et v de E, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
- *Bilinéarité* : pour tout réel λ, et pour tous vecteurs u, v et w :

$$\langle \lambda u+v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \text{et} \quad \langle w, \lambda u+v\rangle = \langle \lambda w, u\rangle + \langle w, v\rangle$$

- *Positivité* : pour tout vecteur u de E, $\langle u, u\rangle \geqslant 0$.
- *Caractère définie ou séparation* : $\langle u, u\rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Le produit scalaire peut être noté $\langle u, v\rangle$, (u, v) ou $u\cdot v$ selon les situations.

Remarque 324. — Si on a démontré la symétrie, il n'est pas nécessaire de démontrer la bilinéarité, mais simplement une des deux linéarités.

Exemple 322. — Le produit scalaire usuel du plan est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

On peut étendre la définition du produit scalaire du plan directement à $\mathbb{R}^n$.

Exemple 323 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)**.** — L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

est un produit scalaire, appelé produit scalaire canonique.

Démonstration. A faire □

Exercice 316. — Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Montrer que l'application $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ définie pour $(f, g) \in E^2$ par

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

est un produit scalaire.

Démonstration. A faire □

2) Espace euclidien et norme

Définition 253. — On appelle **espace euclidien** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Exemple 324. — $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, est un espace euclidien.

Remarque 325. — S'il n'est pas de dimension finie, on dit que E, muni d'un produit scalaire, est un espace **préhilbertien réel**.

Tout comme dans le plan, où $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, on va introduire la notion générale de norme d'un vecteur dans un espace euclidien.

Définition 254. — Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On appelle **norme** de $u \in$ E associée au produit scalaire le nombre réel

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Remarque 326. — Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on a ainsi, pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Exemple 325. — Soit $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer la norme de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution. On a rapidement

$$\|u\| = \sqrt{1+1+4+9+1} = 4$$

Propriété 64. — *Soit* E *un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *et* $\|\cdot\|$ *la norme associée. Alors, pour tous vecteurs* u *et* v *de* E, *et pour tout réel* λ, *on a*

- $\|u\| \geqslant 0$.
- $\|u\| = 0$ *si et seulement si* $u = 0$.
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$

3) Distance associée

De même que dans le plan, où $\|\overrightarrow{AB}\|$ représente la distance entre les points A et B, on va introduire la distance entre deux vecteurs.

Définition 255. — Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soient u et v deux vecteurs de E. On appelle **distance** entre u et v, et on note $d(u,v)$, le réel

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

Propriété 65. — *Soit* E *un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, et* d *la distance associée. Alors, pour tous vecteurs* u, v *et* w *de* E*, on a :*

- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,v) \geqslant 0$.
- $d(u,v) = 0$ *si et seulement si* $u = v$.

4) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Un théorème assez important permet d'obtenir des inégalités entre produit scalaire et norme.

Théorème 25.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors, pour tous vecteurs u et v de E, on a

$$\langle u,v\rangle^2 \leqslant \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

soit encore

$$|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|.\|v\|$$

Démonstration. Soient u et v deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Constatons que

$$\|\lambda u + b\| = \lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \geqslant 0$$

Ce trinôme du second degré en λ est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$. Il n'a donc pas de racines réelles, et son discriminant doit être négatif. Or

$$\Delta = (2\langle u,v\rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2$$

Donc, puisque $\Delta \leqslant 0$, on en déduit que

$$(2\langle u,v\rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$$

puis

$$(\langle u,v\rangle)^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$$

Par application de la fonction racine, croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a bien

$$\text{ă}|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$$

□

Une conséquence importante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité triangulaire :

Théorème 25.2. Inégalité triangulaire

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ la norme associée et d la distance associée. Alors pour tout vecteurs u, v et w de E, on a

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \quad \text{et} \quad d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$$

Démonstration. A faire □

5) Identité du parallélogramme

Comme dans le plan, on dispose de l'identité du parallélogramme :

Proposition 25.3.

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour tous vecteurs u et v, on a

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

En particulier, on a l'identité du parallélogramme :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

et l'identité de polarisation :

$$\langle u,v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

II. Orthogonalité

1) Définitions

On prend appui sur les notions connues du plan pour introduire différents vocabulaires :

Définition 256. — Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\|\cdot\|$ la norme associée.

- Un vecteur u de E est dit **unitaire** si $\|u\| = 1$.
- Deux vecteurs u et v sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\langle u,v\rangle = 0$. On notera en général $u \perp v$.

Exemple 326. — Soient $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique noté $\cdot$. Montrer que u est unitaire et que u et v sont orthogonaux.

Solution. On a en effet

$$\|u\|^2 = u\cdot u = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

et

$$u\cdot v = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

On peut généraliser la notion d'orthogonalité à deux espaces :

Définition 257. — Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. On dit que F et G sont **orthogonaux** si tous les vecteurs de F sont orthogonaux aux vecteurs de G :

$$\forall\, x\in F,\quad \forall y\in G,\quad \langle x,y\rangle = 0$$

Proposition 25.4. Egalité de Pythagore

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient u et v deux vecteurs orthogonaux de E. Alors

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Démonstration. En effet,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

□

2) Famille orthogonale

Définition 258. — Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Une famille (u_i) de vecteurs non nuls de E est dite **orthogonale** si et seulement si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle u_i, u_j\rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormale** (ou **orthonormée**) si et seulement si elle est orthogonale et pour tout i, $\|u_i\| = 1$.

Exemple 327. — La famille (u, v) de l'exemple 326 est une famille orthogonale.

Exercice 317. — Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique.

Solution. Rapidement, si on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a bien $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = \|e_1\| = 1$ et pour $i \neq j$, $e_i \cdot e_j = 0$.

Proposition 25.5.

Soit E un espace euclidien, et (u_i) une famille orthogonale de E. Alors la famille (u_i) est libre.

En particulier, une famille orthogonale de n vecteurs d'un espace de dimension n est une base.

Démonstration. En effet, prenons une combinaison linéaire nulle des (u_i) : $\sum \lambda_i u_i = 0$. Soit j un indice. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \langle u_j, \lambda_i u_i\rangle &= \sum \lambda_i \langle u_j, u_i\rangle \\ &= \lambda_j \|u_j\|^2 \end{aligned}$$

Or $\|u_j\|^2 \neq 0$ (car u_j n'est pas nul). Ainsi, $\lambda_j = 0$. Ceci étant vrai pour tout indice j, on en déduit bien que la famille est libre. □

Ainsi, dans un espace euclidien, on peut être amené à chercher une base composée de vecteurs orthogonaux.

Définition 259. — Soient E un espace euclidien. Une base de E est dite

- **orthogonale** si elle est composée de vecteurs deux à deux orthogonaux;
- **orthonormale** ou orthonormée si elle est composée de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux.

Remarque 327. — Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors, pour tout vecteur $x \in$ E, on a $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$ avec $x_i = \langle x, e_i\rangle$.

On obtient ainsi rapidement les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée en calculant des produits scalaires.

Dans le cas d'une famille orthogonale, l'égalité de Pythagore se généralise :

Proposition 25.6. Relation de Pythagore

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit (u_i) une famille orthogonale de E. Alors

$$\left\|\sum u_i\right\|^2 = \sum \|u_i\|^2$$

III. Groupe orthogonal

Dans cette partie, on va s'intéresser aux applications qui conserve le produit scalaire et la norme.

Dans la suite, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ désigne un espace euclidien.

1) Définition

Définition 260. — Un endomorphisme u de E est dit **orthogonal** s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall\ (x,y)\in E^2,\quad \langle u(x),u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

On dit également que u est une **isométrie vectorielle**.

Exemple 328. — L'identité $\mathrm{id}: E\to E$ est un endomorphisme orthogonal.

Notation 13. — On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Proposition 25.7.

Un endomorphisme orthogonal u est bijectif : il s'agit donc d'un automorphisme.

Démonstration. Montrons que u est injectif. Soit $x\in\mathrm{Ker}(u)$. On a donc $u(x)=0$. Mais alors

$$0 = \langle u(x),u(x)\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$$

On a donc $x=0$ et u est injectif. Puisqu'on est en dimension finie, d'après le théorème du rang, u est bijectif. □

Proposition 25.8.

Soit $u\in\mathscr{O}(E)$. Alors u conserve également la norme :

$$\forall\ x\in E,\quad \|u(x)\| = \|x\|$$

Démonstration. En effet,

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x),u(x)\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$$

et donc $\|u(x)\| = \|x\|$. □

2) Matrices et orthogonalité

Définition 261. — Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

Notation 14. — On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n$ (voire $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices carrées de taille n orthogonales.

Exemple 329. — Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Solution. On a rapidement que ${}^t\mathrm{AA} = \mathrm{I}_3$.

Proposition 25.9.

Soit A une matrice orthogonale. Alors la famille composée des n colonnes de A (respectivement des n lignes de A) est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Admis □

Méthode 25.1.

Pour démontrer qu'une matrice est orthogonale, on peut soit calculer ${}^t\mathrm{AA}$, soit remarquer que les colonnes de A sont unitaires et orthogonales.

Exemple 330. — Dans l'exemple précédent, on constate rapidement que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$ est bien orthonormée.

Dans un espace euclidien, les matrices orthogonales apparaissent régulièrement :

Proposition 25.10.

Soient $\mathscr{B} = (e_i)$ et $\mathscr{C} = (f_i)$ deux bases orthonormées de E. La matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est une matrice orthogonale.

Plus important : il y a un lien très étroit entre endomorphisme orthogonal et matrice orthogonale :

Théorème 25.11.

Soient $\mathscr{B} = (e_i)$ une base orthonormée de E, et u un endomorphisme de E. Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

Démonstration. Admis. □

Exemple 331. — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que f est une isométrie du plan.

Solution. Notons A la matrice de f dans la base canonique qui est orthonormée. Alors

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a

$${}^tAA = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ainsi, A est orthogonale : f est bien une isométrie du plan.

3) Matrice orthogonale et déterminant

Les matrices orthogonales ont une propriété très importante : elles ont un déterminant valant 1 ou -1.

Proposition 25.12.

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) \in \{-1;1\}$.

Démonstration. Puisque $\det({}^tA) = \det(A)$, et que ${}^tAA = I_n$, on a

$$\det({}^tAA) = \det(I_n) \iff \det(A)^2 = 1$$

et donc $\det(A) = \pm 1$. □

Remarque 328. — Par définition du déterminant d'un endomorphisme, on en déduit donc qu'une isométrie a également un déterminant valant ± 1.

On peut, tout comme on oriente l'espace, orienter un espace euclidien.

Définition 262. — On appelle **espace euclidien orienté** la donnée d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et d'une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

La base $\mathscr{C}$ est dite **directe** si $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E)) = 1$, **indirecte** si le déterminant vaut -1.

Remarque 329. — Rappelons que la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E)$ est orthogonale, donc de déterminant 1 ou -1.

Exemple 332. — Dans $\mathbb{R}^n$, on prendra comme orientation la base canonique.

IV. Groupe orthogonal de dimension 2 et 3

Dans cette section, on va expliciter toutes les isométries du plan vectoriel et de l'espace vectoriel.

1) Groupe orthogonal de dimension 2

On note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On commence par identifier deux types de matrices orthogonales dans $\mathcal{O}_2$:

Proposition 25.13.

Si a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, alors les matrices $R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Démonstration. En effet, on a

$$ {}^t\mathrm{RR} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad {}^t\mathrm{SS} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 $$

□

Les matrices précédentes sont les seules matrices orthogonales de $\mathscr{O}_2$:

Théorème 25.14.

Soit u une isométrie de $\mathbb{R}^2$. On note M sa matrice dans la base canonique. Alors M est soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a^2+b^2=1$.

Démonstration. On note $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{I}_2$ nous donne donc

$$ \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

On en déduit donc que $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ et que $ac+bd=0$, soit $ac=-bd$.

- Si $a=0$, $b=1$ (car $a^2+b^2=1$) et donc $d=0$. On obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien orthogonale.
- Si $a\neq 0$, on a alors $c=-\frac{bd}{a}$, puis, puisque $c^2+d^2=1$

  $$ \frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = 1 \Leftrightarrow b^2d^2 + a^2d^2 = a^2 $$

  soit $d^2(a^2+b^2)=a^2$ et donc $d^2=a^2$ et puisque $a^2+b^2=c^2+d^2$, on a également $b^2=c^2$. Il y a donc 4 cas possibles.
  - Soit $a=d$ et $b=c$, ce qui est impossible, puisque $ac=-bd$.
  - Soit $a=-d$ et $b=-c$, ce qui est impossible, puisque $ac=-bd$.
  - Soit $a=d$ et $b=-c$, ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, qui est bien orthogonale.
  - Soit $a=-d$ et $b=c$, ce qui donne la materice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, qui est bien orthogonale.

□

Les deux matrices suivantes peuvent se ré-écrire différemment : en effet, puisque $a^2+b^2=1$, a peut s'écrire $\cos(\theta)$ et b, $\sin(\theta)$ pour un réel θ.

Proposition 25.15.

Soit r_θ la rotation de centre O et d'angle θ. Alors r_θ est une isométrie vectorielle du plan, de matrice $\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Son déterminant vaut 1.

Démonstration. Dans la base canonique, par définition de la rotation de centre O et d'angle θ, on a $r_\theta(i) = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j$ et $r_\theta(j) = -\sin(\theta)i + \cos(\theta)j$. Ainsi, sa matrice s'écrit

$$ \mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} $$

□

Proposition 25.16.

Soit s_θ la symétrie d'axe u faisant un angle θ avec i. Alors s_θ est une isométrie vectorielle du plan, de matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Démonstration. Dans la base canonique, par définition de la symétrie, on a $s_\theta(i) = \cos(2\theta)\,i + \sin(2\theta)\,j$ et $s_\theta(j) = \sin(2\theta)\,i - \cos(\theta)\,j$. Ainsi, sa matrice s'écrit

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

□

Ainsi, les seules isométries du plan sont les rotations de centre O et les réflexions d'un axe passant par l'origine.

Remarque 330. — S'il s'agit d'une rotation, le déterminant vaut 1 ; s'il s'agit d'une symétrie, le déterminant vaut -1. Enfin, on constate que , dans le cas d'une rotation, $\mathrm{Tr}(R_\theta) = 2\cos(\theta)$ et c'est donc un moyen rapide de déterminer l'angle de la rotation au signe près.

Méthode 25.2.

Pour déterminer la nature d'une isométrie du plan, on calcule le déterminant de la matrice associée A.

- Si celui-ci vaut 1, il s'agit d'une rotation, et on peut utiliser la trace par exemple pour déterminant l'angle de la rotation au signe près. Pour déterminer le signe, on prend un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ quelconque, et on calcule $\det(X, AX)$ pour obtenir le signe du sinus.
- Si celui-ci vaut -1, il s'agit d'une symétrie, et il faut déterminer l'angle θ de l'axe. On fera attention au 2θ apparaissant dans la matrice.

Exercice 318. — Déterminer la nature des isométries de matrices respectives dans la base canonique $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Solution. Le déterminant de A vaut 1. En notant θ l'angle de la rotation, la trace nous donne $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$, soit $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$.

En prenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\det(X, AX) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

Ainsi, A est la matrice de la rotation autour de l'origine, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

De même, le déterminant de B vaut -1. Remarquons alors queă

$$B = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

Ainsi, B est la matrice de la symétrie par rapport à la droite faisant un angle $\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\pi}{8}$ avec l'axe $(O; \vec{i})$.

2) Groupe orthogonal de dimension 3

La description du groupe orthogonal de dimension 3 est plus difficile, car la base intéressante n'est pas connue.

Théorème 25.17.

Soit A une matrice de $\mathscr{O}_3$. Il existe une base orthonormée direct $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que, en notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$, on ait

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} $$

- Si le coefficient en haut à gauche vaut 1, $\det(A) = 1$ et il s'agit d'une rotation, dirigé par e_1, et d'angle θ.
- Si le coefficient en haut à gauche vaut -1, $\det(A) = -1$ et il s'agit de la composée d'une symétrie orthogonale par rapport au plan de vecteur normal e_1, et de la rotation d'axe dirigé par e_1 et d'angle θ.

Démonstration. Admis □

Remarque 331. — Soit λ une valeur propre de A, associée à un vecteur propre X. Alors $\|AX\| = \|X\|$ mais également $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$ et donc $|\lambda| = 1$. Mais puisque le polynôme caractéristique de A est de degré 3, le polynôme admet au moins une racine réelle, à savoir 1 ou -1. C'est un vecteur de l'espace propre associé à cette valeur propre qui donnera a_1.

Remarque 332. — Constatons que $\mathrm{Tr}({}^tPAP) = \pm 1 + 2\cos\theta$. Il nous manque le signe de $\sin(\theta)$ pour déterminer θ. Pour cela, on prend un vecteur orthogonal à e_1, qu'on appelle e_2. Par définition, le signe du déterminant $\det(e_1, e_2, Ae_2)$ nous donnera le signe du $\sin(\theta)$ (si c'est une rotation) ou de $-\sin(\theta)$ s'il s'agit une symétrie composée à une rotation.

Méthode 25.3.

Pour déterminer la nature d'une matrice orthogonale A.

① On détermine le déterminant pour savoir s'il s'agit d'une rotation ou de la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

La suite diffère selon la nature de la matrice.

— S'il s'agit d'une rotation :

② On détermine l'espace propre associé à la valeur propre 1, et on prend un des vecteurs non nuls de norme 1 : cela représentera e_1.

③ On détermine la trace pour obtenir la valeur du $\cos(\theta)$.

④ On détermine un vecteur orthogonal à e_1, qu'on note e_2, et on calcule le déterminant de (e_1, e_2, Ae_2). Son signe donne le signe de $\sin(\theta)$.

⑤ On conclut on donnant l'axe de la rotation (e_1) et l'angle θ.

— S'il s'agit d'une réflexion suivi d'une rotation

⑥ On détermine l'espace propre associé à la valeur propre -1, et on prend un des vecteurs non nuls de norme 1 : cela représentera e_1.

⑦ On détermine la trace pour obtenir la valeur du $\cos(\theta)$.

⑧ On détermine un vecteur orthogonal à e_1, qu'on note e_2, et on calcule le déterminant de (e_1, e_2, Ae_2). Son signe donne l'opposé du signe de $\sin(\theta)$.

⑨ On conclut on donnant l'axe de la symétrie et de la rotation (e_1) et l'angle θ.

Exercice 319. — Identifier la nature de l'isométrie donnée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et celle donnée par

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. A faire

V. Matrices symétriques

On termine par quelques résultats sur les matrice symétriques, qui repose sur les espaces euclidiens (mais dont la démonstration est hors programme).

1) Matrices symétriques et espaces propres

Proposition 25.18.

Soit A une matrice réelle symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 333. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les espaces propres de A et montrer qu'ils sont orthogonaux.

Solution. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (1-X)^2 - 1 = X(X-2)$. On a, rapidement :

$$E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Et on constate que, quel que soit $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in E_0$ et $X_2 = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in E_2$:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = xy + (-x)y = 0$$

Ainsi, les deux espaces propres sont orthogonaux.

2) Théorème spectral

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 25.19. Théorème spectral

Soit A une matrice réelle symétrique. Alors A est diagonalisable.

Démonstration. Admis. □

Remarque 333. — Ainsi, dès lors que la matrice A est symétrique, on est sûr qu'elle est diagonalisable.

fFileExiststex/Chap25/Exo25

Exercices

Exercices généraux

Exercice 320. — Soient f et g deux endormorphismes d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ vérifiant, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\| = \|g(x)\|$$

Montrer que pour tous $(x, y) \in E^2$, on a

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$$

En déduire qu'un endomorphisme qui conserve la norme est orthogonal.

Solution. Utilisons l'identité de polarisation : pour tous vecteurs u et v, on :

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

Ainsi, pour tous $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2}{2} \\
&= \frac{\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2}{2} \\
&= \frac{\|g(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|g(y)\|^2}{2} \text{ car } \|f(u)\| = \|g(u)\| \\
&= \frac{\|g(x)+g(y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2}{2} \\
&= \langle g(x), g(y)\rangle
\end{aligned}$$

Supposons alors que f conserve la norme, c'est-à-dire $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. On se trouve dans le cas précédent, où $g = \mathrm{id}_E$. Alors, d'après le résultat obtenu :

$$\forall\ (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Ainsi, f est bien un endomorphisme orthogonal.

Exercice 321. — On pose, pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonales à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. Puisque pour toute matrice M, $\mathrm{Tr}({}^tM) = \mathrm{Tr}(M)$, on obtient

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle$$

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique. Il est clairement linéaire à droite, puisque la trace est linéaire :

$$\begin{aligned}\langle \lambda A + B, C\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t(\lambda A + BC)\\ &= \mathrm{Tr}((\lambda\, {}^tA + {}^tB)C)\\ &= \mathrm{Tr}(\lambda\, {}^tAC + {}^tBC)\\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}({}^tAC) + \mathrm{Tr}({}^tBC) && = \lambda\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle\end{aligned}$$

Puisqu'il est symétrique, il est ainsi bilinéaire.
Remarquons que, si on note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$, alors

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

qui est donc bien positif. Et enfin, si celui-ci vaut 0, puisqu'il s'agit d'une somme de carrés positifs, on en déduit que tous les termes sont nuls, et donc que $A = O$.
Bilan : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ avec A orthogonale à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \mathrm{Tr}({}^tAB)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & a & d+g\\ 0 & b & e+h\\ 0 & c & f+i\end{pmatrix}\right)\\ &= b+f+i\end{aligned}$$

Ainsi, A est orthogonal à B si et seulement si $b+f+i=0$. Ainsi, l'ensemble des matrices orthogonales à B sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & -b-f\end{pmatrix},\quad (a,b,c,d,e,f,g,h)\in\mathbb{R}^8$$

Etude d'isométries

Exercice 322. — Donner la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes d'un espace euclidien de dimension 2 dont la matrice dans une base orthonormée est

- ⋆ $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.
- ⋆ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.
- ⋆ $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Solution. On utilise la méthode du cours pour déterminer la nature (via le déterminant) et les éléments caractéristiques (via la trace, ou autre).

1. A est de déterminant -1. Il s'agit donc d'une symétrie. En notant θ_1 le nombre de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\theta_1) = \frac{4}{5}$, alors A est la matrice d'une symétrie d'axe $(O;\vec{u})$, où $\vec{u}$ fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses.
2. Le déterminant de B vaut 1. Il s'agit d'une rotation d'angle θ_2. La trace nous donne $2\cos(\theta_2) = 0$ c'est-à-

dire $\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Si on prend $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ alors $\det(u, Bu) = \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} = -1 < 0$. Ainsi, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.
Bilan : B est la matrice de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3. C a comme déterminant 1 et est donc la matrice d'une rotation d'angle θ_3. La trace donne $2\cos(\theta_3) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ soit $\theta_3 = \pm\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. Or, en prenant $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, on a $\det(u, Cu) = \begin{vmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Donc $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$.
Bilan : C est la matrice de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 323. — Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'endormorphisme d'un espace euclidien dont la matrice dans une base orthonormée est

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & \sqrt{6}\\1 & 3 & -\sqrt{6}\\-\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2\end{pmatrix}$$

Solution. Rapidement, le déterminant de la matrice, que l'on note A, vaut 1 (on fera attention au $\frac{1}{4}$ devant la matrice, qui donnera, par passage au déterminant, un $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$).

Il s'agit donc d'une rotation autour d'un axe. La recherche de E_1 et la résolution de l'équation $AX = X$, pour $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ nous donne

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(e_1)$$

En notant θ l'angle de la rotation, la trace nous donne $1 + 2\cos(\theta) = 2$, soit $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

Enfin, en prenant $e_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, alors

$$\det(e_1, e_2, Ae_2) = \begin{vmatrix}1 & 0 & \sqrt{6}\\1 & 0 & -\sqrt{6}\\0 & 1 & 2\end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & \sqrt{6}\\1 & -\sqrt{6}\end{vmatrix} = 2\sqrt{6} > 0$$

Bilan : A est la matrice de la rotation autour de l'axe engendré par e_1, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 324. — Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'endormorphisme d'un espace euclidien dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Solution. On applique la même méthode. Le déterminant vaut 1. L'espace propre de la valeur propre 1 est

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(e_1)$$

Sa trace vaut $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ et donne $\cos(\theta) = \frac{-1+2\sqrt{2}}{4}$. En notant $\theta_0 = \arccos\left(\frac{-1+2\sqrt{2}}{4}\right)$, alors $\theta = \mp\theta_0$.

En prenant $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal à e_1, alors

$$\det(e_1, e_2, Ae_2) = \frac{5}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$$

Bilan : A est la matrice d'une rotation, autour de l'axe dirigé par e_1, d'angle θ_0.

CHAPITRE 26

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux fonctions non pas d'une variable, mais de plusieurs variables. On introduira la notion d'application $\mathscr{C}^1$,$\mathscr{C}^2$, de gradient, et on étudiera plus en détail les fonctions de deux variables. On verra enfin le lien avec les surfaces.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Sur les généralités :
- connaître les notions de base de topologie ..... □
- connaître les définitions de limite et de continuité dans le cas de fonctions de plusieurs variables ..... □
- connaître la notion de lignes de niveaux ..... □

② Concernant la notion de classe $\mathscr{C}^1$:
- connaître la définition des dérivées partielles ..... □
- savoir déterminer les dérivées d'une somme, d'une composée, d'un produit ..... □
- connaître la notion de point critique et de plan tangent ..... □

③ Concernant la notion de classe $\mathscr{C}^2$:
- connaître la définition de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ ..... □
- connaître le théorème de Schwarz ..... □

④ Savoir étudier les points critiques d'une fonction de deux variables réelles ..... □

⑤ Concernant les surfaces :
- Connaître la définition d'une surface ..... □
- Savoir déterminer le plan tangent et la normale d'une surface ..... □

I. Généralités

1) Topologie de $\mathbb{R}^2$

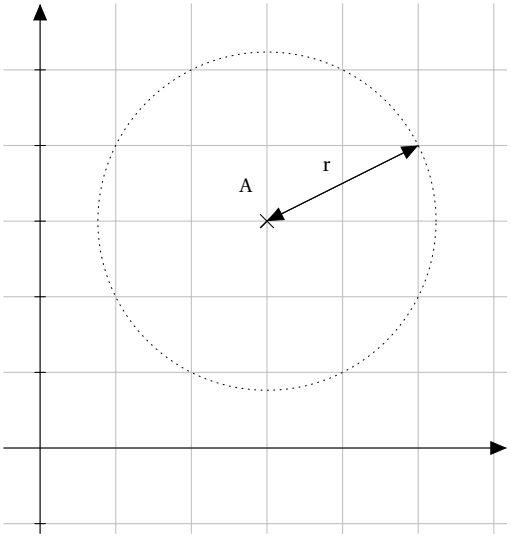
Dans l'ensemble de ce chapitre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel, ainsi que de la norme et la distance associées :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{et} \quad \forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad d(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}$$

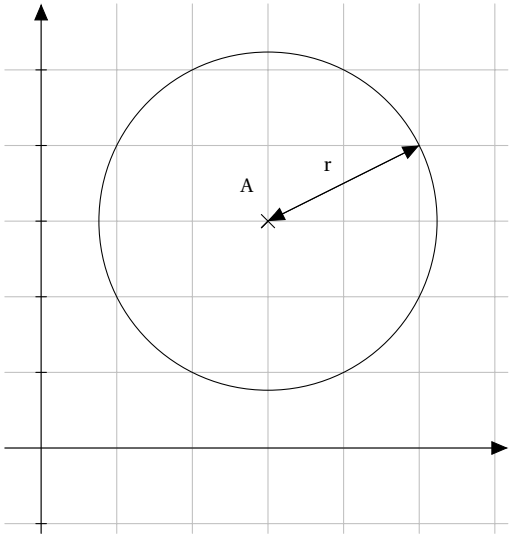
Définition 263. — Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, notée $\mathrm{B}(a,r)$, l'ensemble
$$\mathrm{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x-a\| < r\right\}$$
- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r, notée $\mathrm{B}_f(a,r)$, l'ensemble
$$\mathrm{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x-a\| \leqslant r\right\}$$

Exemple 334. — Dans $\mathbb{R}^2$, la boule ouverte et la boule fermée de centre $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r se représentent de la manière suivante :



$\mathrm{B}(\mathrm{A},r)$



$\mathrm{B}_f(\mathrm{A},r)$

Remarque 334. — La boule ouverte $\mathrm{B}(\mathrm{A},r)$ est incluse dans la boule fermée $\mathrm{B}_f(\mathrm{A},r)$. Si $s < r$, alors $\mathrm{B}(\mathrm{A},s) \subset \mathrm{B}(\mathrm{A},r)$.

Définition 264. — Une partie O de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte si elle est vide, ou si, pour tout $x \in \mathrm{O}$, il existe $r > 0$ telle que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{O}$. Ainsi, un ouvert est une réunion, éventuellement infinie, de boules ouvertes.

Remarque 335. — Ainsi, si O est un ouvert, pour tout $x \in \mathrm{O}$ on peut trouver une boule incluse dans O. C'est ce qu'on va utiliser régulièrement dans ce chapitre, de manière équivalente aux intervalles ouverts dans le cas des fonctions d'une variable.

Exemple 335. — Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 265. — Un ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{F}$ est un ouvert.

Exemple 336. — Toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 336. — L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ tout entier sont à la fois des ouverts et des fermés.

Définition 266. — Un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe une boule de rayon r contenant A : $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(a,r)$.

Exemple 337. — Toute boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$.

2) Fonctions de plusieurs variables

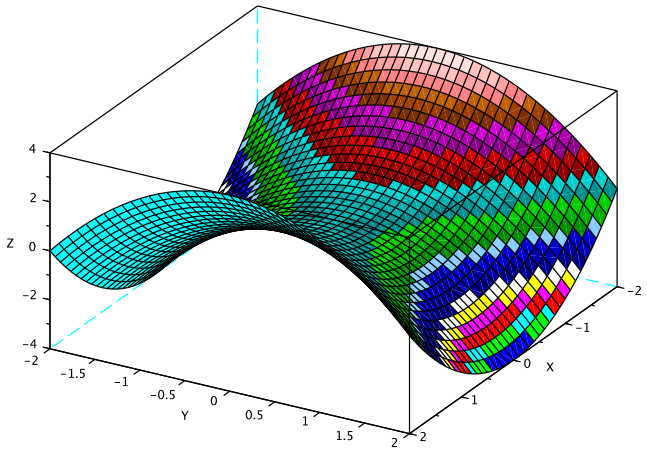
Dans la suite de ce chapitre, on va s'intéresser aux fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ (ou une partie de $\mathbb{R}^n$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 267. — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle graphe de f l'ensemble des points $\mathscr{G}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\mathscr{G} = \left\{(x_1, \cdots, x_n, z) \in \mathrm{U} \times \mathbb{R}, \quad z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right\}$$

Remarque 337. — Ainsi, le graphe d'une fonction de 2 variables réelles est une partie de l'espace.

Exemple 338. — Par exemple, le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - y^2$ est le suivant :



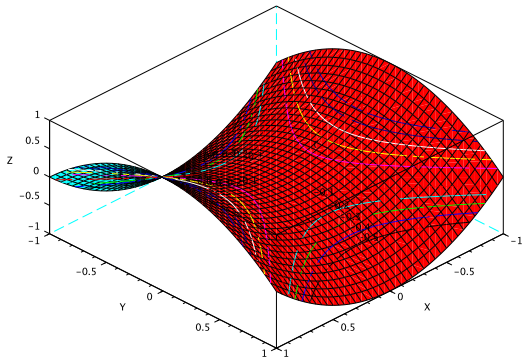
Définition 268. — On appelle **fonctions polynomiales** de $\mathbb{R}^n$ toute somme et produit finis de fonction $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i^k$, où k est un entier.

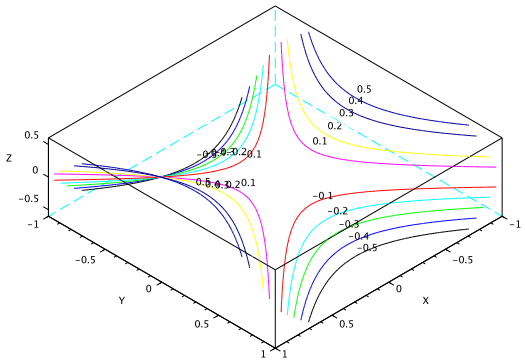
Exemple 339. — Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 x_2 + x_2 x_3^2$ sont polynomiales.

3) Lignes de niveaux

Définition 269. — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Pour tout réel λ, on appelle **courbe de niveau** λ l'ensemble des éléments $a \in U$ vérifiant $f(a) = \lambda$.

Exemple 340. — En reprenant l'exemple de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, voici les lignes de niveaux pour $\lambda \in \{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$:





En Scilab, on utilise les instructions `plot3d` et `contour` pour tracer le graphe d'une fonction de deux variables, ainsi que les lignes de niveaux.

Programme Scilab 6 : Représentation graphique fonction de deux variables

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 15/04/2017
// Résumé : montre comment tracer le graphe
//          d'une fonction de 2 variables ainsi
//          que les lignes de niveaux

// On définit la fonction f(x,y)=x^2-y^2
function z=mafonction(x,y)
    z=x^2-y^2
endfunction

// On efface l'interface graphique
clf

// On définit les vecteurs x (abscisses) et y (ordonnées)
x=[-1:0.05:1]';
y=x;
```

```
// On calcule les images qu'on met dans z
z=feval(x,y,mafonction);

// On utilise plot3d pour tracer la courbe
plot3d(x,y,z);

// On utilise contour pour tracer les lignes de niveaux
// contour(x,y,z,ligne,flag)
// où ligne est un vecteur donnant les réels l tels que f(x,y,z)=l
// et flag permet de tracer dans l'espace (sinon les lignes de niveaux
// sont tracées dans le plan)
contour(x,y,z,[-.5,-.4,-.3,-.2,-.1,.1,.2,.3,.4,.5], flag=[0 2 4])
```

4) Limite et continuité sur $\mathbb{R}^n$

L'idée est de généraliser la définition de continuité à des fonctions définies non pas sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$, mais à des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 270 (Limite d'une fonction)**.** — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Soit $a \in \mathrm{U}$. On dit que f **tend vers 0 lorsque $x \in \mathrm{U}$ tend vers a** si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \|x-a\| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
On dit également que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si $f - l$ tend vers 0.

Remarque 338. — Il s'agit exactement de la même définition que celle des fonctions d'une variable réelle, en utilisant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 271 (Continuité d'une fonction)**.** — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Soit $a \in \mathrm{U}$. f est **continue** en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
La fonction f est dite **continue** sur U si elle est continue en tout point de U.

Proposition 26.1.

Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Propriété 66. — *La somme et le produit de deux fonctions continues sur* U *sont continues sur* U.
Le quotient de deux fonctions continues sur U *dont le dénominateur ne s'annule pas est continue sur* U.

Propriété 67. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soient* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{I}$ *et* $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, respectivement sur* U *et sur* I. *Alors* $g \circ f$ *est continue sur* U.

Les fonctions de plusieurs variables continues vérifient le même résultat que les fonctions continues sur un segment : elles sont bornées et atteignent leurs bornes.

Théorème 26.2. Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 339. — Un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est appelé un **compact** de $\mathbb{R}^n$.

II. Applications $\mathscr{C}^1$

1) Dérivées partielles d'ordre 1

On va utiliser la notion de dérivée vue dans le cas des fonctions d'une variable pour les fonctions de plusieurs variables.

Définition 272 (Dérivée partielle d'ordre 1)**.** — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n)$ un point de U. On appelle **dérivée partielle d'ordre 1 de f en a par rapport à la i-ième variable** la dérivée, si elle existe, de la fonction $f_i : x \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$, que l'on note $\partial_i(f)(a)$. Ainsi, si elle existe

$$\partial_i(f)(a) = \lim_{x \to a_i} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{x - a_i}$$

On la note également $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Dans le cas d'une fonction de deux variables, on notera souvent $\partial_1 f$ sous la forme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_2 f$ sous la forme $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Définition 273 (Dérivées partielles d'ordre 1)**.** — La fonction qui à tout $a \in \mathrm{U}$ associe $\partial_i f(x, y)$, lorsqu'il existe, est appelée **dérivée partielle d'ordre 1** de f par rapport à la i-ième variable.

Méthode 26.1.

En pratique, pour calculer les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à la i-ième variable, on considère que toutes les autres variables sont des constantes, et on dérive par rapport à x_i.

Exemple 341. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 y + x y^2$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Solution. f est polynomiale en toutes les variables, donc admet des dérivées partielles en tout point. On a alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2xy$$

Exercice 325. — Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et y est continue.
2. Déterminer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

Solution. à faire

2) Gradient

Définition 274. — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1. On appelle **gradient** de f en $a \in \mathrm{U}$ le vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, noté $\vec{\nabla} f(a)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$,

défini par

$$\vec{\nabla} f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 342. — Dans l'exemple 341, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 \\ x^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

Le vecteur gradient joue le même rôle que le vecteur directeur de la tangente dans le cas d'une fonction d'une variable réelle : il est perpendiculaire à la courbe.

Proposition 26.3.

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $a \in$ U vérifiant $\vec{\nabla} f(a) \neq \vec{0}$.
Alors le vecteur $\vec{\nabla} f(a)$ est orthogonal à la courbe de niveau $f(a)$ au point a.

Remarque 340. — ⚠ On ne peut rien affirmer quant au comportement local lorsque le gradient est nul, contrairement au cas des fonctions d'une variable.

3) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 275. — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1, et que chacune de ces dérivées partielles est continue sur U.

On obtient le même théorème que pour les fonctions d'une variable réelle :

Proposition 26.4.

Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Exercice 326. — Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{y} + \dfrac{\ln(y)}{x}$. Déterminer le domaine de définition U de f, puis montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Solution. a faire

On dispose des opérations suivantes :

Proposition 26.5. Somme, produit, quotient

Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Le quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U dont le dénominateur ne s'annule pas est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

4) Composition de fonctions

On dispose de deux résultats sur la composition de fonctions :

Proposition 26.6. Composition

f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. Soient x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et telle que pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $(x(t), y(t)) \in \mathrm{U}$.

Alors la fonction $g : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ définie pour tout $t \in \mathrm{I}$ par $g(t) = f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a

$$\forall\ t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Remarque 341. — Ainsi, avec les notations de Leibniz et un peu d'abus de notation

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemple 343. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout réel t, on note $g(t) = f(t, t^2)$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer g'.

Solution. a faire

Ce résultat se généralise au cas de composition plus complexe :

Proposition 26.7.

f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. Soient x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, telles que pour tout $(u, v) \in \mathrm{V}$, on a $(x(u, v), y(u, v)) \in \mathrm{U}$. Alors la fonction $g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, et on a

$$\forall\ (u, v) \in \mathrm{V}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Remarque 342. — En notant $dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$ et $df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ les deux gradients, on a

$$dg = \mathrm{J}\,df \quad \text{avec} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Définition 276. — La matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ est appelé la matrice jacobienne du changement de variables $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$.

Exemple 344 (Changement en coordonnées polaires)**.** — Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Déterminer $\vec{\nabla} g$ en fonction de $\vec{\nabla} f$, et exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

Solution. Les fonctions $x : (r, \theta) \mapsto r\cos(\theta)$ et $y : (r, \theta) \mapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ par produits de fonctions de

classe $\mathscr{C}^1$. Par théorème de composition :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} g(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}\overrightarrow{\nabla f}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$$

Puis, en exprimant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) &= \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) &= \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta}\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, en prenant comme base $\vec{u}=\cos(\theta)\,\vec{i}+\sin(\theta)\,\vec{j}$ et $\vec{v}=-\sin(\theta)\,\vec{i}+\cos(\theta)\,\vec{j}$

$$\vec{\nabla} f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\vec{u}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\,\vec{v}$$

5) Développement limité d'ordre 1

On obtient un développement limité d'ordre 1 de la même forme que pour les fonctions d'une variable réelle :

Théorème 26.8.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a=(a_1,\cdots,a_n)\in \mathrm{U}$. Alors pour tout $h=(h_1,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n)\in \mathrm{U}$, on a

$$f(a+h)=f(a_1,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}\partial_i f(a)\cdot h_i+o_0(\|h\|)$$

Le résultat précédent se ré-écrit :

Définition 277. — L'égalité précédente est le développement limité à l'ordre 1 de f au point a. Il est **unique** et peut également s'écrire

$$f(a+h)=f(a)+{}^t\vec{\nabla} f(a)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}+o_0(\|h\|)$$

Remarque 343. — Si le gradient est nul en un point, le développement limité précédent n'apporte aucune information. Dans ce cas, il faut obtenir des informations à l'ordre 2.

Définition 278. — Soit f une fonction définie sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1. On dit que $a\in \mathrm{U}$ est un **point critique** de f si $\vec{\nabla} f(a)=\vec{0}$, c'est-à-dire

$$\forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad \partial_i f(a)=0$$

6) Plan tangent

Dans le cas d'une surface définie implicitement par $z = f(x,y)$, si le point n'est pas critique, on a vu que le gradient au point (x,y) est orthogonal à la ligne de niveau $f(x,y)$. Tout comme, dans le cas $y = f(x)$, on a introduit la notion de tangente, on va introduire ici la notion de plan tangent :

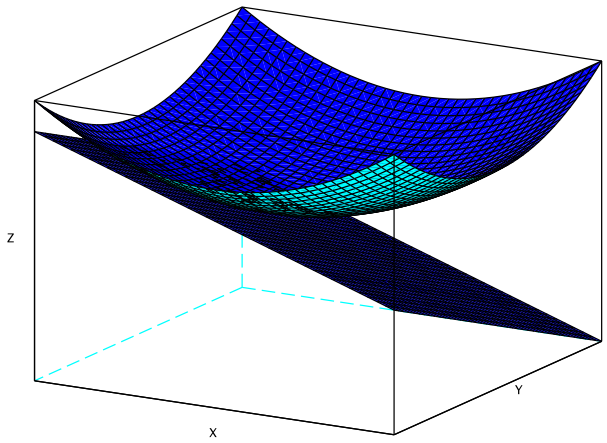
Définition 279. — Soit f une fonction définie sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $(a,b) \in$ U. On appelle **plan tangent** à la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = f(x,y)$ au point (a,b) le plan, passant par $(a,b,f(a,b))$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} \partial_1 f(a,b) \\ \partial_2 f(a,b) \\ -1 \end{pmatrix}$ si celui-ci n'est pas nul.

Une équation du plan tangent au point (a,b) est alors

$$z = \partial_1 f(a,b)(x-a) + \partial_2 f(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

Exemple 345. — Pour $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$, au point $(1,1)$, le gradient vaut $(2,2)$, et le plan tangent a donc pour équation

$$z = 2(x-1) + 2(y-1) + f(1,1) = 2x + 2y - 2$$



III. Applications $\mathscr{C}^2$

1) Dérivées partielles d'ordre 2.

Définition 280. — Soit f une fonction définie sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

Si la fonction $\partial_i(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la j-ième variable sur U, alors on dit que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la i-ième variable puis par rapport à la j-ième variable, et on la note $\partial^2_{j,i}(f)$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, on notera

$$\partial^2_{1,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial^2_{2,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \partial^2_{1,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemple 346. — Soit f la fonction définie par $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ pour tout couple (x,y) dans l'ouvert $U =]0,+\infty[^2$. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et les déterminer.

Solution. a faire

Définition 281 (Matrice Hessienne)**.** — Soit f une fonction définie sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 2. On appelle hessienne de f en $(a_1,\cdots,a_n)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2(f)(a)$, de coefficient $h_{ij} = \partial_{ij} f(a)$.

2) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Définition 282. — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2, et que chacun de ces quatre dérivées partielles est continue sur U.

Remarque 344. — Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 sur U, et que celles-ci sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifient une propriété très importante :

Théorème 26.9. Théorème de Schwarz

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

Remarque 345. — ⚠ Le théorème de Schwarz est faux si f n'est pas une fonction de classe $\mathscr{C}^2$!

Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$, la matrice hessienne vérifie une propriété essentielle :

Proposition 26.10.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors sa matrice hessienne en tout point est symétrique, et donc diagonalisable.

Remarque 346. — Nous utiliserons ce résultat pour étudier les points critiques.

Définition 283 (Laplacien)**.** — Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **laplacien** de f en $a \in U$ le réel

$$\Delta f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

Remarque 347. — Le laplacien correspond à la trace de la matrice hessienne.

3) Développement limité d'ordre 2

Théorème 26.11.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a=(a_1,\cdots,a_n)\in \mathrm{U}$. Alors pour tout $h=(h_1,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n)\in \mathrm{U}$, on a

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n} h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)+o_0(\|h\|^2)$$

Remarque 348. — Si a est un point critique, le résultat précédent permet d'obtenir des informations locales quant au comportement de f au voisinage de ce point.

IV. Extrema d'une fonction de deux variables réelles

1) Extremum local d'une fonction

Définition 284. — Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathrm{M}_0\in\mathrm{U}$. On dit que f admet

- un maximum local en M_0 s'il existe un réel $r>0$ tel que

$$f(x,y)\leqslant f(\mathrm{M}_0)\quad \text{pour tout } (x,y)\in \mathrm{B}(\mathrm{M}_0,r)$$

  Le maximum est dit global si l'inégalité précédente est vraie sur tout U.
- un minimum local en M_0 s'il existe un réel $r>0$ tel que

$$f(x,y)\geqslant f(\mathrm{M}_0)\quad \text{pour tout } (x,y)\in \mathrm{B}(\mathrm{M}_0,r)$$

  Le minimum est dit global si l'inégalité précédente est vraie sur tout U.

Comme dans le cas réel, un extremum local est un point critique :

Proposition 26.12. Condition nécessaire d'extremum

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et y admettant des dérivées partielles d'ordre 1.
Si f admet un extremum local en M_0, alors M_0 est un point critique de f.

Remarque 349. — ⚠ Attention : comme pour le cas d'une variable réelle, cette condition est nécessaire, mais n'est pas suffisante.

Exemple 347. — Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^3$. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f, mais que f n'admet pas d'extremum local en 0.

f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On a rapidement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$$

En $(0,0)$ les dérivées s'annulent et $(0,0)$ est donc bien un point critique. Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)>0 \text{ si } x>0,\quad f(x,y)<0 \text{ si } x<0$$

Ainsi, il ne peut y avoir en $(0,0)$ ni un maximum local, ni un minimum local.

2) Etude des points critiques

Dans le cas de fonctions d'une variable réelle, on avait le résultat "si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0". On va obtenir le même genre de résultat dans le cas de fonctions de deux variables réelles.

Remarque 350. — Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et si $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ est un point critique, alors le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de M_0 s'écrit =

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + 0 + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + kh\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + o_0(\|(h,k)\|^2)$$

soit, puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, en utilisant le théorème de Schwarz :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + o_0(\|(h,k)\|^2)$$

Notation 15 (Notations de Monge)**.** — Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et si $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ est un point critique, on note en général

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Remarque 351. — Avec les notations de Monge, le développement limité s'écrit

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(h^2 r + 2hks + k^2 t) + o_0(\|(h,k)\|^2)$$

En prenant $k \neq 0$, on peut alors écrire

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}k^2\left(\left(\frac{h}{k}\right)^2 r + 2\frac{h}{k}s + t\right) + o_0(\|(h,k)\|^2)$$

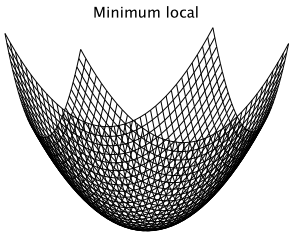
On peut alors s'intéresser au polynôme $rX^2 + 2sX + t$, de discriminant $\Delta = 4s^2 - 4rt$. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 26.13.

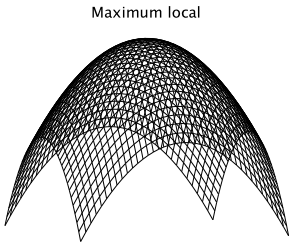
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ un point critique. On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

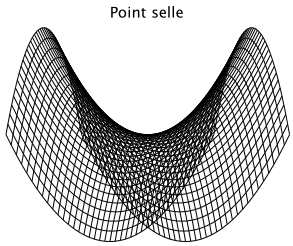
- Si $rt - s^2 > 0$:
  - Si $r > 0$, alors $\left(\frac{h}{k}\right)^2 r + 2\frac{h}{k}s + t > 0$: (x_0, y_0) est un minimum local.
  - Si $r < 0$, alors $\left(\frac{h}{k}\right)^2 r + 2\frac{h}{k}s + t < 0$: (x_0, y_0) est un maximum local.
- Si $rt - s^2 < 0$: $\left(\frac{h}{k}\right)^2 r + 2\frac{h}{k}s + t$ change de signe : (x_0, y_0) n'est ni minimum, ni maximum local. (x_0, y_0) est appelé **point selle** ou **point col**.
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.



$rt-s^2>0$ et $r>0$



$rt-s^2>0$ et $r<0$



$rt-s^2<0$

Méthode 26.2.

Pour étudier la nature d'un point critique :

① On détermine les points critiques en cherchant les points d'annulation du gradient.

② On calcule, pour chacun des points critiques, r, s et t, puis on calcule $rt-s^2$.

③ On conclut en fonction du signe quant à la nature locale du point critique.

Exercice 327. — Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2$. Etudier les points critiques de f.

Solution. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout (x,y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$$

Il n'y a donc qu'un seul point critique : $(0,0)$. Or

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$$

Ainsi, en $(0,0)$: $r=2, s=0$ et $t=2$. Alors $rt-s^2=4>0$ et $r>0$: il y a donc un minimum local en $(0,0)$ qui vaut $f(0,0)=0$. D'ailleurs, celui-ci est un minimum global car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)\geqslant 0=f(0,0)$.

Exercice 328. — Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2-y^2$. Etudier les points critiques de f.

Solution. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout (x,y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y$$

Il n'y a donc qu'un seul point critique : $(0,0)$. Or

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2$$

Ainsi, en $(0,0)$: $r=2, s=0$ et $t=-2$. Alors $rt-s^2=-4<0$: il y a donc un point selle en $(0,0)$.

Exercice 329. — Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=xy$. Etudier les points critiques de f.

Solution. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout (x,y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

Il n'y a donc qu'un seul point critique : $(0,0)$. Or

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Ainsi, en $(0,0)$: $r = 0, s = 1$ et $t =$. Alors $rt - s^2 = -1 < 0$: il y a donc un point selle en $(0,0)$.

3) Extrema globaux

Le théorème de Weierstrass garantit qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, une fonction continue sur un compact admet un minimum et un maximum global.

Méthode 26.3.

Pour démontrer qu'un extremum local atteint en (x_0, y_0) est global ou non, on calcule $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ et on essaie de factoriser pour obtenir le signe de ce terme.

Exercice 330. — Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sur $D = B_f(O,1)$. On rappelle que D est fermé et borné.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur D.
2. Déterminer l'unique point critique de f sur $B(O,1)$, et étudier sa nature.
3. Quel est l'ensemble de points Γ pour lesquels f est susceptible d'admettre un minimum local ?
4. Vérifier que f admet un minimum global en tous les points de Γ.

Solution.

1. $(x,y) \mapsto 1-x^2-y^2$ est continue sur D car polynomiale et positive sur ce domaine. De plus, la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par composée, f est continue sur D, qui est un compact. D'après le théorème de Weierstrass, f est bornée et atteint ses bornes sur D.
2. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $B(O,1)$ (par composée, et car $(x,y) \mapsto 1-x^2-y^2 > 0$ sur la boule ouverte). Pour tout $(x,y) \in B(O,1)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
Le seul point critique est donc en $(0,0)$.
Déterminons les valeurs de r, s et t en $(0,0)$. Après calcul, on obtient :
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1$$
On a alors $rt - s^2 = 1 > 0$ et $r < 0$: il y a donc un maximum local qui vaut 1 au point $(0,0)$. On voit rapidement, de part la définition de f qu'il s'agit d'un maximum global.
3. Puisqu'il n'y a pas d'autres points critiques sur $B(O,1)$, les seuls points en lesquels il peut y avoir un minimum local est sur la sphère unité, c'est-à-dire :
$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1\right\}$$
4. Si $(x,y) \in \Gamma$, alors $f(x,y) = 0$. Clairement, pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \geqslant 0$ donc en tout point de Γ, il y a un minimum global.

V. Surface

1) Définition

Définition 285. — Soient x, y et z trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble des points $\mathscr{S}$ de l'espace vérifiant

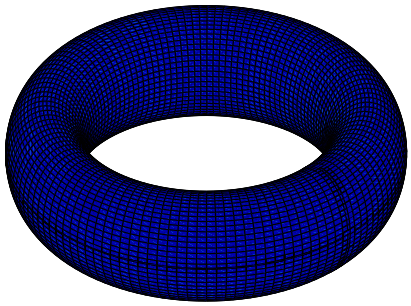
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x(u,v) \\ y & = & y(u,v) \\ z & = & z(u,v) \end{array}\right. , \quad (u,v) \in \mathrm{U}$$

est une surface, appelée **surface paramétrée** ou **nappe**.

Exemple 348. — L'ensemble des points $\mathscr{T}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\sin(\theta)(4+\cos(\varphi)) \\ y & = & \cos(\theta)(4+\cos(\varphi)) \\ z & = & \sin(\varphi) \end{array}\right. , \quad (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$$

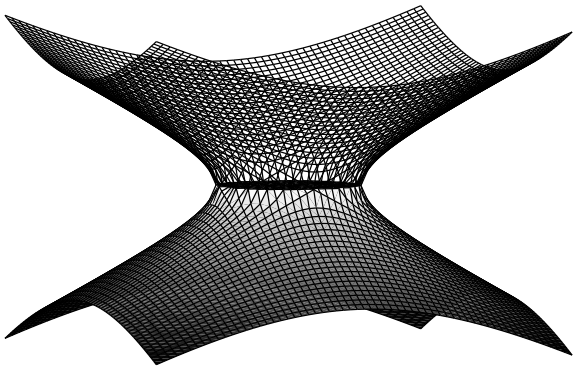
est un tore, de représentation :



Définition 286 (Equation implicite)**.** — Soit F une application de classe $\mathscr{C}^2$ de U, ouvert de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ vérifiant $\mathrm{F}(x,y,z)=0$ est une surface, d'équation implicite $\mathrm{F}(x,y,z)=0$.

Remarque 352. — En général, connaissant une équation implicite, on ne peut pas forcément obtenir une définition explicite comme pour le tore.

Exemple 349. — La surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$ est appelée hyperboloïde à une nappe.



2) Plan tangent, normale

Définition 287. — Soit $\mathscr{S}$ une surface paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x(u,v) \\ y & = & y(u,v) \\ z & = & z(u,v) \end{array}\right. , \quad (u,v) \in \mathrm{U}$$

Soit $(u,v) \in \mathrm{U}$, et $\mathrm{M} = x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. On note

$$\vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Si $\vec{n}(u,v) \neq \vec{0}$, alors le point (u,v) de $\mathscr{S}$ est dit **régulier**, et dans ce cas, le vecteur $\vec{n}(u,v)$ est un **vecteur normal** à la surface de $\mathscr{S}$ en (u,v).

On appelle alors :

- **plan tangent** à $\mathscr{S}$ en M le plan, passant par M et de vecteur normal $\vec{n}(u,v)$.
- **normale** à $\mathscr{S}$ en M la droite, passant par M et dirigée par $\vec{n}(u,v)$.

Exercice 331. — Montrer que tout point du tore est régulier, et déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{T}$ en $\mathrm{M}(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))$.

Solution. Soit $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ et calculons $\vec{n}(\theta,\varphi)$:

$$\begin{aligned} \vec{n}(\theta,\varphi) &= \begin{pmatrix} -\cos(\theta)(4+\cos(\varphi)) \\ -\sin(\theta)(4+\cos(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta)(4+\cos(\varphi))\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)(4+\cos(\varphi))\cos(\varphi) \\ (4+\cos(\varphi))\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= (4+\cos(\varphi)) \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons que ce vecteur n'est jamais nul. En effet, si la dernière ligne est nulle, alors $\varphi \equiv 0[\pi]$ mais alors l'une des deux premières lignes ne s'annule pas.

Le plan tangent en $M(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))$ a alors pour équation

$$-\sin(\theta)(4+\cos(\varphi))\cos(\varphi)x + \cos(\theta)(4+\cos(\varphi))\cos(\varphi)y + (4+\cos(\varphi))\sin(\varphi)z + d = 0$$

On déterminer d en disant que le point M est dans le plan, et donc que

$$-\sin(\theta)(4+\cos(\varphi))\cos(\varphi)(-\sin(\theta)(4+\cos(\varphi))) + \cos(\theta)(4+\cos(\varphi))\cos(\varphi)(\cos(\theta)(4+\cos(\varphi))) + (4+\cos(\varphi))\sin(\varphi)\sin(\varphi) + d = 0$$

et donc $d = -(4+\cos(\varphi))(1+4\cos(\varphi))$.

En divisant par $(4+\cos(\varphi))$ qui ne s'annule jamais :

$$-\sin(\theta)\cos(\varphi)x + \cos(\theta)\cos(\varphi)y + \sin(\varphi)z - (1+4\cos(\varphi)) = 0$$

Remarque 353. — Dans le cas où une surface $\mathscr{S}$ est définie implicitement par $F(x,y,z) = 0$, alors un point (x,y,z) est régulier si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z) \neq \vec{0}$. Dans ce cas, le gradient est un vecteur normal au plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ en M, ou un vecteur directeur de la normale à $\mathscr{S}$ en M

fFileExiststex/Chap26/Exo26

Exercices

Points critiques

Exercice 332. — Déterminer le(s) point(s) critique(s) et la nature du(des) point(s) critique(s) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.

Solution. La fonction f est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ et est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On détermine ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + 3$$

Ainsi, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Il y a un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Déterminons les dérivées secondes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

Ainsi, au point critique :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

On a alors $rt - s^2 = 3 > 0$. Puisque $r = 2 > 0$, on peut en déduire qu'on obtient un minimum local au point critique.
Bilan : $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 333. — Déterminer le(s) point(s) critique(s) et la nature du(des) point(s) critique(s) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$.

Solution. La fonction f est un produit et une composée de fonction polynomiale et de la fonction exp sur $\mathbb{R}^2$, toutes de classe $\mathscr{C}^2$. On peut en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On détermine ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + y(x-y)e^{xy} = e^{xy}(1 + y(x-y)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{xy} + x(x-y)e^{xy} = e^{xy}(-1 + x(x-y))$$

Ainsi, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} e^{xy}(1+y(x-y))=0 \\ e^{xy}(-1+x(x-y))=0 \end{cases} \sim \begin{cases} y(x-y)+1=0 \\ x(x-y)-1=0 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} xy=-1+y^2 \\ xy=x^2-1 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} xy=-1+y^2 \\ x^2=y^2 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} xy=-1+y^2 \\ x=y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} xy=-1+y^2 \\ x=-y \end{cases}$$
$$\sim \text{système incompatible, ou } \begin{cases} x=-y \\ 2x^2=1 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Il y a donc deux points critiques : les points de coordonnées $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Déterminons les dérivées secondes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=ye^{xy}(1+y(x-y))+e^{xy}y=e^{xy}(2y+xy^2-y^3)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=xe^{xy}(1+y(x-y))+e^{xy}(x-2y)=e^{xy}(2x-2y+x^2y-xy^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=xe^{xy}(-1+x(x-y))+e^{xy}(-x)=e^{xy}(-2x+x^3-x^2y)$$

— Au point M_1, on a alors
$$r=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}},\quad s=3\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\quad\text{et}\quad t=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$
Ainsi, $rt-s^2=-4e^{-1}<0$. Il y a donc un point col ou selle au point de coordonnées $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

— Au point M_2, on a alors
$$r=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}},\quad s=-3\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\quad\text{et}\quad t=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$
Ainsi, $rt-s^2=-4e^{-1}<0$. Il y a donc un point col ou selle au point de coordonnées $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bilan : Il y a deux points critiques, qui sont tous les deux des points selles.

Exercice 334. — Déterminer le(s) point(s) critique(s) et la nature du(des) point(s) critique(s) de la fonction $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=y(x^2+(\ln(y))^2)$.

Solution. Tout d'abord, la fonction $(x,y)\mapsto y$ est $\mathscr{C}^2$ et strictement positive sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Par composée avec la fonction $y\mapsto\ln(y)^2$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction $(x,y)\mapsto\ln(y)^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

Par produit avec des fonctions polynomiales, on peut en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. On détermine ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^2+\ln(y)^2)+y2\frac{1}{y}\ln(y)=x^2+\ln(y)(\ln(y)+2)$$

Ainsi, $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2+\ln(y)(\ln(y)+2)=0 \end{cases} &\sim \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y)(\ln(y)+2)=0 \end{cases} \quad \text{car y>0}\\
&\sim \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y)(\ln(y)+2)=0 \end{cases}\\
&\sim \begin{cases} x=0 \\ \ln(y)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y)+2=0 \end{cases}\\
&\sim \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=\mathrm{e}^{-2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a donc deux points critiques : les points de coordonnées $M_1(0,1)$ et $M_2\left(0,\mathrm{e}^{-2}\right)$.

Déterminons les dérivées secondes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2y\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 2x\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1}{y}(\ln(y)+2)+\ln(y)\frac{1}{y} = 2\frac{\ln(y)+1}{y}
\end{aligned}$$

— Au point M_1, on a alors

$$r=2,\quad s=0\quad\text{et}\quad t=2$$

Ainsi, $rt-s^2=4>0$. Puisque $r>0$, il y a donc un minimum local au point de coordonnées $M_1(0,1)$.

— Au point M_2, on a alors

$$r=2\mathrm{e}^{-2},\quad s=0\quad\text{et}\quad t=-2\mathrm{e}^{2}$$

Ainsi, $rt-s^2=-4<0$. Il y a donc un point col ou selle au point de coordonnées $M_2\left(0,\mathrm{e}^{-2}\right)$.

Bilan : Il y a deux points critiques : un minimum local atteint au point de coordonnées $(0,1)$, et un point selle au point de coordonnées $(0,\mathrm{e}^{-2})$.

> **Remarque.** — On peut montrer que le minimum est global. En effet, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x,y)\geqslant 0$. Or $f(0,1)=0$, donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\quad f(x,y)\geqslant f(0,1)$.

Equation aux dérivées partielles

Exercice 335. — On cherche toutes les applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\text{(E)}\quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xy$$

On pose $u=x$ et $v=3x-2y$.

1. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$.
2. Montrer que (E) est équivalente à l'équation $2\frac{\partial f}{\partial u}=0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution.

1. Remarquons tout d'abord que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a :
$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2$$
Ainsi, d'après la formule des dérivées composées :
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}\\&=\frac{\partial f}{\partial u}+3\frac{\partial f}{\partial v}\\\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}\\&=-2\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$
2. Remplaçons les résultats précédents dans l'équations (E) :
$$\begin{aligned}2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=2\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+3\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)+3\left(-2\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)\\&=2\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\end{aligned}$$
Ainsi
$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow 2\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0$$
3. Puisque $2\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0$, on en déduit que $f(u,v)$ ne dépend pas de u. On peut écrire $f(u,v)=g(v)$ avec g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si $f(u,v)=g(v)$ ne dépend que de v, f vérifie bien l'équation $2\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0$.
On revient à la variable de départ : f est solution de (E) si et seulement s'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x,y)=g(3x-2y)$.

Sujet de concours

Exercice 336 (ATS 2016)**.** — Soit la fonction $f:]0;+\infty[\times]0,1]\to\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$$
et la fonction $g:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par :
$$g(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1\frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\,dy.$$
On se propose de calculer une expression de $g(x)$, puis de $g'(x)$. On calcule ensuite $\frac{\partial f}{\partial x}$, puis l'intégrale $\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$, que l'on comparera à $g'(x)$.

1. (a) Pour un x positif fixé, montrer que $\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}=x$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale définissant g ?
2. (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on précisera, l'égalité
$$g(x)=-\ln(1+x)+2x\int_0^1\frac{dy}{1+xy^2}.$$

(b) À l'aide d'un changement de variable, montrer qu'il existe deux fonctions à préciser a et b dépendant de x, telles que :
$$\int_0^1 \frac{dy}{1+xy^2} = a(x)\int_0^{b(x)} \frac{du}{1+u^2}.$$

(c) En déduire une expression de $g(x)$ sans intégrale.

(d) En déduire une expression de $g'(x)$ (également sans intégrale).

3. (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\right)$.

(b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$.

(c) Que remarque-t-on ?

Solution.

1. (a) Pour $x>0$, on constate que $xy^2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par équivalence, on a alors
$$\frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} \underset{y\to 0}{\sim} \frac{xy^2}{y^2} = x$$
Ainsi
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} = x$$

(b) A x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, on constate que la fonction $y\mapsto f(x,y)$ est définie et continue sur $]0;1]$. L'intégrale définissant g est donc impropre en 0. Or, d'après la question précédente, la fonction $y\mapsto f(x,y)$ se prolonge par continuité en $y=0$, en posant $f(x,0)=x$. Ainsi, la fonction ainsi prolongée est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale définissant g est bien convergente.
Bilan : g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a)

> **Remarque.** — Puisque l'intégrale définissant g est impropre, on travailler sur $[a;1]$ et on fera tendre a vers 0.

Soit $a>0$. On pose $u(y)=\ln(1+xy^2)$, et $v'(y)=\dfrac{1}{y^2}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;1]$, avec
$$u'(v) = \frac{2x}{1+xy^2} \quad \text{et} \quad v(y) = -\frac{1}{y}$$
On a, par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \left[\frac{-1}{y}\ln(1+xy^2)\right]_a^1 - \int_a^1 -\frac{1}{y}\frac{2x}{1+xy^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\ln(1+x) + \frac{\ln(1+xa^2)}{a} + 2x\int_a^1 \frac{1}{1+xy^2}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$
On fait tendre a vers 0. La deuxième intégrale est bien convergente (car la fonction est continue sur $[0;1]$. Enfin, par équivalence :
$$\frac{\ln(1+xa^2)}{a} \underset{a\to 0}{\sim} \frac{xa^2}{a} = xa \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Bilan : On obtient alors, pour tout $x>0$:
$$g(x) = -\ln(1+x) + 2x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}$$

(b) L'énoncé nous impose de poser $u = \sqrt{x}y$, ce qui a un sens car $x > 0$. u est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ (car affine). On a

$$\mathrm{d}u = \sqrt{x}\,\mathrm{d}y \Leftrightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y$$

Enfin, si $y = 0$, $u = 0$ et si $y = 1$, $u = \sqrt{x}$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} &= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\end{aligned}$$

On obtient bien l'expression demandée, avec $a(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $b(x) = \sqrt{x}$.

(c) Cette dernière intégrale étant calculable, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}g(x) &= -\ln(1+x) + 2x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}\\ &= -\ln(1+x) + 2x\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= -\ln(1+x) + 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})\end{aligned}$$

Bilan : Ainsi,

$$\boxed{\forall\ \in \mathbb{R}_+^*,\quad g(x) = -\ln(1+x) + 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})}$$

(d) D'après l'expression précédente, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On a alors :

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\frac{1}{1+x} + 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}\\ &= -\frac{1}{1+x} + \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x}\\ &= \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall\ x > 0,\quad g'(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$$

3. (a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times]0;1]$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{y^2}\frac{y^2}{1+xy^2}\\ &= \frac{1}{1+xy^2}\end{aligned}$$

(b) On a alors, pour $a > 0$

$$\int_a^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} \xrightarrow[a\to 0]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}$$

Puisque cette intégrale a déjà été calculée en question $2c$) :

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$$

(c) D'après les questions $2d$ et $3b$, on en déduit que pour tout $x > 0$:

$$\boxed{g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y}$$

SOMMAIRE

1 Ensemble, applications et raisonnement **5**

I. Raisonnement par récurrence . . . 6

1) Principe de récurrence . . . 6

2) Récurrence double, récurrence forte . . . 8

II. Autres raisonnements . . . 9

1) Symboles mathématiques . . . 9

2) Implication et équivalence . . . 10

3) Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde . . . 11

4) Égalité . . . 11

5) Équation et inéquation . . . 12

III. Ensembles . . . 13

1) Ensembles et éléments . . . 13

2) Union, intersection . . . 13

3) Inclusion, sous-ensemble . . . 14

4) Complémentaire . . . 14

5) Produit cartésien . . . 15

IV. Sommes et produits . . . 16

1) Définitions et propriétés . . . 16

a) Définition . . . 16

b) Première propriétés . . . 18

c) ln et exp . . . 18

d) Sommes usuelles . . . 18

2) Changement de variables . . . 18

a) Variables muettes . . . 18

b) Changement de variable . . . 19

c) Sommes doubles . . . 19

3) Sommes télescopiques . . . 20

a) Définition . . . 20

b) Simplification . . . 20

c) Produits télescopiques . . . 21

V. Dénombrement . . . 21

1) Cardinaux . . . 21

2) Combinaisons . . . 23
a) Définition . . . 23
b) Nombre de combinaisons . . . 23
3) Formules . . . 24
a) Formules de base . . . 24
b) Formule du binôme de Newton . . . 25
VI. Applications . . . 27
1) Définition . . . 27
2) Opérations sur les fonctions . . . 28
3) Injection, surjection . . . 29
a) Injection . . . 29
b) Surjection . . . 30
c) Bijection . . . 31
4) Image directe, image réciproque, restriction . . . 33
Exercices . . . 35

2 Étude d'une fonction d'une variable réelle 45
I. Généralités sur les fonctions . . . 46
1) Notion de fonction . . . 46
2) Courbe représentative . . . 46
3) Parité et imparité . . . 47
4) Périodicité . . . 49
5) Sens de variation . . . 49
6) Majorant-Minorant . . . 50
7) Maximum-Minimum . . . 51
II. Limites . . . 52
1) Opérations sur les limites . . . 52
a) Limite de $f+g$ . . . 52
b) Limite de $f \times g$ . . . 52
c) Limite de $\frac{f}{g}$ . . . 53
2) Limite d'une fonction composée . . . 53
3) Limites et asymptotes . . . 54
III. Dérivée, primitive . . . 55
1) Nombre dérivé et tangente . . . 55
2) Formules de dérivation . . . 56
3) Variations et dérivations . . . 57
4) Continuité . . . 58
5) Dérivée d'une fonction réciproque . . . 60
6) Primitives . . . 61
IV. Fonctions de référence . . . 62
1) Fonctions affines . . . 62
2) Fonction trinômes . . . 63

3) Fonction valeur absolue . . . 64
4) Fonctions racine carrée et inverse . . . 65
5) Fonction partie entière . . . 66
V. Fonctions logarithmes, exponentielle et puissances . . . 67
1) Fonction logarithme népérien . . . 67
2) Fonction exponentielle . . . 69
3) Fonctions puissances . . . 70
4) Maximum, minimum de deux fonctions . . . 72
VI. Fonctions trigonométrique . . . 73
1) Cercle trigonométrique . . . 73
2) Formules . . . 74
3) Equations . . . 75
4) Fonctions trigonométriques . . . 76
5) Fonctions trigonométriques réciproques . . . 77
a) Fonction arcsin . . . 77
b) Fonction arccos . . . 78
c) Fonction arctan . . . 79
VII. Fonctions hyperboliques . . . 80
1) Définitions . . . 80
2) Fonctions hyperboliques . . . 81
VIII. Plan d'étude d'une fonction . . . 83
1) Méthode générale . . . 83
2) Exemple . . . 84
Exercices . . . 86

3 Nombres complexes **99**
I. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . 100
1) Construction de $\mathbb{C}$ . . . 100
2) Structures algébriques de $\mathbb{C}$. . . . 100
3) Nombres complexes et géométrie . . . 102
II. Conjugué d'un nombre complexe . . . 103
1) Définitions et propriétés . . . 103
2) Application aux quotients . . . 104
III. Forme exponentielle . . . 105
1) Module . . . 105
2) Groupe des nombres complexes de module 1 . . . 106
a) Définitions . . . 106
3) Exponentielle complexe . . . 107
4) Fonctions à valeurs complexes . . . 108
5) Argument d'un nombre complexe . . . 108
IV. Racines complexes . . . 111
1) Racines n-ièmes d'un nombre complexe . . . 111

2) Racines de l'unité . . . 112
3) Racines carrées d'un nombre complexe . . . 113
4) Equation du second degré à coefficients complexes . . . 114
V. Lien entre complexes et trigonométrie . . . 115
1) Formules d'Euler . . . 115
2) Formule de Moivre . . . 116
3) Application à la linéarisation . . . 116
VI. Complexes et géométrie . . . 118
1) Distances et angles . . . 118
2) Transformations du plan . . . 119
a) Translation . . . 119
b) Rotation . . . 120
c) Homothétie . . . 120
d) Symétrie par rapport à l'axe des abscisses . . . 121
Exercices . . . 123

4 Géométrie élémentaire du plan 131
I. Repérage dans le plan . . . 132
1) Vecteurs . . . 132
2) Base du plan et repère . . . 133
3) Coordonnées polaires . . . 134
II. Produit scalaire . . . 135
1) Définitions . . . 135
2) Applications géométriques . . . 137
III. Déterminant dans une base orthonormée directe . . . 137
1) Définition . . . 137
2) Propriétés . . . 138
IV. Droites . . . 139
1) Définitions . . . 139
2) Représentations cartésiennes et paramétriques . . . 139
3) Intersection de deux droites . . . 141
4) Projeté orthogonal d'un point sur une droite . . . 142
5) Distance d'un point à une droite . . . 142
V. Cercles . . . 143
1) Définition . . . 143
2) Méthodes . . . 144
VI. Triangles et quadrilatères . . . 145
1) Triangle . . . 145
2) Quadrilatères . . . 147
Exercices . . . 148

5 Equations différentielles linéaires 157
I. Notions d'équation différentielle . . . 158

1) Généralités . . . 158
2) Problème de Cauchy . . . 158
3) Equations différentielles linéaires . . . 158
II. Equations différentielles linéaires du premier ordre . . . 159
1) Généralités . . . 159
2) Résolution d'une équation homogène . . . 159
3) Cas général . . . 160
4) Méthode de variation de la constante . . . 162
5) En physique et S.I. . . . 164
III. Equations différentielles du second ordre à coefficients constants . . . 165
1) Généralités . . . 165
2) Résolution de l'équation homogène . . . 165
3) Cas général . . . 167
4) En physique et S.I. . . . 169
Exercices . . . 172

6 Systèmes linéaires 181
I. Définitions et propriétés . . . 182
1) Définitions . . . 182
2) Propriétés . . . 182
3) Résolution par substitution . . . 183
4) Systèmes triangulaires . . . 183
II. Pivot de Gauss-Jordan . . . 184
1) Exemple . . . 184
2) Opérations élémentaires . . . 185
3) Pivot de Gauss-Jordan . . . 185
III. Systèmes de Cramer . . . 187
1) Définition . . . 187
2) Systèmes de Cramer et pivot de Gauss . . . 188
3) Système de Cramer et système homogène associé . . . 188
Exercices . . . 189

7 Nombres réels et suites numériques 193
I. Nombres réels . . . 194
1) Ensembles usuels . . . 194
2) Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 194
II. Généralités sur les suites . . . 196
1) Définition et notations . . . 196
2) Trois types de définition de suites . . . 196
a) Définition explicite . . . 196
b) Définition par récurrence . . . 196
c) Définition implicite . . . 196
3) Représentation graphique d'une suite . . . 196

III. Monotonie, majoration, minoration . . . 197
1) Suites monotones . . . 197
2) Méthodes de recherche des variations d'une suite . . . 197
a) Pour les suites $u_n = f(n)$ . . . 197
b) Termes consécutifs . . . 198
c) Par récurrence . . . 199
3) Suites majorées, minorées, bornées . . . 199
IV. Suites arithmétiques et géométriques . . . 200
1) Suites arithmétiques . . . 200
2) Suites géométriques . . . 201
V. Limites de suites . . . 203
1) Limite finie . . . 203
2) Limite infinie . . . 203
3) Suite convergente . . . 205
4) Suite sans limite . . . 205
VI. Théorèmes sur les limites . . . 205
1) Théorème de comparaison . . . 205
2) Théorème d'encadrement . . . 205
3) Convergence des suites monotones . . . 207
VII. Opération sur les limites . . . 208
1) Limites usuelles . . . 208
2) Limite de $u_n + v_n$ . . . 208
3) Limite de $u_n \times v_n$ . . . 208
4) Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle . . . 208
5) Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle . . . 209
6) Limite de (q^n) . . . 209
7) Croissances comparées . . . 210
VIII. Suites adjacentes . . . 211
IX. Comparaison de suites . . . 212
1) Négligeabilité . . . 212
2) Équivalence . . . 213
Exercices . . . 215

8 Polynômes **235**

I. Définitions . . . 236
1) Notion de polynômes . . . 236
2) Degré . . . 236
3) Dérivée d'un polynôme . . . 237
II. Egalité de polynômes et identification . . . 237
1) Egalité de polynômes . . . 237
2) Application à l'identification . . . 237
III. Racines d'un polynôme . . . 238

1) Définition . . . 238
2) Nombre de racines d'un polynôme . . . 240
3) Cas des polynômes de degré 2 sur $\mathbb{R}[X]$ . . . 240
4) Cas général . . . 241
5) Division euclidienne . . . 242
6) Relations racines-coefficients . . . 243
IV. Fractions rationnelles . . . 243
1) Définitions . . . 243
2) Degré et partie entière d'une fraction . . . 244
3) Pôles et décomposition en éléments simples . . . 245
Exercices . . . 248

9 Matrices **255**
I. Matrices . . . 256
1) Définition . . . 256
2) L'algèbre des matrices . . . 256
a) Addition de matrices . . . 256
b) Multiplication par un scalaire . . . 257
c) Premières propriétés . . . 257
d) Produit matriciel . . . 257
e) Transposition . . . 258
II. Matrices carrées . . . 259
1) Définitions . . . 259
a) Matrices carrées . . . 259
b) Matrices diagonales et triangulaires . . . 259
c) Matrices symétriques et antisymétriques . . . 260
2) Puissances d'une matrice carrée . . . 260
III. Matrices inversibles . . . 263
1) Définition . . . 263
2) Propriétés . . . 263
3) Règles de calcul . . . 264
4) Ensemble $GL_2(\mathbb{R})$ . . . 265
IV. Systèmes linéaires et matrices . . . 265
1) Ecriture matricielle d'un système linéaire . . . 265
2) Inverse d'une matrice et système . . . 266
Exercices . . . 269

10 Géométrie élémentaire de l'espace **279**
I. Repérage dans l'espace . . . 280
1) Base de l'espace et repère . . . 280
2) Orientation . . . 281
3) Produit scalaire dans l'espace . . . 281
II. Produit vectoriel . . . 283

1) Définition . . . 283
2) Propriétés . . . 283
III. Produit mixte . . . 284
1) Définition . . . 285
2) Propriétés . . . 285
IV. Plans . . . 286
1) Système d'équations paramétriques d'un plan . . . 287
2) Équation cartésienne d'un plan . . . 287
3) Distance d'un point à un plan . . . 289
V. Droites . . . 290
1) Définitions . . . 290
2) Représentations paramétriques . . . 290
3) Intersection de plans et représentation cartésienne . . . 291
4) Distance d'un point à une droite . . . 292
VI. Sphères . . . 293
1) Définition . . . 293
Exercices . . . 295

11 Espaces vectoriels **301**
I. Espaces vectoriels . . . 302
1) Généralités . . . 302
2) Règles de calculs . . . 303
3) Combinaison linéaire . . . 304
II. Sous-espace vectoriel . . . 305
1) Définition . . . 305
2) Sous-espaces engendrés . . . 306
3) Intersection de sous-espaces vectoriels . . . 307
4) Somme de sous-espaces vectoriels . . . 307
III. Base d'un espace vectoriel . . . 309
1) Définition . . . 309
2) Base canonique des espaces vectoriels usuels . . . 311
IV. Applications linéaires . . . 312
1) Définition . . . 312
2) Noyau d'une application linéaire . . . 313
3) Image d'une application linéaire . . . 314
Exercices . . . 317

12 Limites et continuité **331**
I. Limites à l'infini . . . 332
1) Limites nulles . . . 332
2) Limites finies : $l \in \mathbb{R}$ . . . 332
3) Limites infinies . . . 333
II. Limites en $a \in \mathbb{R}$ . . . 334

1) Limite réelle en un point . . . 334
2) Limite infinie en un point . . . 335
3) Limite à gauche et à droite . . . 335
III. Théorèmes d'existence et de comparaison . . . 336
1) Fonctions monotones . . . 336
2) Limites et inégalités . . . 337
3) Théorème d'encadrement . . . 337
4) Comparaison à l'infini . . . 338
5) Asymptote oblique . . . 339
IV. Opérations sur les limites et limites usuelles . . . 339
1) Opérations sur les limites . . . 339
a) Limite de $f+g$ . . . 339
b) Limite de $f\times g$ . . . 339
c) Limite de $\frac{f}{g}$ . . . 340
2) Limite d'une fonction composée . . . 340
3) Limites usuelles . . . 341
a) Limites classiques . . . 341
b) Croissances comparées . . . 342
4) Autres limites . . . 343
5) Quelques indéterminations classiques . . . 343
a) Polynômes et fractions rationnelles . . . 343
b) Racines . . . 344
c) $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ . . . 344
V. Etude des limites d'une fonction . . . 344
1) 1ère étape : limites . . . 344
2) 2ème étape : branches infinies . . . 345
VI. Continuité . . . 346
1) Continuité en un point, sur un intervalle . . . 346
2) Continuité des fonctions usuelles . . . 347
3) Prolongement par continuité . . . 348
4) Tableau de variations et convention . . . 348
5) Suites récurrentes et continuité . . . 348
6) Continuité par morceaux . . . 349
VII. Fonctions continues et résolution d'équation . . . 350
1) Théorème des valeurs intermédiaires . . . 350
2) Théorème de la bijection . . . 351
3) Extension à un intervalle non borné . . . 352
4) Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie . . . 352
5) Continuité et sens de variation de f^{-1} . . . 354
Exercices . . . 355

13 Espaces vectoriels en dimension finie **363**

I. Quelques compléments . . . 364
1) Projecteurs . . . 364
2) Symétrie . . . 364
II. Dimension finie . . . 365
1) Rappels sur les bases . . . 365
2) Dimension finie et coordonnées . . . 366
3) Dimension des espaces usuels . . . 367
4) Rang d'une famille . . . 368
III. Bases en dimension finies . . . 368
1) Caractérisation d'une base en dimension finie . . . 368
2) Théorème de la base incomplète . . . 368
3) Dimensions et sous-espaces vectoriels . . . 369
4) Dimension finie et supplémentaire . . . 370
IV. Dimension finie et application linéaire . . . 370
1) Applications linéaires en dimension finie . . . 370
2) Isomorphisme et dimension finie . . . 371
V. Représentation matricielle en dimension finie . . . 373
1) Matrice d'une application linéaire . . . 373
2) Lien entre matrice et applications linéaires . . . 374
3) Changement de base . . . 375
4) Cas des projecteurs et symétries . . . 377
VI. Quelques compléments . . . 378
1) Trace et transposée . . . 378
2) Formule du rang . . . 379
Exercices . . . 382

14 Dérivabilité **389**
I. Dérivabilité en un point . . . 390
1) Définition . . . 390
2) Interprétation géométrique . . . 390
3) Développement limité d'ordre 1 . . . 391
4) Dérivabilité et continuité . . . 392
5) Dérivabilité à droite et à gauche . . . 392
6) Nombre dérivé et extremum . . . 393
II. Dérivabilité sur un intervalle . . . 394
1) Fonction dérivée . . . 394
2) Dérivées des fonctions usuelles . . . 394
3) Opérations sur les dérivées . . . 395
4) Dérivée d'une fonction réciproque . . . 397
5) Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ . . . 399
6) Dérivées successives . . . 399
7) Formule de Leibniz . . . 400

III. Application de la dérivation . . . 400
1) Dérivée nulle sur un intervalle . . . 400
2) Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis . . . 401
3) Monotonie et signe de la dérivée . . . 402
4) Inégalité des accroissements finis . . . 402
5) Nombre dérivé et extrema locaux . . . 403
IV. Exercices bilans . . . 403
Exercices . . . 407

15 Intégration sur un segment **421**
I. Intégrale sur un segment . . . 422
1) Cas des fonctions positives . . . 422
2) Premières propriétés . . . 423
3) Cas des fonctions en escalier . . . 423
4) Cas général . . . 424
II. Propriétés générales . . . 425
1) Relation de Chasles . . . 425
2) Linéarité . . . 425
III. Primitives . . . 426
1) Définition . . . 426
2) Différentes primitives d'une fonction . . . 426
3) Fonction continue et primitive . . . 426
4) Fonction primitive et condition initiale . . . 428
5) Calcul intégral et primitive . . . 428
IV. Recherche de primitives . . . 429
1) Fonctions usuelles . . . 429
2) Utilisation des formules de dérivation . . . 429
3) Opération sur les primitives . . . 430
V. Propriétés d'encadrement et valeur moyenne . . . 430
1) Encadrement . . . 430
2) Inégalité de la moyenne . . . 431
3) Valeur moyenne d'une fonction . . . 432
4) Fonctions positive et intégrale nulle . . . 432
5) Intégration d'une fonction continue par morceaux . . . 433
VI. Méthode de calcul d'intégrales . . . 433
1) Intégration par partie . . . 433
2) Changement de variable . . . 434
3) Fonctions définies par une intégrale . . . 435
4) Méthode des rectangles . . . 436
Exercices . . . 438

16 Déterminants **449**
I. Déterminant . . . 450

1) Définition . . . 450
2) Développement par rapport aux lignes et colonnes . . . 450
3) Opérations élémentaires . . . 451
II. Déterminant et opération sur les matrices . . . 452
1) Déterminant nul . . . 452
2) Produit et transposition . . . 453
3) Matrices inversibles . . . 453
4) Matrice par bloc . . . 454
III. Applications aux endomorphismes et aux vecteurs . . . 454
1) Déterminant d'une famille de vecteurs . . . 454
2) Déterminant d'un endomorphisme . . . 454
Exercices . . . 456

17 Développements limités **461**
I. Comparaison locale . . . 462
1) Négligeable . . . 462
2) Equivalence . . . 463
II. Développements limités . . . 465
1) Définition . . . 465
2) Propriétés des DL . . . 466
3) Quotient . . . 467
4) Développement limité, continuité et dérivabilité . . . 467
5) Intégration . . . 468
III. Formule de Taylor-Young . . . 469
1) Formule de Taylor-Young . . . 469
2) Développements limités usuels . . . 470
IV. Applications . . . 470
1) Calcul de limite . . . 470
2) Recherche d'équivalents . . . 471
3) Position relative de courbe . . . 471
4) Asymptote . . . 472
Exercices . . . 474

18 Intégrale sur un intervalle **481**
I. Intégrale sur un intervalle quelconque . . . 482
1) Définition . . . 482
2) Propriétés . . . 482
a) Linéarité . . . 482
b) Relation de Chasles . . . 483
c) Positivité et croissance de l'intégrale . . . 483
II. Théorèmes d'existence . . . 483
1) Intégrales de référence . . . 483
2) Majoration . . . 485

3) Equivalences et négligeabilité . . . 485
4) Méthode d'étude . . . 486
5) Changement de variable . . . 487
III. Convergence absolue . . . 488
1) Définition . . . 488
2) Intégrale convergeant absolument vers 0 . . . 488
Exercices . . . 489

19 Séries numériques **497**
I. Définitions . . . 498
1) Séries . . . 498
2) Convergence . . . 498
3) Premiers exemples . . . 499
II. Propriétés . . . 499
1) Opérations sur les séries . . . 499
2) Suite et série . . . 500
3) Limite de la suite et convergence . . . 500
4) Séries réelle à termes positifs . . . 501
5) Lien entre intégrale et série . . . 501
III. Séries de référence . . . 502
1) Séries géométriques . . . 502
2) Séries de Riemann . . . 503
IV. Théorèmes de convergence . . . 503
1) Théorème de comparaison . . . 503
2) Equivalence et négligeabilité . . . 504
V. Convergence absolue . . . 505
1) Définition . . . 505
2) Absolue convergence et convergence . . . 505
3) Convergence et absolue convergence . . . 505
4) Séries alternées . . . 505
5) Etudier une série . . . 506
Exercices . . . 507

20 Réduction d'endomorphismes **511**
I. Eléments propres . . . 512
1) Valeurs propres, vecteurs propres . . . 512
2) Valeur propre et inversibilité . . . 513
3) Sous-espaces propres en somme directe . . . 514
4) Diagonalisation . . . 514
5) Matrice diagonalisable . . . 515
II. Diagonalisation . . . 516
1) Polynôme caractéristique . . . 517
2) Valeur propre et polynôme caractéristique . . . 517

3) Condition de diagonalisabilité . . . 519
4) Méthode générale . . . 520
III. Trigonalisation . . . 522
1) Définition . . . 522
2) Caractérisation des endomorphismes trigonalisables . . . 522
3) Méthode pratique en basse dimension . . . 523
IV. Applications . . . 523
1) SciLab . . . 523
2) Trace, déterminant et valeurs propres . . . 524
3) Puissances de matrices . . . 525
4) Systèmes récurrents linéaires homogènes . . . 526
Exercices . . . 529

21 Courbes paramétrées **539**
I. Généralités . . . 540
1) Fonctions vectorielles . . . 540
2) Vecteur vitesse, vecteur accélération . . . 540
3) Tangente et vecteur tangent . . . 541
II. Etude d'une courbe paramétrée du plan . . . 542
1) Symétries . . . 542
2) Branches infinies . . . 545
3) Variations conjointes . . . 546
4) Tracé . . . 546
5) Longueur d'une courbe . . . 549
Exercices . . . 551

22 Séries de Fourier **559**
I. Coefficients de Fourier . . . 560
1) Polynômes trigonométriques . . . 560
2) Coefficients d'un polynôme de Fourier . . . 560
3) Cas des fonctions paires et impaires . . . 561
II. Séries de Fourier . . . 562
III. Convergence de la série de Fourier . . . 563
1) Régularisée d'une fonction . . . 563
2) Convergence ponctuelle . . . 564
3) Application . . . 565
4) Identité de Parseval . . . 566
Exercices . . . 568

23 Équations différentielles générales **573**
I. Equations différentielles scalaire d'ordre 2 . . . 574
1) Définition . . . 574
2) Solutions de l'équation homogène . . . 574

3) Résolution connaissant une solution de (H) . . . 574
4) Problème de Cauchy . . . 575
II. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants . . . 575
1) Définition . . . 576
2) Structure des solutions . . . 576
3) Résolution dans le cas où A est diagonalisable . . . 577
4) Exemple dans le cas où A est trigonalisable . . . 578
5) Relation entre équation différentielle d'ordre n et système d'équations différentielles d'ordre 1 . . . 579
III. Equations non linéaires . . . 580
IV. Méthode d'Euler . . . 581
Exercices . . . 583

24 Séries entières **587**
I. Série entière . . . 588
1) Définition . . . 588
2) Rayon de convergence . . . 588
3) Critère de d'Alembert . . . 590
4) Séries entières et opérations . . . 591
II. Propriétés d'une série entière . . . 592
1) Continuité . . . 592
2) Dérivation, intégration . . . 592
3) Unicité du développement en série entière . . . 594
4) Séries entière de référence . . . 595
III. Applications . . . 595
1) Equations différentielles . . . 595
2) Déterminer un développement en série entière . . . 597
3) Calcul de somme de série . . . 597
Exercices . . . 599

25 Espaces euclidiens **605**
I. Produit scalaire et espace euclidien . . . 606
1) Produit scalaire . . . 606
2) Espace euclidien et norme . . . 607
3) Distance associée . . . 607
4) Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 608
5) Identité du parallélogramme . . . 609
II. Orthogonalité . . . 609
1) Définitions . . . 609
2) Famille orthogonale . . . 610
III. Groupe orthogonal . . . 611
1) Définition . . . 611
2) Matrices et orthogonalité . . . 611
3) Matrice orthogonale et déterminant . . . 613

IV. Groupe orthogonal de dimension 2 et 3 . . . 613
1) Groupe orthogonal de dimension 2 . . . 613
2) Groupe orthogonal de dimension 3 . . . 615
V. Matrices symétriques . . . 617
1) Matrices symétriques et espaces propres . . . 617
2) Théorème spectral . . . 617
Exercices . . . 618

26 Fonctions de plusieurs variables **623**
I. Généralités . . . 624
1) Topologie de $\mathbb{R}^2$ . . . 624
2) Fonctions de plusieurs variables . . . 625
3) Lignes de niveaux . . . 626
4) Limite et continuité sur $\mathbb{R}^n$ . . . 627
II. Applications $\mathscr{C}^1$ . . . 628
1) Dérivées partielles d'ordre 1 . . . 628
2) Gradient . . . 628
3) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ . . . 629
4) Composition de fonctions . . . 629
5) Développement limité d'ordre 1 . . . 631
6) Plan tangent . . . 632
III. Applications $\mathscr{C}^2$ . . . 632
1) Dérivées partielles d'ordre 2. . . . 632
2) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ . . . 633
3) Développement limité d'ordre 2 . . . 633
IV. Extrema d'une fonction de deux variables réelles . . . 634
1) Extremum local d'une fonction . . . 634
2) Etude des points critiques . . . 635
3) Extrema globaux . . . 637
V. Surface . . . 638
1) Définition . . . 638
2) Plan tangent, normale . . . 639
Exercices . . . 641